

Paper-ID: VGI\_195807



## Katasterpläne ebener Gebiete aus Einzel-Luftbildern

Alois Barvir <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Hochschule Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **46** (3), S. 65–75

1958

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Barvir_VGI_195807,  
  Title = {Katasterpl{\a}ne ebener Gebiete aus Einzel-Luftbildern},  
  Author = {Barvir, Alois},  
  Journal = {{{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {65--75},  
  Number = {3},  
  Year = {1958},  
  Volume = {46}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom  
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. R o h r e r  
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. L e g o und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. L e d e r s t e g e r

Nr. 3

Baden bei Wien, Ende Juni 1958

XLVI. Jg.

## Katasterpläne ebener Gebiete aus Einzel-Luftbildern

Von A. Barvir, Graz

*Zusammenfassung:* Für ebene Gebiete werden zur Berechnung der Koordinaten (im Landes-System) von Grenzpunkten aus deren Photobild-Koordinaten gebrauchsfertige Transformationsformeln aufgestellt. Für die ebenso zahlreich vorhandenen Kultur-Grenzpunkte genügt eine präzise, optisch-mechanische Entzerrung auf einem mit nur je zwei Bewegungsmöglichkeiten des Bildhalters und des Kartenhalters ausgestatteten Entzerrungsgerät, wenn man die Einstell-Daten vorher berechnet. Deshalb werden die erforderlichen Formeln für die die projektiven Beziehungen zweier ebener Felder charakterisierenden Größen entwickelt. Das Verfahren eignet sich auch zur Eliminierung des Papier-Einganges der Mappenblätter anlässlich einer Neuauflage sowie zur Umformung von Mappenblättern in andere kartographische Projektions-Systeme.

Die projektive Beziehung zwischen zwei ebenen Feldern  $E'$  und  $E$  ist analytisch durch die beiden linear gebrochenen Funktionen gegeben:

$$x = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + c_3} \quad y = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + c_3} \quad \dots \quad (1)$$

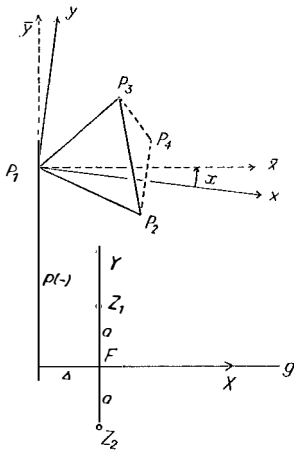
Die neun Koeffizienten, von denen einer willkürlich angenommen werden kann, sind weitgehend von der Wahl der Koordinatensysteme in  $E'$  und  $E$  abhängig. Für die vier erforderlichen Paßpunkte der Kartenebene  $E$  sind die Koordinaten, meist im Landessystem, zahlenmäßig gegeben. Um die mit einer rechnerischen Entzerrung verbundene, gegenüber der optisch-mechanischen Entzerrung höhere Genauigkeit zu wahren, wird man daher die Karten-Paßpunkte nicht auftragen und ihre Abstände von Bezugs-Seiten messen, sondern mit ihren Kartenkoordinaten arbeiten. Für die entsprechenden vier Paßpunkte der Bildebene (Luftbild)  $E'$  steht die Wahl des Koordinatensystems frei. Doch wird man aus Genauigkeitsgründen auch hier rechtwinkligen Koordinaten den Vorzug geben und diese mit einem der verschiedenen, präzisen Koordinatographen dem Bild entnehmen.

Um nicht mit großen Zahlen rechnen zu müssen, wird man, wie auch sonst in der Geodäsie üblich, in  $E'$  und  $E$  einander korrespondierende Punkte zum Koordi-

natenursprung wählen, wodurch die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  in (1) verschwinden. Die verbleibenden sieben Koeffizienten, von denen einer willkürlich angenommen werden kann, werden am zweckmäßigsten nach dem Vorschlag von W. Wunderlich ermittelt. Aus seiner Abhandlung [1] werden im folgenden die erforderlichen Formeln zusammengestellt.

$$x = \frac{\alpha_1 f_1' x_1 + \alpha_2 f_2' x_2 + \alpha_3 f_3' x_3}{\alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2' + \alpha_3 f_3'} \quad y = \frac{\alpha_1 f_1' y_1 + \alpha_2 f_2' y_2 + \alpha_3 f_3' y_3}{\alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2' + \alpha_3 f_3'} \quad \cdot \cdot \quad (2)$$

Dabei weisen die Indizes 1, 2, 3 auf die drei aus den vier Paßpunkten ausgewählten Eckpunkte des Fundamentaldreiecks in  $E'$  und des entsprechenden Grunddreiecks in  $E$  hin.



$2f_i' = A_i' x' + B_i' y' + C_i'$  ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks  $P'_{i+1} P'_{i+2} P'_i$  in  $E'$

$2e_i' = A_i' x_4' + B_i' y_4' + C_i'$  der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks  $P'_{i+1} P'_{i+2} P'_4$

$$A_i' = y'_{i+1} - y'_{i+2} \quad B_i' = x'_{i+2} - x'_{i+1}$$

$$C_i' = x'_{i+1} y'_{i+2} - x'_{i+2} y'_{i+1}$$

Analog gilt für  $E$ :

$$2f_i = A_i x + B_i y + C_i \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

$$2e_i = A_i x_4 + B_i y_4 + C_i$$

$$A_i = y_{i+1} - y_{i+2} \quad B_i = x_{i+2} - x_{i+1}$$

$$C_i = x_{i+1} y_{i+2} - x_{i+2} y_{i+1} \quad i = 1, 2, 3$$

Im folgenden wird die eckige Klammer als Summenzeichen über Werte mit den Indizes 1, 2, 3 verwendet. Somit ist der doppelte Flächeninhalt der Grunddreiecke gleich:

$$2f' = [\alpha_i' f_i'] = C_1' = 2[e_i'] \quad 2f = [z_i f_i'] = C_1 = 2[e_i]$$

$$\alpha_i = \frac{e_i}{e_i'} \quad \alpha_i' = \frac{e_i'}{e_i} \quad \alpha_i \alpha_i' = 1 \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$$

Durch die erwähnte Wahl der Koordinatensysteme wird ferner

$$C_2' = C_2 = C_3' = C_3 = 0$$

und die Formeln (1) und (2) zu

$$x = \frac{[\alpha_i A_i' x_i] x' + [\alpha_i B_i' x_i] y'}{[\alpha_i A_i'] x' + [\alpha_i B_i'] y' + \alpha_1 C_1'} \quad y = \frac{[\alpha_i A_i' y_i] x' + [\alpha_i B_i' y_i] y'}{[\alpha_i A_i'] x' + [\alpha_i B_i'] y' + \alpha_1 C_1'} \quad \cdot \cdot \quad (5)$$

Für die umgekehrte Transformation von Punkten aus  $E$  nach  $E'$  gilt analog:

$$x' = \frac{[z_i' A_i x_i'] x + [\alpha_i' B_i x_i'] y}{[\alpha_i' A_i] x + [\alpha_i' B_i] y + \alpha_1' C_1} \quad y' = \frac{[z_i' A_i y_i'] x + [z_i' B_i y_i'] y}{[\alpha_i' A_i] x + [\alpha_i' B_i] y + \alpha_1' C_1} \quad \cdot \cdot \quad (6)$$

Setzt man diese Werte für  $x'$  und  $y'$  in die Formeln (5) ein, so ergeben sich Identitäten, die nur bestehen können, wenn

$$\begin{aligned} [\alpha_i' A_i] \cdot N &= \alpha_1' C_1 \{ [z_i B_i'] [z_i A_i' y_i] - [z_i A_i'] [z_i B_i' y_i] \} \\ [z_i' B_i] \cdot N &= \alpha_1' C_1 \{ [\alpha_i A_i'] [z_i B_i' x_i] - [z_i B_i'] [z_i A_i' x_i] \} \\ [z_i' A_i x_i'] \cdot N &= C_1' C_1 [z_i B_i' y_i] \quad [\alpha_i' B_i x_i'] N = -C_1' C_1 [z_i B_i' x_i] \quad \dots \quad (7) \\ [z_i' A_i y_i'] \cdot N &= -C_1' C_1 [z_i A_i' y_i] \quad [\alpha_i' B_i y_i'] N = C_1' C_1 [z_i A_i' x_i] \\ N &= [z_i A_i' x_i] [z_i B_i' y_i] - [z_i A_i' y_i] [z_i B_i' x_i] \end{aligned}$$

Bei Verwendung der Transformationsformeln (5) und (6) wird man, wieder zur Vermeidung großer Zahlen, Zähler und Nenner z. B. von (5) durch  $\alpha_1 C_1'$  dividieren, wodurch für praktisch vorkommende Fälle der Nenner ungefähr 1 wird.

Diese präzise, rechnerische Entzerrung könnte im Zuge der photogrammetrischen Katasteraufnahmen zur Ermittlung der Koordinaten der Besitzgrenzpunkte versucht werden, wenn das Gelände eben ist; es braucht aber keineswegs horizontal zu sein. Für die ebenso große Menge der Kulturgrenzpunkte, die in der Natur nur ungefähr gegeben sind, würde eine präzise, optisch-mechanische Entzerrung genügen. Dabei wäre die gegenseitige Lage von Bild, Objektiv und Mappenebene nicht durch Probieren zu ermitteln; besser werden Daten errechnet und an Maßstäben und Teilkreisen eingestellt, um Bild und Mappenebene in perspektive Lage zu bringen. Die Formeln für diese Einstelldaten werden im folgenden aus den bisher angeführten Beziehungen abgeleitet.

Wie in [1] gezeigt, sind die Gleichungen des Bildhorizontes  $g'$  in  $E'$  und des Kartenhorizontes  $g$  in  $E$

$$\begin{aligned} g' \dots [z_i A_i'] x' + [z_i B_i'] y' + \alpha_1 C_1' &= 0 \\ g \dots [z_i' A_i] x + [z_i' B_i] y + \alpha_1' C_1 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \quad (8)$$

Aus ihnen erhält man unmittelbar die Verkantungswinkel der Horizontlinien, der Fluchtgeraden gegen die  $x'$ - bzw.  $x$ -Achse.

$$\operatorname{tg} \alpha' = - \frac{[z_i A_i']}{[z_i B_i']} \quad \operatorname{tg} \alpha = - \frac{[z_i' A_i]}{[z_i' B_i]} \quad \dots \quad (9)$$

Dabei geben wir dem Verkantungswinkel das Vorzeichen seines Tangens; wir zählen ihn positiv in dem Drehsinn, in dem die positive  $x$ -Achse in die positive  $y$ -Achse übergeführt wird. Nach (7) bestehen zwischen den beiden Verkantungswinkeln die Beziehungen

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{[z_i' A_i y_i'] + [z_i' B_i y_i'] \cdot \operatorname{tg} \alpha}{[\alpha_i' A_i x_i'] + [z_i' B_i x_i'] \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{[\alpha_i A_i' y_i] + [z_i B_i' y_i] \operatorname{tg} \alpha'}{[\alpha_i A_i' x_i] + [z_i B_i' x_i] \operatorname{tg} \alpha'} \quad \dots \quad (10)$$

Nun beziehen wir die Punkte der Felder  $E'$  und  $E$  — unter Beibehaltung der einander entsprechenden Ursprungspunkte — auf rechtwinkelige Koordinatensysteme mit  $\bar{x}'$ ,  $\bar{x}$  parallel zu den Fluchtgeraden  $g'$  und  $g$ . Es wird

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha' & \bar{y}' &= -x' \sin \alpha' + y' \cos \alpha' \\ \bar{x} &= x \cos \alpha + y \sin \alpha & \bar{y} &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \quad \dots \quad (11)$$

Bei dieser Koordinatentransformation bleiben alle Flächeninhalte wie  $e_i'$ ,  $e_i$ ,  $C_1'$ ,  $C_1$  und deren Verhältniszahlen  $\alpha_i$ ,  $\alpha_i'$  unverändert. Von den quergestrichenen Koeffizien-

ten der für die neuen Koordinatensysteme geltenden Gleichungen (5) und (6) werden wegen (9), (10) und weil die Verkantungswinkel gegenüber den neuen ersten Achsen null sind:

$$[\alpha_i \bar{A}_i'] = [z_i' \bar{A}_i] = [\alpha_i \bar{A}_i' \bar{y}_i] = [\alpha_i' \bar{A}_i \bar{y}_i'] = 0 \quad \dots (12)$$

Aus den Transformationsformeln (5) und (6) wird

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{[\alpha_i \bar{A}_i' \bar{x}_i] \bar{x}' + [z_i \bar{B}_i' \bar{x}_i] \bar{y}'}{[\alpha_i \bar{B}_i'] \bar{y}' + \alpha_1 C_1'} & \bar{y} &= \frac{[z_i \bar{B}_i' \bar{y}_i] \bar{y}'}{[\alpha_i \bar{B}_i'] \bar{y}' + \alpha_1 C_1'} \quad \dots (13) \\ \bar{x}' &= \frac{[\alpha_i' \bar{A}_i \bar{x}_i'] \bar{x} + [\alpha_i' \bar{B}_i \bar{x}_i'] \bar{y}}{[\alpha_i' \bar{B}_i] \bar{y} + \alpha_1' C_1} & \bar{y}' &= \frac{[z_i' \bar{B}_i \bar{y}_i'] \bar{y}}{[\alpha_i' \bar{B}_i] \bar{y} + \alpha_1' C_1} \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten erhält man wegen (11), ferner, wenn man die Werte aus der zweiten Zeile (13) in die Gleichungen der ersten Zeile einsetzt und die dadurch für beliebige Werte von  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  entstehenden Identitäten aufstellt, der Reihe nach:

$$\begin{aligned} [\alpha_i \bar{B}_i'] &= [\alpha_i B_i'] \cos \alpha' - [\alpha_i A_i'] \sin \alpha' = - \frac{[z_i A_i']}{\sin \alpha'} & [z_i' \bar{B}_i] &= - \frac{[\alpha_i' A_i]}{\sin \alpha} \\ [\alpha_i \bar{A}_i' \bar{x}_i] \sin \alpha &= [\alpha_i A_i' y_i] \cos \alpha' + [z_i B_i' y_i] \sin \alpha' \\ [\alpha_i \bar{A}_i' \bar{x}_i] \cos \alpha &= [\alpha_i A_i' x_i] \cos \alpha' + [z_i B_i' x_i] \sin \alpha' \quad \dots (14) \\ [\alpha_i \bar{B}_i' \bar{x}_i] &= \cos \alpha \{ - [\alpha_i A_i' x_i] \sin \alpha' + [z_i B_i' x_i] \cos \alpha' \} + \\ &\quad + \sin \alpha \{ - [z_i A_i' y_i] \sin \alpha' + [\alpha_i B_i' y_i] \cos \alpha' \} \end{aligned}$$

$$[\alpha_i \bar{B}_i' \bar{y}_i] [z_i' A_i] \sin \alpha' = - \alpha_1' C_1 [\alpha_i A_i'] \sin \alpha$$

$$[z_i' \bar{A}_i \bar{x}_i'] [z_i \bar{A}_i' \bar{x}_i] = [\alpha_i' \bar{B}_i \bar{y}_i'] [\alpha_i \bar{B}_i' \bar{y}_i] = C_1' C_1$$

$$[\alpha_i' \bar{B}_i \bar{x}_i'] [z_i \bar{A}_i' \bar{x}_i] [z_i \bar{B}_i' \bar{y}_i] = - C_1' C_1 [\alpha_i \bar{B}_i' \bar{x}_i]$$

Durch Nullsetzen der Nenner von (13) erhält man die Gleichungen der Fluchtlinien in den neuen Koordinatensystemen und damit den Abstand jeder Fluchtlinie vom Koordinatenursprung ihres Feldes.

$$\begin{aligned} p' &= - \frac{\alpha_1 C_1'}{[\alpha_i \bar{B}_i']} = \frac{\alpha_1 C_1' \sin \alpha'}{[\alpha_i A_i']} \quad \dots (15) \\ p &= - \frac{\alpha_1' C_1}{[z_i' \bar{B}_i]} = \frac{\alpha_1' C_1 \sin \alpha}{[\alpha_i' A_i]} \end{aligned}$$

Weiterhin suchen wir die zwei einander in  $E'$  und  $E$  entsprechenden Geraden  $\bar{x}' = \Delta'$ ,  $\bar{x} = \Delta$ , die auf der Fluchtlinie ihres Feldes senkrecht stehen. Durch Einsetzen dieser Geradengleichungen in die Formeln (13) erhält man wieder Identitäten für beliebige Werte von z. B.  $\bar{y}'$ , die nur bestehen können, wenn

$$\begin{aligned} \Delta' &= \frac{[z_i' \bar{B}_i \bar{x}_i']}{[\alpha_i' \bar{B}_i]} = - p \frac{[z_i' \bar{B}_i \bar{x}_i']}{\alpha_1' C_1} \quad \dots (16) \\ \Delta &= \frac{[\alpha_i \bar{B}_i' \bar{x}_i]}{[\alpha_i \bar{B}_i']} = - p' \frac{[\alpha_i \bar{B}_i' \bar{x}_i]}{\alpha_1 C_1'} \\ \Delta : \Delta' &= \alpha_1 C_1' : [\alpha_i \bar{A}_i' \bar{x}_i] \end{aligned}$$

In der Photogrammetrie sind diese beiden Geraden die Schnittgeraden der durch die optische Achse der Aufnahmekammer gelegten, auf der Gelände-Ebene senkrecht stehenden Ebene mit der Bildebene und mit der Horizontalebene (Kartenebene), auf die die Punkte der Geländeebene vertikal, parallel projiziert wurden. Sie sind die einander entsprechenden Bilder der Aufnahme-richtung. Die erwähnte Kartenebene kann für den Bereich eines Luftbild-Inhaltes immer mit der tatsächlichen Kartenebene identifiziert werden, für welche die Koordinaten der Grenzpunkte z. B. auf Grund der Gauß-Krüger-Projektion des Erdellipsoides errechnet wurden. Streng genommen besteht natürlich kein projektiver Zusammenhang zwischen dieser tatsächlichen Kartenebene und einem Luftbild des ebenen Geländes.

Die Schnittpunkte der Bilder der Aufnahme-richtung mit den Fluchtgeraden nennen wir:

$$\begin{aligned} \text{in } E' \dots G' \dots \bar{x}'_{G'} = \Delta' & \quad \bar{y}'_{G'} = p' \\ x'_{G'} = \Delta' \cdot \cos \alpha' - p' \cdot \sin \alpha' & \quad y'_{G'} = \Delta' \cdot \sin \alpha' + p' \cdot \cos \alpha' \end{aligned} \quad \dots (17)$$

$$\begin{aligned} \text{in } E \dots F \dots \bar{x}_F = \Delta & \quad \bar{y}_F = p \\ x_F = \Delta \cdot \cos \alpha - p \cdot \sin \alpha & \quad y_F = \Delta \cdot \sin \alpha + p \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Bekanntlich existieren in projektiven Ebenen zwei Paare von einander entsprechenden Punkten  $Z'_1, Z_1$  und  $Z'_2, Z_2$ , für welche die von ihnen getragenen Geradenbüschel nicht nur projektiv, sondern kongruent sind.  $Z'_1$  und  $Z'_2$  liegen symmetrisch zu  $g'$ , im Abstand  $a'$  von  $g'$ ,  $Z_1$  und  $Z_2$  symmetrisch zu  $g$ , im Abstand  $a$  von  $g$ . Die durch diese Punkte gehenden Bilder der Aufnahmeachse entsprechen einander, ebenso die durch diese Punkte gehenden Parallelen zu den Fluchtgeraden. Es kann daher  $a'$  und  $a$  aus der Forderung errechnet werden, daß einer, z. B. unter  $45^\circ$  gegen die  $\bar{x}'$ -Achse geneigten Geraden durch  $Z'_1$  eine ebenfalls unter  $45^\circ$  gegen die  $\bar{x}$ -Achse geneigte Gerade durch  $Z_1$  entspricht. Es schließen dann bereits drei Gerade durch  $Z'_1$  die gleichen Winkel ein, wie die ihnen entsprechenden Geraden durch  $Z_1$ . Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses schließt dann auch jede vierte Gerade durch  $Z'_1$  mit den drei genannten dieselben Winkel ein wie die korrespondierenden Geraden durch  $Z_1$ . Die einander entsprechenden Strahlenbüschel durch  $Z'$  und  $Z$  sind kongruent. Die Gleichungen der unter  $45^\circ$  geneigten Geraden sind

$$\bar{y}' = (a' + p') + \bar{x}' - \Delta' \quad \bar{y} = (a + p) + \bar{x} - \Delta$$

Diese Gleichungen, in die Formeln (13) eingesetzt, ergeben

$$a' = - \frac{[\alpha'_i \bar{A}_i \bar{x}'_i]}{[\alpha'_i \bar{B}_i]} \quad a = - \frac{[\alpha_i \bar{A}_i \bar{x}_i]}{[\alpha_i \bar{B}_i]} \quad \dots (18)$$

Ein Vergleich der Formeln (15), (16), (18) liefert die Beziehung

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{p'}{a} = \frac{a'}{p} \quad \dots (19)$$

Nun beziehen wir die Punkte des Feldes  $E'$  auf das Koordinatensystem: Ursprung  $G'$ , Fluchtgerade  $g'$  in Richtung der positiven  $\bar{x}'$ -Achse als positive  $X'$ -Achse, Bild der Aufnahme-richtung in Richtung der positiven  $\bar{y}'$ -Achse als positive  $Y'$ -Achse,

Analog werden die Punkte des Feldes  $E$  auf das Koordinatensystem  $F$ ,  $X$ ,  $Y$  bezogen. Es gilt dann

$$\bar{x}' = X' + \Delta' \quad \bar{y}' = Y' + p' \quad \bar{x} = X + \Delta \quad \bar{y} = Y + p \quad \dots \quad (20)$$

Damit werden, bei Beachtung der vorgenannten Beziehungen, die Formeln (13) zu

$$\begin{aligned} X &= -\frac{X'}{\frac{1}{a} Y'} & Y &= \frac{a'}{\frac{1}{a} Y'} \\ X' &= -\frac{X}{\frac{1}{a'} Y} & Y' &= \frac{a}{\frac{1}{a'} Y} \end{aligned} \quad \dots \quad (21)$$

Bekanntlich ist dies die einfachste Form der kollinearen Beziehung zwischen den Koordinaten der einander entsprechenden Punkte der Felder  $E'$  und  $E$ . Für die praktische Arbeit haben die Gleichungen aber den Nachteil, daß die in ihnen auftretenden Stücke fast immer große Werte annehmen, weil die Fluchtgeraden meist weit außerhalb des Bildes und des Kartenformates zu liegen kommen.

Legt man die beiden ebenen Felder  $E'$  (Bild) und  $E$  (Karte) in einer gemeinsamen Ebene so aufeinander, daß sich sowohl die erwähnten Punkte  $Z'_1$  und  $Z_1$  decken, als auch die von ihnen getragenen, einander entsprechenden und kongruenten Strahlenbüschel, so liegen je zwei einander entsprechende Punkte auf ein und demselben Strahl durch  $Z'_1 = Z_1$ . Die beiden Felder sind in perspektiver Lage. Man spricht von einer perspektiven Kollineation, von einer Zentral-Kollineation.  $Z'_1 = Z_1$  ist das Kollineationszentrum. Der Abstand des Kollineationszentrums von einer Fluchtgeraden ist entgegengesetzt gleich dem Abstand der Kollineationsachse von der anderen Fluchtgeraden. Kollineationsachse nennt man jene Gerade, die alle Punkte der gemeinsamen Ebene enthält, die in der vorliegenden Kollineation sich selbst entsprechen.

In Fig. 1 wurde  $Z'_1$  auf  $Z_1$  gelegt und  $E'$  gedreht, bis einander entsprechende Punkte auf dem gleichen Halbstrahl durch das Zentrum liegen. Kollineationsachse ist  $s'_1 = s_1$ . Ihr Abstand vom Zentrum ist  $(a - a')$ . Eine zweite perspektive Lage der beiden Felder ergibt sich, wenn man z. B.  $E'$  um  $180^\circ$  dreht (Fig. 2). Nun ist die Kollineationsachse  $s'_2 = s_2$ ; ihr Abstand vom Zentrum ist  $(a + a')$ .  $E'$  kann, mit der Zeichenfläche nach unten, auch so auf  $E$  gelegt werden, daß  $Z'_2$  und  $Z_2$  zusammenfallen, und ebenso die von diesen Punkten getragenen, kongruenten Strahlenbüschel. In Fig. 3 liegen einander entsprechende Punkte wieder auf denselben Halbstrahlen, in Fig. 4 auf einander entgegengesetzten.

Dies sind bekanntlich die vier Möglichkeiten, zwei projektive Felder  $E'$  und  $E$  in einer Ebene in perspektive Lage zu bringen. Das Doppelverhältnis  $(ZSP'P) = ZP':SP' / ZP:SP$  einer Zentralkollineation ist für alle Paare einander entsprechender Punkte  $P', P$  konstant und heißt die charakteristische Konstante ( $K$ ) der Zentralkollineation. Wie leicht zu ersehen, beträgt sie für Fig. 1 und 4:  $+ a'/a$ , für Fig. 2 und 3:  $- a'/a$ .  $S$  ist der Schnittpunkt des Kollineationsstrahls  $P'P$  mit der Kollineationsachse.

Klappt man z. B.  $E'$  um die jeweilige Kollineationsachse aus der gemeinsamen Ebene heraus, so bleiben die beiden Felder  $E'$  und  $E$  für jeden beliebigen Aufklapp-

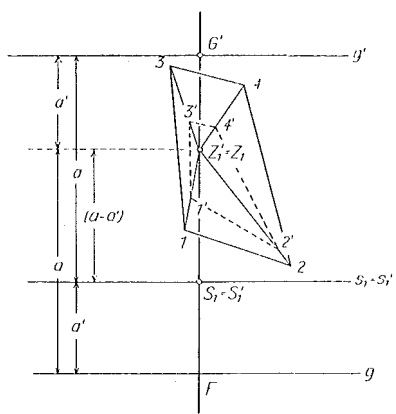


Fig 1.

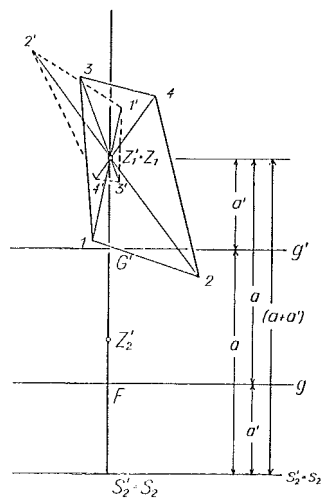


Fig 2

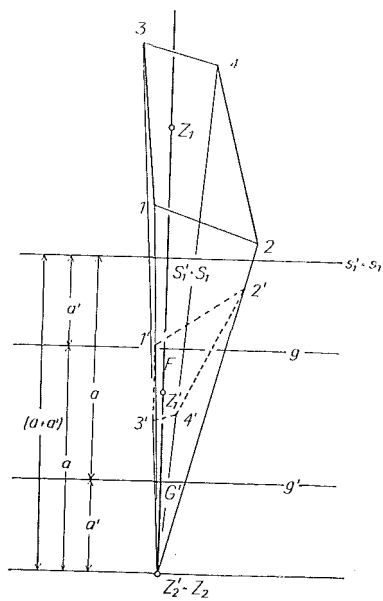


Fig 3

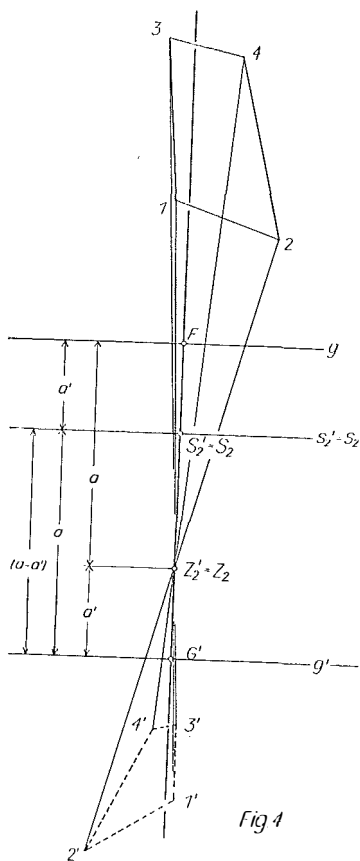


Fig 4



winkel  $\alpha$  in perspektiver Lage, weil die Kollineationsachse als Träger aller sich selbst entsprechenden Punkte, aller Doppelpunkte, unverändert bleibt. Aus den Perspektiven der Fig. 1 u. 3 ergibt sich die der Fig. 5, wie sie bei Verwendung eines Projektionsgerätes entsteht. Fig. 6, die aus Fig. 2 oder 4 hervorgeht, zeigt die Verhältnisse bei Benützung eines Entzerrungsgerätes, eines Umformgerätes, einer kartographischen Kamera.  $Z_1', Z_1$  und  $Z_2', Z_2$ , die Träger kongruenter Strahlenbüschel, sind die beiden Paare einander entsprechender Punkte, die in der Photogrammetrie als „Winkeltreue Punkte“ bekannt sind.

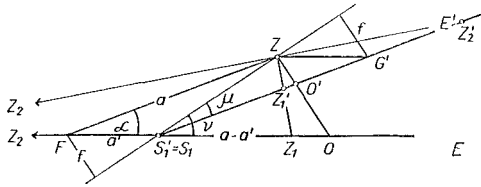


Fig 5

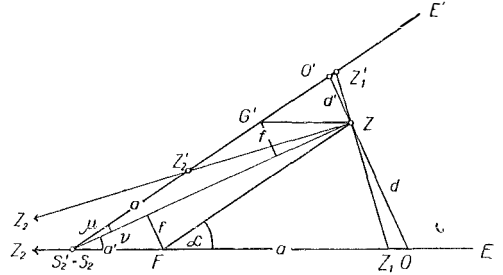


Fig 6

Die unendliche Mannigfaltigkeit der Aufklappwinkel  $\alpha$  wird auf einen einzigen eingeschränkt durch den Umstand, daß zwecks Scharfabbildung die Linsengleichung des benützten Objectives erfüllt werden muß.

$$\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \quad f(d' + d) = d' \cdot d \quad \dots (22)$$

Die Scheimpflug-Bedingung, daß die Hauptebene des Objectives die Kollineationsachse enthalten muß, stellt dagegen keine zusätzliche Bedingung für die gegenseitige Lage von  $E'$  zu  $E$  dar.

Weil  $G'$  das Bild eines unendlich fernen Punktes von  $E$  und  $F$  das Bild eines unendlich fernen Punktes von  $E'$  ist, und weil sich unendlich ferne Punkte in der Brennebene abbilden, muß das Lot von  $G'$  und von  $F$  auf die Hauptebene des Objectivs ( $S_1 Z, S_2 Z$ ) gleich der Brennweite  $f$  sein. Daraus ergibt sich für die Kippungswinkel

$$\sin \nu = \frac{f}{a'} \quad \sin \mu = \frac{f}{a} \quad \dots (23)$$

$$\alpha = \nu + \mu$$

Die Bild- und die Gegenstandsweite werden aus den Dreiecken  $G' O' Z$  und  $F Z O$  gerechnet.

$$d' = ZO' = a' \frac{\sin \alpha}{\cos \mu} \quad d = ZO = a \frac{\sin \alpha}{\cos \nu} \quad \dots (24)$$

Ebenso ergibt sich zum Eintragen der Punkte  $O'$  und  $O$  in die Felder  $E'$  und  $E$

$$Y'_{O'} = G' O' = a' \frac{\cos \nu}{\cos \mu} = a' \cdot \frac{d'}{d}$$

$$Y_O = F O = a \frac{\cos \mu}{\cos \nu} = a' \cdot \frac{d}{d'} \quad \dots (25)$$

Da diese Überlegungen nur gegenseitige Lageverhältnisse betreffen, ist es gleichgültig, welches Konstruktionselement als fix betrachtet wird. Erforderlich wäre z. B. eine Kamera mit fester, optischer Achse, längs der das Objektiv und der Originalhalter verschiebbar sind. Die Durchstoßpunkte der optischen Achse mit der Ebene des Originalhalters ( $U'$ ) und mit der Mattscheibe ( $U$ ) sind durch aufeinander senkrecht stehende Randstriche (Randmarken) markiert. Der Originalhalter (Bildträger) ist um eine zur optischen Achse senkrechte Achse durch  $U'$  kippbar und der Kippwinkel  $\mu$  an einem Teilkreis einstellbar. Analog ist auch die Mattscheibe um eine mit Teilkreis versehene Achse durch  $U$  kippbar, die zur Kippachse des Originalhalters parallel liegt. Die Mattscheibe trägt ein Koordinatengitter, dessen Ursprung  $U$  und dessen  $x$ -Achse die Kippachse ist.

Vor Ausführung der Entzerrung rechnet man sich nach (17), (20), (25) die Koordinaten von  $O'$  und  $O$

$$\begin{aligned} x'_{O'} &= x'_{G'} - Y'_{O'} \cdot \sin \kappa' & y'_{O'} &= y'_{G'} + Y'_{O'} \cos \kappa' \\ x_0 &= x_F - Y_0 \cdot \sin \kappa & y_0 &= y_F + Y_0 \cos \kappa \end{aligned} \quad \dots (26)$$

und trägt  $O'$  in das Feld  $E'$  ein. An den Rändern markiert man in beliebiger Entfernung  $k$  von  $O'$  eine Parallele zu  $g'$  durch  $O'$  mittels der Werte  $\pm k \cdot \cos \kappa'$ ,  $\pm k \cdot \sin \kappa'$ . Nun wird das Bild, das Feld  $E'$  so in den Originalhalter eingelegt, daß  $O'$  auf  $U'$  und die Parallele zu  $g'$  durch  $O'$  auf die Kippachse zu liegen kommen. Nach Einstellen der Kippwinkel  $\mu$  und  $\nu$  an den Teilkreisen kann die Entzerrung schon photographiert werden. Es entfällt das Auftragen der vier Karten-Paßpunkte. Zur Kontrolle wird man jedoch vorher auf dem erwähnten Koordinatengitter der Mattscheibe prüfen, ob die vier Paßpunkte in ihre Soll-Koordinaten  $x - x_0$ ,  $y - y_0$  projiziert werden.

Auf einer solchen Kamera mit verhältnismäßig wenig Bewegungseinrichtungen können also nach kurzer, leichter Rechnung präzise Entzerrungen durchgeführt werden.

Bekanntlich ist es unmöglich, eine Kamera oder ein Entzerrungsgerät zur Umwandlung eines beliebigen Viereckes in jedes andere zu bauen. Abgesehen von der Einschränkung, die schon durch die Größe des Original-(Bild)Halters und der Mattscheibe (des Kartentisches) gegeben ist, können in jedem Gerät nur Minimal- und Maximalwerte von  $d'$  und  $d$  eingestellt werden.

Formel (23) zeigt, daß jeweils ein Objektiv zur Verfügung stehen muß, dessen Brennweite kleiner als  $a'$  und kleiner als  $a$  ist.

Meist wird es gelingen, durch Austausch des Objektivs gegen ein solches geeigneter Brennweite die Entzerrung auf dem zur Verfügung stehenden Gerät durchzuführen. Ansonsten wird zusätzlich eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Bildes (Originals) oder der Karte (Sollfigur) notwendig. Eine ganz wesentliche Vereinfachung der Berechnung der für die Entzerrung charakteristischen Größen ergibt sich, wenn die Soll-Figur ein Rechteck ist. Dieser Fall tritt ein, wenn z. B. Neuvermessungs-Mappen besonders starken und in den einzelnen Richtungen recht verschiedenen Papiereingang erlitten haben. Aber auch für die Umprojektion von Neuvermessungs-Mappen im Kataster-System auf solche im Gauß-Krüger-System kann das angegebene Entzerrungsverfahren mit Vorteil angewendet werden, wenn für die Katasterblattecken verlässliche Werte im Gauß-Krüger-System zu errechnen sind.

Durch präzise Photo-Montage könnten dann Druck-Platten für die Mappen-Blätter im Gauß-Krüger-Blattschnitt hergestellt werden.

Soll schließlich ein Parallelogramm in ein anderes, z. B. in ein Rechteck umgeformt werden, so wird der Umweg über eine Doppel-Entzerrung erspart, wenn — wie z. B. im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien — eine Kamera zur Verfügung steht, auf der während der Belichtung automatisch ein Lichtschlitz und gleichzeitig die Photoplatte in einstellbaren Richtungen parallel verschoben werden. Ein Zahlenbeispiel soll die verhältnismäßig einfache und kurze Rechenarbeit zeigen:

|       | Gegeben  |          | Gemessen |          |
|-------|----------|----------|----------|----------|
|       | $x$ m    | $y$ m    | $x'$ cm  | $y'$ cm  |
| $P_1$ | 0        | 0        | 0        | 0        |
| $P_2$ | + 162·34 | — 451·58 | + 30·175 | — 23·126 |
| $P_3$ | + 437·53 | + 202·92 | + 17·482 | + 17·344 |
| $P_4$ | + 745·61 | — 78·99  | + 43·217 | + 11·852 |

Für die spätere Berechnung der auf dem Entzerrungsgerät einzustellenden Daten empfiehlt es sich, mit den  $x, y$  im Kartenmaßstab — z. B. 1 : 1000 zu rechnen.

Nach (3) und (4) wird:

| $i$ | $A_i'$ cm | $B_i'$ cm | $A_i$ cm | $B_i$ cm | $2 e_i'$       | $2 e_i$        |
|-----|-----------|-----------|----------|----------|----------------|----------------|
| 1   | — 40·470  | — 12·693  | — 65·450 | + 27·519 | — 971·785 494  | — 2792·171 729 |
| 2   | + 17·344  | — 17·482  | + 20·292 | — 43·753 | + 542·358 984  | + 1858·596 759 |
| 3   | + 23·126  | + 30·175  | + 45·158 | + 16·234 | + 1357·070 442 | + 3238·793 272 |
|     | 0         | 0         | 0        | 0        | + 927·643 932  | + 2305·218 302 |

| $i$ | $\alpha_i$  | $\alpha_i'$ |
|-----|-------------|-------------|
| 1   | 2·873 238 7 | 0·348 039 3 |
| 2   | 3·426 875 6 | 0·291 811 0 |
| 3   | 2·386 606 6 | 0·419 005 0 |

$$\alpha_1 C_1' = 2665·342$$

$$\alpha_1' C_1 = 802·306$$

$$[\alpha_i A_i'] = - 1·6517 \quad [\alpha_i A_i' x_i] = + 3 379·743 353 \quad [x_i' A_i x_i'] = + 509·443 097$$

$$[\alpha_i B_i'] = - 24·3628 \quad [\alpha_i B_i' x_i] = + 2 178·353 342 \quad [\alpha_i' B_i x_i'] = - 266·361 836$$

$$[\alpha_i' A_i] = + 2·0637 \quad [\alpha_i A_i' y_i] = - 1 564·034 532 \quad [\alpha_i' A_i y_i'] = + 191·236 778$$

$$[\alpha_i' B_i] = + 3·6122 \quad [\alpha_i B_i' y_i] = + 4 166·719 294 \quad [\alpha_i' B_i y_i'] = + 413·246 656$$

Damit ergeben sich die Transformationsformeln (5):

$$\frac{x \text{ cm}}{1000} = \frac{+ 1·268 034 \cdot x' \text{ cm} + 0·817 288 y' \text{ cm}}{1 - 0·000 620 x' \text{ cm} - 0·009 141 y' \text{ cm}}$$

$$\frac{y \text{ cm}}{1000} = \frac{- 0·586 804 x' \text{ cm} + 1·563 296 y' \text{ cm}}{1 - 0·000 620 x' \text{ cm} - 0·009 141 y' \text{ cm}}$$

Zur Berechnung der Einstelldaten erhält man mit den vorstehenden Ergebnissen unmittelbar aus

$$\begin{array}{ll}
 (9) & \alpha' = - 30^{\circ} 52' 37'' & \alpha = - 290^{\circ} 43' 59'' \\
 (15) & p' = + 109 \cdot 154 \text{ cm} & p = - 192 \cdot 880 \text{ cm} \\
 (14), (16) & \Delta' = - 2 \cdot 249 \text{ cm} & \Delta = - 3 \cdot 125 \text{ cm} \\
 (14), (18) & a' = - 138 \cdot 425 \text{ cm} & a = + 150 \cdot 794 \text{ cm}
 \end{array}$$

Für das zur Verfügung stehende Objektiv, dessen Brennweite nicht größer als 138 cm sein darf, geben dann die einfachen Formeln (23) bis (26) die zur präzisen Entzerrung erforderlichen Größen.

#### L i t e r a t u r:

- [1] W. Wunderlich: „Zur rechnerischen Durchführung des Vierpunktverfahrens“, Ö. Z. f. V. 1957, Nr. 1.  
 [2] E. Müller und E. Kruppa: Lehrbuch der darstellenden Geometrie.  
 [3] K. Killian: „Beitrag zur numerischen und graphischen Auswertung von Luftbildern“, Ö. Z. f. V. 1957, Nr. 4.

## Über eine allgemeine Äquivalenztheorie bei der trigonometrischen Einzelpunkteinschaltung

Von L. Starkl, Wels

Im XLV. Jahrgang (1957), Nr. 2, 3 und 4 dieser Zeitschrift wurde vom Verfasser „über vektographische vermittelnde Koordinatenausgleichung bei der Einzelpunkteinschaltung in gezwängte Triangulationsnetze“ berichtet. Die vorliegende Arbeit, insbesondere die laufende Formelbezeichnung, nimmt Bezug auf die dort mitgeteilten Entwicklungen.

Man bezeichnet zwei verschiedene Beobachtungsreihen als „gleichwertig“, wenn sie für die Unbekannten und beliebige Funktionen der Unbekannten die gleichen Werte und Gewichte liefern. Kann eine Beobachtungsreihe mit  $n$  Unbekannten durch eine „gleichwertige“ Beobachtungsreihe von gerade  $n$  notwendigen Beobachtungen ersetzt werden, so besteht zwischen den beiden Beobachtungsreihen „totale Äquivalenz“. Besteht die „gleichwertige“ Beobachtungsreihe hingegen aus allgemein  $s$  fingierten Beobachtungen, so besteht zwischen den beiden Beobachtungsreihen „partielle Äquivalenz“. Bei der triangulatorischen Bestimmung eines Neupunktes ist es praktisch unwesentlich, daß eine „gleichwertige“ Beobachtungsreihe die gleichen Werte für die Unbekannten, d. h. für die Koordinatenverschiebungen  $dx$  und  $dy$  ergibt. Von bedeutend größerem Interesse ist die Untersuchung „gleichwertiger“ Beobachtungsreihen in bezug auf Form und Lage der mittleren Fehlerellipse.

Im allgemeinen kann ein Neupunkt  $P_0$  durch mehrfach unendlich viele Kombinationen von Vorwärts- und Rückwärtsrichtungen mit der gleichen Genauigkeit bestimmt werden, wie das durch die zu der Ausgleichung führende Bestimmung geschehen ist.

Form und Lage der mittleren Fehlerellipse sind lediglich durch das der Punktbestimmung zugrunde gelegte Festpunktsystem und durch die Wahl des Neupunktes