Paper-ID: VGI_195909

Zur Frage des Freiluftgeoides und der wahren Freiluftreduktion

Karl Ledersteger [1]

[1] *Technische Hochschule Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **47** (2), S. 40–46

1959

BibTEX:

```
@ARTICLE{Ledersteger_VGI_195909,
Title = {Zur Frage des Freiluftgeoides und der wahren Freiluftreduktion},
Author = {Ledersteger, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {40--46},
Number = {2},
Year = {1959},
Volume = {47}
}
```

Zur Frage des Freiluftgeoides und der wahren Freiluftreduktion

Von K. *Ledersteger*, Wien

(Veröffentlichung der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung)

Vor zwei Jahren [1]) habe ich die Frage nach einem künstlichen Geoid und seiner zugehörigen Schwereverteilung aufgeworfen, für welches nicht nur das Potential im Außenraum einer die ganze Erdmasse umschließenden Niveaufläche völlig ungeändert bleibt, sondern auch der indirekte Effekt unabhängig von einer bestimmten Annahme über die notwendige Umgruppierung der Erdmasse mit möglichst großer Schärfe berechnet werden kann. Der Grundgedanke des Verfahrens besteht darin, daß zuerst die beobachteten Schwerewerte ganz im Sinne *Brillouins* [2]) in freier Luft nach oben auf eine Niveaufläche in mindestens 10 km Höhe reduziert werden. Nach dem Stockesschen Umkehrproblem der Potentialtheorie ist dann aber eine Massenanordnung denkbar, für welche nicht nur diese Niveaufläche und das Außenraumpotential erhalten bleiben, sondern überdies auch die neue Niveaufläche vom Potentialwert des aktuellen Geoides, das sogenannte „Freiluftgeoid", eine äußere Niveaufläche oder Rand der umgruppierten Erdmasse wird. Man hat daher bloß mit der vorgegebenen Potentialdifferenz abermals in freier Luft zurückzugehen, wodurch gleichzeitig der Höhenunterschied des Freiluftgeoides gegenüber dem aktuellen Geoid und die zugehörige Schwereverteilung gewonnen werden. Hin- und Rückgang brauchen gar nicht wirklich durchgeführt zu werden. Vielmehr handelt es sich dabei um ein Gedankenexperiment, bei dem sich die Fehler der Brillouinschen Reduktion fast vollständig kompensieren.

Gegen diesen Vorschlag hat man verschiedentlich den Einwand erhoben, daß auch die „wahre Freiluftreduktion" nicht absolut hypothesenfrei ist und daß die unvermeidlichen Fehler im Vertikalgradienten der Schwere trotz des Hin- und Rückganges nicht völlig eliminiert werden. Beides ist natürlich richtig und wurde von mir auch gar nicht behauptet. Tatsächlich sind sowohl das Geoid wie auch die Schar der äußeren Niveauflächen des rotierenden Erdkörpers von den unbekannten Massenunregelmäßigkeiten in der Erdkruste abhängig, deren Einfluß unmöglich ohne gewisse hypothetische Annahmen erfaßt werden kann. Hat man aber nicht bloß praktisch-technische Ziele im Auge, sondern sieht in der Geodäsie, wie es eigentlich selbstverständlich ist, eine reine Naturwissenschaft, so können wir zur Beschreibung des irdischen Schwerefeldes und für dessen Theorie die Niveauflächen nicht entbehren. Unsere Aufgabe kann es daher nur sein, die Hypothesen auf ein Minimum zu beschränken und ihren möglichen Fehlereinfluß abzuschätzen. In diesem Sinne soll in der folgenden Untersuchung die Frage des künstlichen Freiluftgeoides nochmals aufgegriffen werden.

Bekanntlich läßt sich für jeden Punkt der physischen Erdoberfläche aus einem Präzisionsnivellement in Verbindung mit Schweremessungen völlig hypothesenfrei

[1]) K. *Ledersteger:* „Eine Modifikation der Freiluftreduktion", Festschrift C. F. *Baeschlin*, Zürich, 1957, Seite 155—164.

[2]) M. *Brillouin*, Revue général des sciences pures et appliquées, 1900, S. 875—882.

die Potentialdifferenz $\triangle W_P$ gegenüber dem Geoid angeben. Ist dann $\triangle W$ die Potentialdifferenz zwischen dem Geoid und der äußeren Niveaufläche, für welche wir mindestens 10^{10} mgal . m wählen müssen, so gilt:

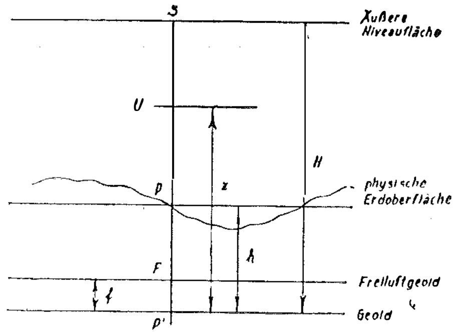
$$\triangle W = \triangle W_P + \int_h^H g_U \, dz, \qquad \ldots (1)$$

wobei selbstverständlich die Höhe H eine Funktion der geographischen Breite und des Störpotentiales ist. Der Vertikalgradient der Schwere in der Lotlinie von P zerfällt in einen normalen und einen Störungsanteil:

$$-\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right) = \nu_n + \nu_s = \nu \qquad \ldots (2)$$

mit

$$\nu_n = + [0{,}30855 + 0{,}00022 \cos 2\varphi - 0{,}000072 \, h_{km}] \text{ mgal/m} \qquad \ldots (3)$$



und die Schwere im Punkt S der äußeren Niveaufläche wird:

$$g_S = g_P + \int_h^H \frac{\partial g}{\partial z} \, dz = g_P - \int_h^H \nu dz. \qquad \ldots (4)$$

Geht man mit dem Gradienten ν' der neuen, unbekannten Massenanordnung zurück, so findet man in U den Schwerewert

$$g_U' = g_S + \int_U^S \nu' \, dz$$

und erhält die gesuchte Höhe f des Freiluftgeoides über dem wirklichen Geoid als untere Integralgrenze in der Potentialdifferenz

$$\triangle W = \int_f^H g_U' \, dz. \qquad \ldots (5)$$

Aus der Gleichsetzung von (1) mit (5) folgt die Grundgleichung

$$\triangle W_P + \int_h^H g_U \, dz - \int_f^H g_U' \, dz = 0, \qquad \ldots (6)$$

während sich für die Schwere auf dem Freiluftgeoid ergibt:

$$g_F = g_S + \int_f^H \nu' \, dz = g_P - \int_h^H \nu \, dz + \int_f^H \nu' \, dz. \qquad \ldots (7)$$

Die Abhängigkeit der Erhebungen f des Freiluftgeoides über das aktuelle Geoid von der gewählten Höhe H erscheint auf den ersten Blick verwunderlich [3]). Denn diese Erhebungen können allein durch die Kontinentalmassen bedingt sein. Die Wirkung der Kontinentalmassen äußert sich aber im Störungsanteil ν_s des Vertikalgradienten. Da nun oberhalb der gewählten äußeren Niveaufläche wegen der Unveränderlichkeit des Außenraumpotentiales $\nu' = \nu$ sein muß, so würde bei zu geringer Höhe H der Vertikalgradient ν' für den Rückgang noch vom Störpotential beeinflußt sein und wäre somit auch gar nicht genügend exakt angebbar. Man erzielt aber strenge Eindeutigkeit des Freiluftgeoides, wenn man die äußere Niveaufläche so hoch wählt, daß dort bereits $\nu_s = 0$ gesetzt werden darf und demnach der Vertikalgradient ν' der neuen Massenanordnung mit dem normalen Freiluftgradienten ν_n des tatsächlichen Erdkörpers übereinstimmt. Dann bleibt als einzige Unsicherheit der mögliche Fehler im Freiluftgradienten (3), der aber recht gering ist, wie weiter unten gezeigt wird. Der Sachverhalt kann auch so beleuchtet werden: könnte man die Schwerewerte g_S in der äußeren Niveaufläche beobachten, so würde man für die Schwereabnahme nach oben den Freiluftgradienten ν_n ansetzen, d. h. man würde die Topographie der physischen Erdoberfläche genau so vernachlässigen, wie über den Weltmeeren gewöhnlich die Topographie des Meeresbodens vernachlässigt wird. Dies bedeutet natürlich eine geringe Verfälschung des Außenraumpotentiales, solange die Höhe H noch nicht der obigen Bedingung $\nu_s = 0$ genügt.

Es liege die Station P in ideal ebenem Gelände. Dann gibt es keine Geländereduktion und (1) kann in der Form

$$\triangle W = \triangle W_P + G\,(H - h) = \triangle W_P + [g_P - 0{,}1543\,(H - h)]\,(H - h)$$

geschrieben werden, worin G den Durchschnittswert der Schwere in der Lotlinie von P zwischen P und S bedeutet. Lediglich bequemlichkeitshalber wurde dabei der normale Freiluftgradient auf das Hauptglied 0,3086 mgal/m beschränkt. Ebenso findet man

$$g_S = g_P - 0{,}3086\,(H - h)$$

und damit auf dem Rückweg

$$\triangle W = [g_S + 0{,}1543\,(H - f)]\,(H - f),$$

also schließlich aus der Differenz

$$\triangle W_P - g_P\,(h - f) - 0{,}1543\,(h - f)^2 = 0 \qquad \ldots (8)$$

die gesuchte Höhe f des Freiluftgeoides

$$f = h - \frac{1}{g_P}\triangle W_P + \frac{1}{g_P}\,0{,}1543\,(h - f)^2. \qquad \ldots (8\,\mathrm{a})$$

Es ist unschwer zu erkennen, daß bei dieser Ableitung die innerkrustalen Störmassen und der durch sie bewirkte Störanteil ν_s im Vertikalgradienten unberücksichtigt blieben und stillschweigend mit der homogenen Bouguerschen Platte der Dichte 2,67 operiert wurde. Wohl ist dank der empirisch gegebenen Potentialdifferenz

---

[3]) K. *Ledersteger*: „Theoretischer Versuch einer exakten Lösung des gesamten Problemes der Erdfigur“, Sondernummer 2 der Schweiz. ZfV, Zürich, 1957.

$\triangle W_P$ das zweite Glied von einer Annahme für die Dichte der Platte unabhängig, selbstverständlich nicht aber auch die Meereshöhe h.

Wäre $\triangle W_P$ nicht empirisch gegeben, so müßte man diese Potentialdifferenz wie in der eingangs zitierten Arbeit abermals unter Zugrundelegung der Dichte 2,67 theoretisch aus

$$\triangle W_P = (g_P + 0{,}1543\, h - 0{,}1119\, h)\, h = g_P h + 0{,}0424\, h^2 \quad \ldots \quad (9)$$

berechnen, was in (8a) eingesetzt die Formel

$$f = \frac{1}{g_P}\,[0{,}1119\, h^2 - 0{,}3086\, hf + 0{,}1543 f^2] \quad \ldots \quad (9\text{a})$$

liefert. Berechnet man für bestimmte vorgegebene Werte von $\triangle W_P$ z. B. mit $g_P =$ $= 980.000$ mgal und $\vartheta = 2{,}67$ aus

$$h = \triangle W_P : [g_P + 0{,}1543\, h - 0{,}0419\, \vartheta h]$$

die genäherte Meereshöhe der Station und anschließend aus (8a) die Höhe f des Freiluftgeoides, so erhält man folgende kleine Tabelle, in der auch die einer Dichtezunahme um $d\vartheta = +\,0{,}1$ entsprechende Zunahme dh ausgewiesen ist.

$\triangle W_P$	10^8	10^9	8823.10^6 mgal. m
h	102,040 m	1020,363 m	8999,556 m
dh	+ 0,000 m	+ 0,005 m	+ 0,347 m
f	+ 0,001 m	+ 0,119 m	+ 9,219 m

Die Formel (8a) zeigt auch den Einfluß eines Fehlers im Freiluftgradienten. Ist dieser z. B. $(0{,}3086 + \mu)$ mgal/m, so ändert sich f um

$$\frac{1}{g_P}\,\frac{\mu}{2}\,(h - f)^2 \approx \frac{\mu}{2\,.\,10^6}\, h^2,$$

was für $h = 9000$ m maximal $40\,\mu$ m ausmacht. Für den schon recht beträchtlichen Fehler $\mu = 0{,}001$ mgal/m wäre dies aber erst 4 cm.

Das Freiluftgeoid fällt über den Meeren mit dem aktuellen Geoid zusammen, falls wie üblich mit dem normalen Freiluftgradienten gerechnet wird, was auf eine Vernachlässigung des störenden Einflusses der Topographie des Meeresgrundes hinausläuft.

Auf dem Festland erhebt sich das Freiluftgeoid positiv über das Geoid, und zwar bei einer Meereshöhe von 1000 m erst um 114 mm. Die maximale Erhebung beträgt etwa 9 m im Himalaya. Die Unsicherheit in der mittleren Krustendichte wirkt sich in den Höhen des Freiluftgeoides genau so aus wie in den Meereshöhen; sie dürfte selbst in Extremfällen kaum 0,5 m übersteigen. Beschränkt man (9a) auf das Hauptglied und führt für g_P den Mittelwert $\gamma_{45} = 980\,629$ mgal ein, so findet man die in Anbetracht der soeben abgeschätzten Ungenauigkeit in h meistens ausreichende Näherung

$$f = \frac{1}{\gamma_{45}}\, 0{,}1119\, h^2 = 0{,}1141\, (h_{\text{km}})^2 \text{ m}\,. \quad \ldots \quad (10)$$

Schließlich findet man für die Schwere auf dem Freiluftgeoid

$$g_F = g_S + 0{,}3086\,(H - f) = g_P + 0{,}3086\,(h - f). \quad \ldots \quad (11)$$

Dieser Wert ist also völlig unabhängig von der Dichte der Bouguerschen Platte und vom Fehler in der berechneten orthometrischen Meereshöhe.

Nunmehr schreiten wir an die Berücksichtigung der topographischen Reduktion, die bekanntlich immer im Sinne einer „Verbesserung" der Wirklichkeit auf den Idealfall der Bouguerschen Platte angesetzt wird

$$g_U + T_U = g''_U .$$

Damit wird:

$$\triangle W = \int_0^h g_U\, dz + \int_h^H g''_U\, dz - \int_h^H T_U\, dz = \triangle W_P + \int_h^H g''_U\, dz - \int_h^H T_U\, dz$$

und wegen

$$g''_U = g''_P - 0{,}3086\,(z - h) = g_P + T_P - 0{,}3086\,(z - h)$$

weiter

$$\triangle W = \triangle W_P + g_P(H - h) + T_P(H - h) - 0{,}1543\,(H - h)^2 - \int_h^H T_U dz, \quad \ldots \quad (12)$$

während sich für die Schwerkraft im Punkte S der äußeren Niveaufläche

$$g_S = g_P + T_P - T_S - 0{,}3086\,(H - h) \quad \ldots \quad (13)$$

ergibt. Der Rückgang auf das Freiluftgeoid liefert

$$\triangle W = [g_S + 0{,}1543\,(H - f)]\,(H - f). \quad \ldots \quad (12a)$$

Die Differenz der beiden Gleichungen (12)

$$\triangle W_P - g_P\,(h - f) - T_P\,(h - f) + T_S\,(H - f) - 0{,}1543\,(h - f)^2 - \int_h^H T_U\, dz = 0 \quad \ldots \quad (14)$$

ist die erweiterte Bestimmungsgleichung für die Höhe f des Freiluftgeoides

$$f = h - \frac{1}{g_P} \triangle W_P + \frac{1}{g_P} 0{,}1543\,(h - f)^2 + \frac{1}{g_P} T_P\,(h - f) - \frac{1}{g_P} T_S\,(H - f) + + \frac{1}{g_P} \int_h^H T_U\, dz . \quad \ldots \quad (14a)$$

Ähnlich (11) findet man für die Schwere auf dem Freiluftgeoid die Gleichung

$$g_F = g_P + 0{,}3086\,(h - f) + T_P - T_S . \quad \ldots \quad (15)$$

Die beiden letzten Gleichungen geben die vollständige Lösung des Problemes. Die topographischen Korrektionen stellen den Störungsanteil v_s im Vertikalgradienten der Schwere dar. Jetzt erkennt man auch mit voller Deutlichkeit die Notwendigkeit einer sehr großen Höhe der äußeren Niveaufläche. Wollte man etwa H der Meereshöhe h des Gipfels des Himalayagebirges gleichsetzen, so würde wegen $P = S$ die gesamte topographische Korrektion in (14a) und (15) verschwinden. Oberhalb dieser Niveaufläche wäre aber der Vertikalgradient v noch gestört, d. h. es düfte für den Rückgang v' noch nicht mit dem normalen Freiluftgradienten identifiziert werden. Wollte man dies dennoch machen, so würde dadurch das äußere Potentialfeld zusammen mit dem Freiluftgeoid verfälscht. H muß also so groß gewählt werden, daß T_S unterdrückt werden kann. Damit verschwindet jedoch noch nicht das Integral

$$\int_h^H T_U\, dz = \overline{T}_U (H - h). \qquad \ldots (16)$$

Bedenkt man aber, daß für Überschußmassen die in P positive Korrektion T nach oben abnimmt, in einer gewissen Höhe Null wird, sodann ein negatives Extremum erreicht, um schließlich im Absolutbetrag rasch abzunehmen. daß andererseits für Defizitmassen die in P abermals positive Korrektionen zuerst anwächst, um dann gleichfalls rasch zu sinken, so wird man den im allgemeinen zwar endlichen Grenzwert des Integrales wegen seiner Zusammensetzung aus negativen und positiven Massenwirkungen als hinreichend klein annehmen dürfen. Man wird also, abgesehen vielleicht von wenigen Extremfällen, schon im Hinblick auf die notwendige Bildung repräsentativer Mittelwerte von g_F auch das letzte Glied in (14a) vernachlässigen dürfen.

Somit bleiben die definitiven Formeln:

$$\left.\begin{aligned} f &= h - \frac{1}{g_P}\left[\triangle W_P - \frac{\nu_n}{2}(h-f)^2 - T_P(h-f)\right] \\ g_F &= g_P + \nu_n (h-f) + T_P . \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (17)$$

Diese verbesserte Lösung unterscheidet sich von der früheren durch die Verwendung der empirisch bestimmbaren Potentialdifferenz $\triangle W_P$ und die exaktere Begründung für die Verwendung des Freiluftgradienten (3) auf dem Rückweg. Die neue Darstellung läßt auch klarer die noch vorhandenen hypothetischen Elemente erkennen. Es sind dies folgende:

1. Die innerkrustalen Massenstörungen in der Schicht zwischen dem Geoid und dem Niveau der Beobachtungsstation P werden vernachlässigt, ebenso der störende Einfluß der Topographie des Meeresbodens. Mithin bleibt die Störung ν_s im Vertikalgradienten bloß auf die Wirkung der Topographie der Kontinentalmassen beschränkt.

2. Die Höhe f ist mit dem Fehler der orthometrischen Höhe h der Station behaftet. Dieser Fehler kann aber nur einige Dezimeter erreichen.

3. Eine weitere Verfälschung erleidet f durch die Unterdrückung des Integrales (16). Aber selbst wenn dieser Fehler 1 m betragen sollte, so bewirkt dies bloß einen Fehler von 0,3 mgal in g_F.

4. Die topographische Korrektion T_P muß ebenso wie die Meereshöhe h mit der mittleren Krustendichte 2,67 berechnet werden. Hingegen sind die Schwerewerte g_F auf dem Freiluftgeoid völlig unabhängig von dem Fehler in der orthometrischen Meereshöhe und von der angenommenen Dichte der Bouguerschen Platte.

Die verbesserte Freiluftreduktion dürfte an Einfachheit der Berechnung und in der Sicherheit der reduzierten Schwerewerte und des indirekten Effektes der isostatischen Reduktionsweise weit überlegen sein, wozu sich noch der große Vorteil einer völligen Unabhängigkeit von bestimmten Massenverschiebungen und der strengen Erhaltung des Außenraumpotentiales gesellt. Das Freiluftgeoid ist ein künstliches Geoid, für welches die Restfunktion nicht verschwindet, dessen Niveausphäroid aber der Reihe der „benachbarten Geoide“ angehört, welche durch die Konstanz der Rotationsgeschwindigkeit und des Potentialwertes des aktuellen Geoides ausgezeichnet ist.

Abschließend sei noch scharf betont, daß das vorgeschlagene Verfahren nicht als einfache analytische Fortsetzung des Außenraumpotentiales in den Innenraum gedeutet werden darf. Es geht dies schon aus der Notwendigkeit hervor, die äußere Niveaufläche so hoch zu wählen, daß in ihrem Außenraum der Einfluß aller topographischen Massenunregelmäßigkeiten bereits vernachlässigt werden kann. Beim Rückgang mit dem normalen Freiluftgradienten wird in P weder der frühere Potentialwert noch der beobachtete Schwerewert g_P erhalten. Groß sind die Unterschiede zwischen der entwickelten verbesserten Freiluftreduktion und der analytischen Fortsetzung des Außenraumpotentiales allerdings nicht. Ja, die vereinfachten Schlußformeln (16) laufen direkt auf eine analytische Fortsetzung mit den beobachteten Potentialdifferenzen, jedoch mit den topographischen korrigiert beobachteten Schwerewerten hinaus. Es ist dies auch sehr einleuchtend; würde man überall in ideal ebenem Gelände die Schwere $(g_P + T_P)$ beobachten, so würde man bei Abstraktion von den innerkrustalen Massenunregelmäßigkeiten $v_s = 0$ setzen.

Objektive luftphotogrammetrische Vermessung signalisierter Geländepunkte

Von Dr. K. Killian

Neben der bedeutungsvollen Verwendung des Luftbildes zur topographischen Vermessung wird es mit dauernd ansteigendem Erfolg verwendet zur Verdichtung der Festpunktnetze mittels Aerotriangulation und zur Katastervermessung.

In den beiden letztgenannten Fällen werden im Gelände die auszumessenden Punkte gewöhnlich mit quadratischen weißen Tafeln, etwa 20 × 20 cm, signalisiert, d. h. luftsichtbar gemacht. Der Kontrast zwischen den Tafeln und deren unmittelbaren Umgebung muß entweder von vornherein sehr groß sein oder es muß ein solcher durch eine entsprechend schwarze Umrahmung (schwarzer Anstrich, schwarze Maske aus Pappe usw.) geschaffen werden. Die Farben Weiß und Schwarz werden bekanntlich oft besser durch Gelb und Blau ersetzt.

Die im Luftbild abgebildeten Punkte erscheinen bei mikroskopischer Betrachtung als angenähert quadratische kleine Flächen, die infolge der Korngröße der Emulsion abgerundete Ecken aufweisen. Die Belichtungszeiten können im allgemeinen so klein gehalten werden, daß praktisch keine Bewegungsunschärfen auftreten.

Die Auswertung der Punkte erfolgt bekanntlich zweckmäßig mit Stereokomparatoren, die zur Vermeidung der umständlichen Koordinatenablesungen eine elektrische Registrierung der Koordinaten gestatten. Sind die Höhenunterschiede aller auszuwertenden Punkte gegeben, so dient das rechte Bild des Komparators