

Paper-ID: VGI\_195915



## Die Bestimmungsstücke der Normalschnittellipse

Karl Hubeny <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Hochschule Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **47** (4), S. 115–124

1959

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195915,  
Title = {Die Bestimmungsstücke der Normalschnittellipse},  
Author = {Hubeny, Karl},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {115--124},  
Number = {4},  
Year = {1959},  
Volume = {47}  
}
```



## Die Bestimmungsstücke der Normalschnittellipse

Von Karl Hubeny, Graz

Auf einem Rotationsellipsoid sei ein Punkt  $P_0$  gegeben; durch diesen verlaufend wird unter dem Azimut  $\alpha$  eine Normalschnittebene angenommen. Wir stellen die Frage nach den Bestimmungsstücken der Normalschnittellipse.

Zunächst sei mit dem Ursprung im Mittelpunkt  $M$  des Rotationsellipsoids ein Koordinatensystem  $x, y, z$  angenommen, welches wir nach Abb. 1 so orientieren, daß seine  $xz$ -Ebene mit der Meridianebene durch  $P_0$  zusammenfällt; die  $z$ -Achse enthält die Rotationsachse des Ellipsoids. Weiters verlegen wir — der Punkt  $P_0$  sei durch geographische Koordinaten  $\varphi_0, \lambda_0$  gegeben — die Ebene  $\lambda = 0$  ebenfalls in die  $xz$ -Ebene, so daß sich mit den Bestimmungsstücken  $a$  und  $e$  des Rotationsellipsoids (große Halbachse und 1. Exzentrizität), ausgedrückt durch den Parameter  $\varphi$ , für  $P_0$  die cartesischen Koordinaten

$$x_0 = \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = \frac{a}{W_0} (1 - e^2) \sin \varphi_0 \quad . . . (1)$$

ergeben. In diese Formeln ist die bekannte Hilfsfunktion  $W^2 = 1 - e^2 \sin^2 \varphi$  eingeführt.

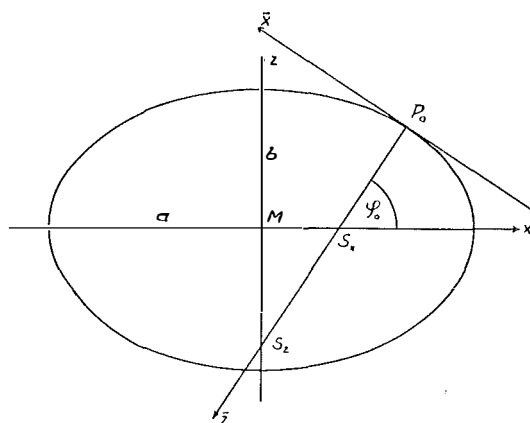


Abb. 1

Im Punkt  $P_0$  denken wir uns die Tangente an die Meridianellipse, in die wir die  $\bar{x}$ -Achse eines zweiten Koordinatensystems  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  mit dem Ursprung in  $P_0$  legen. Die Orientierung dieses Systems wählen wir so, daß die positive  $\bar{z}$ -Achse in das Innere des Rotationsellipsoids, die positive  $\bar{x}$ -Achse gegen den Pol hin zeigt.

Zwischen den Koordinaten  $x, y, z$  und  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  eines in beiden Systemen gegebenen Punktes  $P$  bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -(x - x_0) \sin \varphi_0 + (z - z_0) \cdot \cos \varphi_0 \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= -(z - z_0) \sin \varphi_0 - (x - x_0) \cdot \cos \varphi_0 \quad . . . (2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}x &= x_0 - \bar{x} \sin \varphi_0 - \bar{z} \cos \varphi_0 \\y &= \bar{y} \\z &= z_0 - \bar{z} \sin \varphi_0 + \bar{x} \cos \varphi_0 .\end{aligned} \quad . . . (3)$$

Als Vorbereitung für die weitere Rechnung bestimmen wir die Koordinaten des Schnittpunktes  $S_x$  der  $\bar{z}$ -Achse, d. h. der Flächennormalen durch  $P_0$ , mit der  $x$ -Achse des Koordinatensystems  $x, y, z$ . Indem wir dazu in (2) für  $x_0$  und  $z_0$  die Werte aus (1) eingetragen und weiter  $x = z = 0$  setzen, finden wir für den Ursprung  $M$  des Koordinatensystems  $x, y, z$ , d. h. für den Mittelpunkt des Rotationsellipsoids, die Koordinaten im quergestrichenen System mit

$$\begin{aligned}\bar{x}_M &= e^2 \frac{a}{W_0} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \\ \bar{y}_M &= 0 \\ \bar{z}_M &= a \cdot W_0.\end{aligned} \quad . . . (4a, b, c)$$

Der Ausdruck (4a) gibt den Normalabstand des Ellipsoidmittelpunktes von der Flächennormalen durch  $P_0$ , der Ausdruck (4c) den Normalabstand des Ellipsoidmittelpunktes von der Meridiantangente in  $P_0$  oder allgemeiner von der Tangentenebene in  $P_0$  an. Der geozentrische Radius  $R_g$  müßte sich demnach aus

$$R_g^2 = \bar{x}_M^2 + \bar{z}_M^2 = \frac{a^2}{W_0^2} (e^4 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 + W_0^4)$$

ergeben, was mit dem bekannten Wert

$$R_g^2 = \frac{a^2}{W_0^2} (1 - 2 e^2 \sin^2 \varphi_0 + e^4 \sin^2 \varphi_0) \quad . . . (5)$$

tatsächlich übereinstimmt.

Der gesuchte Abstand des Schnittpunktes  $S_x$  der  $\bar{z}$ -Achse mit der  $x$ -Achse vom Ellipsoidmittelpunkt  $M$  ist nun mit

$$\overline{MS_x} = \frac{\bar{x}_M}{\sin \varphi_0} = x_{S_x} = e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \quad . . . (6)$$

gegeben; als weiteres Ergebnis finden wir auch den Abstand des Ellipsoidmittelpunktes vom Schnittpunkt  $S_z$  der Flächennormalen durch  $P_0$  mit der  $z$ -Achse aus

$$\overline{MS_z} = \overline{MS_x} \operatorname{tg} \varphi_0 = \bar{z}_{S_z} = -e^2 \frac{a}{W_0} \sin \varphi_0 \quad . . . (7)$$

$$\operatorname{sgn} z_{S_z} = -\operatorname{sgn} z_0 .$$

Wir gehen nunmehr zur Betrachtung der Normalschnitte durch  $P_0$  über. Ein unter Azimut  $\alpha$  durch  $P_0$  verlaufender Normalschnitt wird bekanntlich durch eine Ebene erzeugt, die die Flächennormale in  $P_0$  enthält und mit der  $\bar{x}\bar{z}$ -Ebene den Winkel  $\alpha$  einschließt. Die Schnittspur dieser Ebene mit der  $\bar{x}\bar{y}$ -Ebene weist daher — wir betrachten das Ellipsoid von außen — in der  $\bar{x}\bar{y}$ -Ebene gleichfalls das Azimut  $\alpha$  auf. Die Normalschnittebene schneidet ferner die  $xy$ -Ebene (Äquatorebene des Rotationsellipsoids) nach einer Schnittspur, die durch den Punkt  $S_x$  unter einem Winkel  $\psi$  gegen die  $x$ -Achse verläuft (Abb. 2). Dieser Winkel ist leicht anzugeben;



metrieebene dieser Ellipse ist eine durch die Rotationsachse  $z$  senkrecht zur Normalschnittebene  $E_N$  verlaufende Ebene  $E_S$ ; in der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen liegt die kleine Achse der Schnittellipse. Da nun jede Normalschnittebene  $E_N$  ebenso wie jede zugeordnete Ebene  $E_S$  durch den Punkt  $S_z$  verläuft, müssen die Schnittgeraden dieser Ebenen ebenfalls durch diesen Punkt verlaufen, woraus der für die Lösung der Aufgabe wichtige Satz folgt:

*Die kleinen Achsen der Schnittellipsen aller durch einen Punkt  $P_0$  verlaufenden Normalschnitte schneiden die  $z$ -Achse des Rotationsellipsoids in einem und demselben Punkt, nämlich im Schnittpunkt  $S_z$  der Flächennormalen durch  $P_0$  mit der  $z$ -Achse.*

Da nun die Ebene  $E_S$  das Rotationsellipsoid nach einem Meridian schneidet, haben wir zur Bestimmung der kleinen Halbachse  $b_\alpha$  der Normalschnittellipse lediglich die Meridianellipse mit einer Geraden zu schneiden, die mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\nu$  einschließt und die durch den Punkt  $S_z$  verläuft. Wir erhalten damit zwei Schnittpunkte, deren Abstand gleich ist  $2 b_\alpha$ , d. h. der doppelten kleinen Halbachse der Schnittellipse.

Die Gleichung der Meridianellipse in einem in der Ebene  $E_S$  angenommenen Koordinatensystem  $x, z$  ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 ;$$

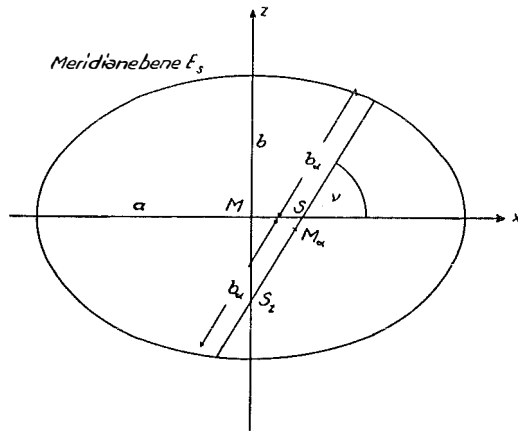


Abb. 3

setzen wir für den Augenblick  $z_0 = -e^2 \frac{a}{W_0} \sin \varphi_0$ ,

so hat die Schnittgerade die Gleichung

$$z - z_0 = x \cdot \operatorname{tg} \nu .$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Auflösung nach  $x$  und  $z$  für die Koordinaten der beiden Schnittpunkte

$$x_{b_\alpha} = e^2 \frac{a}{W_0} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \pm \frac{b \cdot \cos \varphi_0 \sin \alpha}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{W_0^2}} \quad \dots (11)$$

und

$$z_{b_\alpha} = -e^2(1-e^2) \cdot \frac{a}{W_0} \cdot \frac{\cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin^2 \alpha}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \pm \frac{b \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{W_0^2}}; \quad \dots (12)$$

konjugierte Koordinatenwerte weisen im zweiten Glied jeweils das gleiche Vorzeichen auf.

Die beiden ersten Teile der vorstehenden Ausdrücke sind offenbar die Koordinaten des Mittelpunktes  $M_\alpha$  der Normalschnittellipse, und zwar sind diese auf das vorläufige Koordinatensystem  $x, z$  in der Ebene  $E_S$  bezogen. Indem wir in (11) den ersten Ausdruck mit  $\cos(90 - \psi)$  und  $\sin(90 - \psi)$  multiplizieren und den ersten Teil von (12) unverändert übernehmen, erhalten wir im ursprünglichen Koordinatensystem  $x, y, z$  die Koordinaten des Mittelpunktes  $M_\alpha$  der Normalschnittellipse mit

$$\begin{aligned} x_{M_\alpha} &= e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \\ y_{M_\alpha} &= e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \alpha \sin \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \\ z_{M_\alpha} &= -e^2(1-e^2) \frac{a}{W_0} \cos^2 \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin^2 \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (13a, b, c)$$

Die kleine Achse  $b_x$  der Normalschnittellipse ergibt sich durch Division des zweiten Terms von (11) durch

$$\cos \nu = \cos \varphi_0 \sin \alpha$$

oder durch Division des zweiten Terms von (12) durch

$$\sin \nu = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_0}$$

mit

$$b_\alpha = \frac{b}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \sqrt{1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{W_0^2}}. \quad \dots (14)$$

Zur Berechnung der großen Halbachse  $a_\alpha$  der Normalschnittellipse haben wir nur mehr einen kleinen Schritt zu tun. Die große Halbachse muß die Ebene  $E_S$  senkrecht durchstoßen; da diese aber normal zur Äquatorebene angenommen wurde, muß die große Halbachse in einer Parallelebene zur Äquatorebene liegen. Diese letztere enthält den Mittelpunkt der Normalschnittellipse und muß daher nach (13c) für einen positiv vorausgesetzten Wert  $\varphi_0$  um den Betrag  $z_{M_\alpha}$  unter der Äquatorebene liegen. Die Helmertsche Bemerkung darüber (Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie I, Seite 137) ist offenbar etwas unklar gefaßt; man kann daraus entnehmen, daß die große Halbachse in der Äquatorebene liege, was aber unrichtig ist.

Nach den obigen Bemerkungen hat man, um die große Halbachse zu erhalten, das Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

mit der Ebene

$$z = z_{M_\alpha}$$

(siehe (13c)) zu schneiden. Man erhält dadurch den Radius  $r_{p\alpha}$  des Parallelkreises, in dessen Ebene die große Halbachse liegt, mit

$$r_{p\alpha}^2 = a^2 \left( 1 - \frac{e^4 (1 - e^2) \cos^4 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \sin^4 \alpha}{W_0^2 (1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha)^2} \right). \quad \dots (15)$$

Schneidet man diesen Kreis mit einer Geraden, die im Abstand

$$x = e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin \alpha \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}$$

(siehe (11)) vom Kreismittelpunkt verläuft, so erhält man mit der Länge der entstandenen Kreissehne die doppelte große Halbachse. Nach einfacher Rechnung folgt so das Ergebnis

$$a_\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}} \cdot \sqrt{1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{W_0^2}}. \quad \dots (16)$$

Mit (14) und (16) ist die Normalschnittellipse gegeben, deren 1. Exzentrizität nach

$$e_\alpha^2 = \frac{a_\alpha^2 - b_\alpha^2}{a_\alpha^2}$$

mit

$$e_\alpha^2 = e^2 \frac{1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \quad \dots (17)$$

berechnet werden kann. Man kann übrigens die Formeln (14), (16) und (17) leicht auf ihre Richtigkeit überprüfen, es muß nämlich für  $\alpha = 0$  in jedem Falle und für  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\varphi_0 = 90^\circ$  sowie für  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $a_\alpha = a$ ,  $b_\alpha = b$  und  $e_\alpha = e$  folgen; weiters muß sich für  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\varphi_0 = 0^\circ$   $a_\alpha = b_\alpha = a$  ergeben, was, wie leicht zu sehen ist, tatsächlich der Fall ist.

Nachdem im vorigen Form und Größe der Normalschnittellipse berechnet wurde, suchen wir als letzten Schritt deren Lage gegenüber der Schnittpur der Normalschnittebene in der  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ -Ebene. Wir denken uns dazu das Koordinatensystem  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  um die  $\bar{z}$ -Achse um den Winkel  $\alpha$  verdreht, so daß ein Koordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta$  entsteht, dessen  $\xi$ -Achse die Schnittpur der Normalschnittebene in der  $\bar{x}\bar{y}$ -Ebene ist.

Die Koordinaten des Mittelpunktes  $M_\alpha$  der Normalschnittellipse, bezogen auf das Koordinatensystem  $x, y, z$ , haben wir in (13) angegeben. Nach den Formeln (2) transformieren wir diese zunächst in das System  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  und erhalten

$$\begin{aligned} \bar{x}_{M_\alpha} &= e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos^2 \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \\ \bar{y}_{M_\alpha} &= e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \alpha \sin \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \\ \bar{z}_{M_\alpha} &= a \cdot W_0 \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \left( 1 - \frac{e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha}{W_0^2} \right). \end{aligned} \quad (18a, b, c)$$

Auf das System  $\xi, \eta, \zeta$  transformiert, ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\xi_{M\alpha} &= e^2 \frac{a}{W_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \alpha \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha} \\ \eta_{M\alpha} &= 0 \\ \zeta_{M\alpha} &= \bar{z}_{M\alpha}\end{aligned}\quad (19a, b, c)$$

Die weitere Betrachtung geschieht in der Normalschnittebene, d. h. in der  $\xi, \zeta$ -Ebene dieses Koordinatensystems. Dessen Ursprung liegt natürlich in  $P_0$ , seine  $\xi$ -Achse ist Tangente an die Normalschnittellipse, wobei die Koordinaten des Mittelpunktes der Ellipse aus (19a, c) gegeben sind. Um die Lage der Ellipse anzugeben, haben wir noch den Winkel zu bestimmen, den z. B. die Richtung ihrer großen Achse mit der  $\xi$ -Achse einschließt (Abb. 4). Denkt man sich durch  $P_0$  die Einheitskugel und durch diesen Punkt neben der Flächennormalen in  $P_0$  die Parallelen zur  $x$ -Richtung und zur Richtung der Schnittspur der Normalschnittebene mit der  $xy$ -Ebene (diese ist parallel zur Richtung der großen Halbachse der Schnittellipse), so entsteht ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck mit den Seiten  $180^\circ - \varphi_0$ ,  $\psi$  und  $90^\circ + \delta$ , wenn mit  $\delta$  die Neigung der großen Halbachse gegen die  $\xi$ -Achse bezeichnet wird. Der Seite  $\psi$  liegt der Winkel  $\alpha$ , der Seite  $90^\circ + \delta$  der rechte Winkel des Dreiecks gegenüber. Es folgt daraus

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{ctg} \varphi_0 \cos \alpha; \quad \dots (20)$$

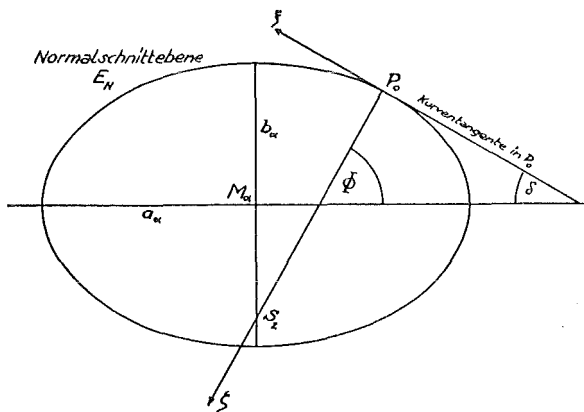


Abb. 4

zweckmäßig wird man jedoch die Ergänzung von  $\delta$  auf  $90^\circ$ , nämlich den Winkel  $\Phi$ , den die Flächennormale in  $P_0$ , d. h. die  $\zeta$ -Achse mit der Richtung der großen Halbachse einschließt und der aus

$$\operatorname{ctg} \Phi = \operatorname{ctg} \varphi_0 \cos \alpha \quad \dots (21)$$

gegeben ist, weiter verwenden. Mit (19), (20) und (21) ist nunmehr auch die Orientierung der Normalschnittellipse in der  $\xi, \zeta$ -Ebene, also in der Normalschnittebene, vollständig gegeben.

Für den praktischen Gebrauch der Formeln (14), (16) und (17) dürften sich Reihenentwicklungen derselben als bequemer erweisen. Indem wir auf die einzelnen Faktoren dieser Formeln den binomischen Satz anwenden, erhalten wir die Ergebnisse



$$\begin{aligned}
b_\alpha = b \left[ & 1 + e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha \left( 1 - \frac{1}{2 W_0^2} \right) \right. \\
& + e^4 \cos^4 \varphi_0 \sin^4 \alpha \left( 1 - \frac{1}{2 W_0^2} - \frac{1}{8 W_0^4} \right) \\
& + e^6 \cos^6 \varphi_0 \sin^6 \alpha \left( 1 - \frac{1}{2 W_0^2} - \frac{1}{8 W_0^4} - \frac{1}{16 W_0^6} \right) \\
& + e^8 \cos^8 \varphi_0 \sin^8 \alpha \left( 1 - \frac{1}{2 W_0^2} - \frac{1}{8 W_0^4} - \frac{1}{16 W_0^6} - \frac{5}{128 W_0^8} \right) \\
& \left. + \dots \right] \dots (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_\alpha = a \left[ & 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha \left( 1 - \frac{1}{W_0^2} \right) \right. \\
& + \frac{1}{8} e^4 \cos^4 \varphi_0 \sin^4 \alpha \left( 3 - \frac{2}{W_0^2} - \frac{1}{W_0^4} \right) \\
& + \frac{1}{16} e^6 \cos^6 \varphi_0 \sin^6 \alpha \left( 5 - \frac{3}{W_0^2} - \frac{1}{W_0^4} - \frac{1}{W_0^6} \right) \\
& + \frac{1}{128} e^8 \cos^8 \varphi_0 \sin^8 \alpha \left( 35 - \frac{20}{W_0^2} - \frac{6}{W_0^4} - \frac{4}{W_0^6} - \frac{5}{W_0^8} \right) \\
& \left. + \dots \right] \dots (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_\alpha^2 = e^2 \left[ & (1 - \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha) \cdot (1 + e^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha + e^4 \cos^4 \varphi_0 \sin^4 \alpha + \right. \\
& \left. + e^6 \cos^6 \varphi_0 \sin^6 \alpha + e^8 \cos^8 \varphi_0 \sin^8 \alpha + \dots) \right] \dots (24)
\end{aligned}$$

Ebenso wie aus den Ausgangsformeln ersieht man aus den obigen Ausdrücken, daß gegenüber den Achsen der Meridianellipse die kleine Achse stets eine stärkere Veränderung erfährt, als dies bei der großen Achse der Fall ist, denn der erste Term des Klammerausdruckes in (23) ist bereits von der Größenordnung  $e^4$ , während der entsprechende Teil von (22) noch die Größenordnung  $e^2$  aufweist. Zuzufolge  $\frac{1}{W^2} > 1$  ergeben sich übrigens für sämtliche Ausdrücke in der eckigen Klammer der Formel (23) nach deren Berechnung negative Vorzeichen; von den singulären Fällen abgesehen, ist stets  $b_\alpha > b$ ,  $a_\alpha < a$  und daher  $e_\alpha^2 < e^2$ .

Obwohl nicht mehr zum eigentlichen Thema gehörend, soll noch die Frage aufgeworfen und behandelt werden, in welchen Punkten ein im Punkt  $P_0$  unter dem Azimut  $\alpha$  angenommener Normalschnitt das Azimut  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  aufweist. Dies ist zweifellos in jenen Punkten der Fall, in denen die Tangente an die Schnittellipse parallel zur  $xy$ -Ebene verläuft, also im höchsten und tiefsten Punkt derselben. Diese beiden Punkte liegen, wie wir früher ausgeführt haben, in einer durch die  $z$ -Achse senkrecht zur Normalschnittebene verlaufenden Ebene  $E_3$ ; diese hat gegenüber

dem in der  $xz$ -Ebene liegenden Punkt  $P_0$  einen Längenunterschiede  $l = 90^\circ - \psi$ . Es ist also nach (8) mit

$$\operatorname{ctg} l = \sin \varphi_0 \operatorname{tg} \alpha \quad . . . (25)$$

der Längenunterschied der Meridianebene  $E_S$ , in der der höchste und der tiefste Punkt der Schnittkurve liegt, gegen den Ausgangspunkt  $P_0$  gegeben. Da der Gleichung (25) sowohl  $l$  als auch  $l \pm 180^\circ$  genügt, sind diese beiden Werte die Längenunterschiede der beiden Extrempunkte gegen  $P_0$ .

Die rechtwinkligen Koordinaten des höchsten und des tiefsten Punktes der Schnittellipse haben wir, bezogen auf ein in der Ebene  $E_S$  angenommenes Koordinatensystem  $xz$ , in (11) und (12) bereits angegeben.

Nun ist für eine durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

gegebene Ellipse bekanntlich der Schnittwinkel  $\varphi$  der Kurvennormalen in einen Punkt  $x, z$  mit der  $x$ -Achse aus

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2}{b^2} \frac{z}{x} \quad . . . (26)$$

gegeben; trägt man hierin aus (11) und (12) die Koordinatenwerte ein, so sind mit den beiden sich ergebenden Lösungen die geographischen Breiten der Extrempunkte der Schnittfigur gegeben. Indem wir der einfachen Anschreibung halber die Formeln (9) heranziehen, erhalten wir aus (26) mit (11) und (12)

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{1}{1-e^2} \cdot \frac{-e^2(1-e^2) \cos^2 \nu \sin \varphi_0 \pm \sin \nu \sqrt{(1-e^2)(W_0^2 - e^2 \cos^2 \nu)}}{e^2 \cos \nu \sin \nu \sin \varphi_0 \pm \cos \nu \sqrt{(1-e^2)(W_0^2 - e^2 \cos^2 \nu)}} \quad (27)$$

Die Benützung der jeweils gleichen Vorzeichen ergibt die beiden Extremwerte der geographischen Breite für den Verlauf der Schnittellipse.

Abschließend sei noch mit einigen Worten auf die zu dem behandelten Thema bereits vorliegende und mir bekannt gewordene Literatur eingegangen. H. Schmehl entwickelte in [1] einen mit der Formel (13c) übereinstimmenden Ausdruck für den Abstand der großen Halbachse der Schnittellipse von der Äquatorebene und weist auch auf die irrtümliche Auffassung Helmer's über deren Lage hin. M. Näbauer beschäftigt sich in [2], allerdings von einer anderen Problemstellung ausgehend, mit demselben Thema, wobei Formeln angegeben werden, die nach entsprechender Umformung — Näbauer geht in der Benützung der beiden Exzentrizitäten nicht sehr konsequent vor — mit den Formeln (14), (16), (17) und (27) übereinstimmen. Näbauer formuliert u. a. auch den Satz: Eine das Ellipsoid schneidende Ebene ergibt dann und nur dann einen Normalschnitt, wenn sie die  $z$ -Achse innerhalb des Bereiches  $z = \pm \frac{e^2 a}{1-e^2}$  schneidet; es ist dies jener Bereich, innerhalb dessen alle Flächennormalen des Rotationsellipsoids die  $z$ -Achse schneiden. Der in den vorhergegangenen

Zeilen der vorliegenden Arbeit ausgesprochene Satz, nach dem die kleine Achse der Normalschnittellipse stets durch den Schnittpunkt der  $z$ -Achse mit der Flächennormalen im Ausgangspunkt des Normalschnittes hindurchgehen muß, besagt im Grunde zunächst dasselbe, ergänzt jedoch die Näbauer'sche Feststellung hinsichtlich der möglichen Lage der Schnittfigur und hat damit allgemeinere Bedeutung. Weitere Untersuchungen finden sich in [3].

#### Literatur:

[1] *H. Schmehl*: Über den Normalschnitt eines Erdellipsoids, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1937, S. 645.

[2] *M. Näbauer*: Normalschnitt und Gegennormalschnitt auf dem Erdellipsoid, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1944, S. 2.

[3] *Cimbálik* und *Andersen*, zitiert in Jordan-Eggert-Kneißl, Handbuch der Vermessungskunde, IV/2, § 138.

## Eine interessante Neuerung am WILD-Repetitions-Theodolit T 1

Von *E. Berchtold*, Heerbrugg

Ein Theodolit mit Höhenkreis, aber ohne Höhenkreislibelle, galt lange Zeit als ungeeignet für genaue Messungen, weil — im Gegensatz zum Horizontalkreis — am Höhenkreis unmittelbar Winkel und nicht bloß Richtungen abgelesen werden. Der eine Schenkel dieses Winkels ist die Ziellinie des Fernrohrs, der andere entweder die Richtung nach dem Zenit oder die in der Vertikalebene der Ziellinie verlaufende Horizontale.

Weil die Lotrichtung durch die Stehachse des auf dem Stativ aufgestellten Instrumentes nicht zuverlässig genug definiert ist, benützt man eine besondere Libelle, die Höhenkreislibelle, mit der vor dem Ablesen des Höhenkreises der Höhenkreisindex in die für die Winkelablesung richtige Lage gebracht wird.

Seit es Nivellierinstrumente mit automatischer Waagrechtstellung der Ziellinie gibt, sucht man nach Lösungen, auch die Höhenkreislibelle eines Theodoliten durch eine automatisch wirkende Vorrichtung zu ersetzen. Es war naheliegend, dazu ein pendelnd aufgehängtes Prisma zu verwenden.

Im Wild-Repetitions-Theodolit T1 wurde aber eine viel einfachere Lösung verwirklicht, die darin besteht, in den Strahlengang des Höhenkreismikroskopes ein durchsichtiges Gefäß mit einer glasklaren Flüssigkeit derart einzuschalten, daß die vom Höhenkreis kommenden Lichtstrahlen die Flüssigkeit durchsetzen. Steht das Instrument senkrecht, so sind der ebene Boden des Gefäßes und die Oberfläche der Flüssigkeit waagrecht und der Hauptstrahl des Ablesemikroskopes geht ungebrochen durch. Neigt sich das Instrument um einen Winkel  $\alpha$ , so bleibt nur die Oberfläche der Flüssigkeit waagrecht, der Boden des Gefäßes hingegen steht schief. Die Flüssigkeit bildet daher einen Keil, der die Lichtstrahlen nach dem Brechungsgesetz ablenkt. Ist  $n$  der Brechwert der Flüssigkeit, so wird die Ablenkung des Hauptstrahls  $(n - 1) \alpha$ . Die Abstände im Strahlengang sind so bemessen, daß durch diese Ablenkung der von der Instrumentenneigung herrührende Fehler des Höhenwinkels korrigiert wird.