

Paper-ID: VGI\_195917



## Neue Formeln zur Lösung der ersten Hauptaufgabe nach Jordan

Karl Hubeny <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Hochschule Graz, Rechbauerstraße 12*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **47** (5–6), S. 129–141

1959

BibTEX:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_195917,  
Title = {Neue Formeln zur Lösung der ersten Hauptaufgabe nach Jordan},  
Author = {Hubeny, Karl},  
Journal = {{\"0}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {129--141},  
Number = {5--6},  
Year = {1959},  
Volume = {47}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom  
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. R o h r e r  
Präsident i. R. Dipl.-Ing. K. L e g o und o. Prof. Hofrat Dr. phil. K. L e d e r s t e g e r

Nr. 5/6

Baden bei Wien, Ende Dezember 1959

XLVII. Jg.

## Neue Formeln zur Lösung der ersten Hauptaufgabe nach Jordan

Von *Karl Hubeny*, Graz

Eine Untersuchung des Anwendungsbereiches der von Jordan angegebenen Lösung der beiden geodätischen Hauptaufgaben zeigt, daß diese bei einer entsprechend geführten Entwicklung des Formelsystems die Möglichkeit bietet, mit einem relativ einfachen Rechengang die Hauptaufgaben bis weit in den Bereich der langen geodätischen Strecken zu lösen. Diese Feststellung gilt sowohl für die erste als auch für die zweite Hauptaufgabe; die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die erste der beiden Problemstellungen.

Der Lösung der Hauptaufgaben nach Jordan liegt der Gedanke Bessels zu Grunde, einer geodätischen Kurve des Rotationsellipsoids einen Großkreis der affinen Kugel zuzuordnen. Ist die Meridianellipse des Rotationsellipsoids durch ihre Halbachsen  $a$  und  $b$  bestimmt, so kommt der affinen Kugel der Radius  $a$  zu; die Beziehung zwischen der geodätischen Kurve des Ellipsoids und dem Großkreis der Kugel wird dadurch hergestellt, daß man den beiden geodätischen Kurven — ein Großkreis ist bekanntlich eine geodätische Kurve der Kugel — eine und dieselbe Clairautsche Konstante vorschreibt. Kennzeichnet man mit dem Index  $E$  die auf das Ellipsoid und mit dem Index  $K$  die auf die Kugel bezogenen Größen und benützt man die Bezeichnungen  $p$  und  $\alpha$  für Parallelkreishalbmesser und Azimut, so gilt nach dem Satz von Clairaut und der früheren Fortsetzung über die Gleichheit der Konstanten

$$p_E \sin \alpha_E = p_K \sin \alpha_K = c.$$

Mit dieser Gleichung ist über die Zuordnung der Punkte der geodätischen Kurve des Ellipsoids zu den Punkten des Großkreises zunächst noch keine nähere Verfügung getroffen. Im Sinne des Besselschen Gedankenganges erfolgt diese Zuordnung nun so, daß für konjugierte Punkte die Forderung

$$\alpha_E = \alpha_K = \alpha$$

zu erfüllen ist, woraus mit der früher angeschriebenen Gleichung die notwendige Bedingung

$$p_E = p_K,$$

d. h. die Gleichheit der Parallelkreisradien in einander zugeordneten Punkten hervorgeht. Einem Punkt  $P_{iE}$  der geodätischen Kurve des Rotationsellipsoids entspricht sonach ein Punkt  $P_{iK}$  des Großkreises der Kugel; in diesen beiden Punkten weisen geodätische Kurve und Großkreis dasselbe Azimut  $\alpha$  auf und die in den beiden Punkten bestehenden Parallelkreisradien  $p_{iE}$  und  $p_{iK}$  sind einander gleich.

Nimmt man nun auf der betrachteten geodätischen Kurve des Rotationsellipsoids zwei Punkte  $P_{1E}$  und  $P_{2E}$  mit den geographischen Koordinaten  $\varphi_1, l_1$  und  $\varphi_2, l_2$  an, so bestimmen diese beiden Punkte gemeinsam mit dem Pol ein geodätisches Polardreieck, in dem die Winkel durch die Azimute  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sowie durch den Längenunterschied  $l = l_2 - l_1$  gegeben sind; ein weiteres Bestimmungsstück bildet als Seite des geodätischen Polardreiecks die durch die beiden Punkte  $P_{1E}$  und  $P_{2E}$  auf der geodätischen Kurve definierte geodätische Strecke  $s$ .

Da nun den Punkten  $P_{1E}$  und  $P_{2E}$  zufolge der früheren Festsetzung zwei Punkte  $P_{1K}$  und  $P_{2K}$  des zugeordneten Großkreises der Kugel entsprechen, ist dem ellipsoidischen Polardreieck ein sphärisches Polardreieck zugeordnet. Bezeichnet man die auf die Kugel bezogenen geographischen Koordinaten der Punkte  $P_{1K}$  und  $P_{2K}$  mit  $\beta_1, \lambda_1$  und  $\beta_2, \lambda_2$ , so sind die Winkel des sphärischen Polardreiecks durch die Azimute  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  — diese sind gleich den ellipsoidischen Azimuten — sowie durch den sphärischen Längenunterschied  $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  gegeben; die Seiten werden von den Großkreisbogen  $90 - \beta_1$ ,  $90 - \beta_2$  und dem Großkreisbogen  $P_{1K}P_{2K} = \sigma$  gebildet (Abb. 1 a, b).

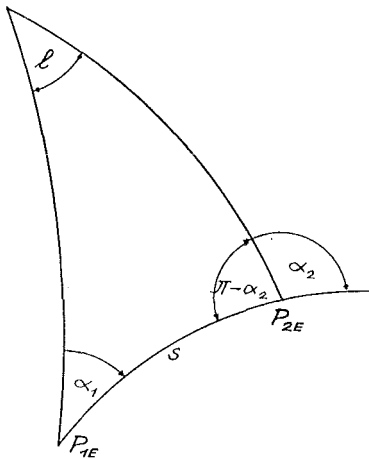


Abb. 1a

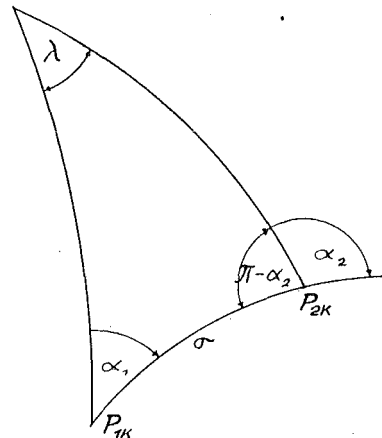


Abb. 1b

Die beiden Polardreiecke enthalten sonach in den Winkeln  $\alpha_1$  und  $180 - \alpha_2$  zwei gemeinsame Bestimmungsstücke. Gelingt es, Zusammenhänge zwischen den weiteren Bestimmungsstücken, nämlich zwischen den auf das Ellipsoid bezogenen Größen  $\varphi_1, \varphi_2, l, s$  und den sphärischen Größen  $\beta_1, \beta_2, \lambda, \sigma$  anzugeben, so ist die Lösung der Hauptaufgaben auf die Auflösung des sphärischen Polardreiecks rückführbar.

An Hand der nebenstehenden Abbildung 2 entnimmt man zunächst die zwischen der ellipsoidischen Breite  $\varphi$  und der — nicht sehr glücklich — als „reduzierte“ Breite bezeichneten sphärischen Breite  $\beta$  bestehenden Zusammenhänge. Es ist

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{OS}}{\overline{OA_K}} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\overline{OS}}{\overline{OA_E}};$$

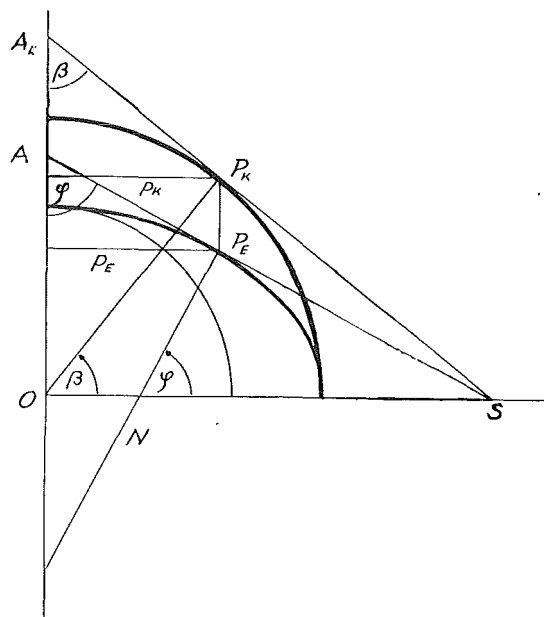


Abb. 2

zufolge der zwischen Meridianellipse und Großkreis bestehenden Affinität ist aber

$$\frac{\overline{OA_E}}{\overline{OA_K}} = \frac{b}{a},$$

woraus mit dem ersten Ansatz

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \quad \dots \quad (1a)$$

folgt. Eine andere Form dieser Beziehung läßt sich aus der geforderten Gleichheit der Parallelkreishalbmesser  $p_E$  und  $p_K$  herleiten. Bezeichnet man mit  $N$  den Normalkrümmungshalbmesser des Ellipsoids, mit  $c = \frac{a^2}{b}$  dessen Krümmungshalbmesser im Pol und mit  $V$  die aus  $V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = 1 + \eta^2$  gebildete Hilfsfunktion, so folgt aus der Bedingung  $p_E = p_K$  die Gleichung

$$a \cos \beta = N \cos \varphi = \frac{c}{V} \cos \varphi$$

und daraus

$$\cos \beta = \frac{N}{a} \cos \varphi = \frac{a}{b} \frac{1}{V} \cos \varphi. \quad \dots \quad (1b)$$

Multipliziert man (1 a) mit (1 b), so erhält man in der Gleichung

$$\sin \beta = \frac{1}{V} \sin \varphi \quad . . . \quad (1c)$$

eine dritte Form der Funktion  $\beta = \beta(\varphi)$ . Auf die zahlenmäßige Berechnung dieser Funktion werden wir etwas später zurückkommen.

Aus den für ein Punktpaar  $P_E, P_K$  angeschriebenen fundamentalen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} ds \cos \alpha &= M d\varphi & ds \sin \alpha &= N \cos \varphi dl \\ d\sigma \cos \alpha &= a d\beta & d\sigma \sin \alpha &= a \cos \beta d\lambda \end{aligned} \quad . . . \quad (2)$$

— die Größe  $M$  bedeutet hierin den Meridiankrümmungshalbmesser des Ellipsoids — folgt zufolge der Gleichheit der Azimute

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{a}{M} \frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{a \cos \beta}{N \cos \varphi} \frac{d\lambda}{dl}; \quad . . . \quad (3)$$

trägt man hierin die aus (1 a) entstehende Differentialgleichung

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{b \cos^2 \beta}{a \cos^2 \varphi} \quad . . . \quad (4)$$

und den aus (1b) gegebenen Quotienten

$$\frac{\cos \beta}{\cos \varphi} = \frac{N}{a} = \frac{a}{b} \frac{1}{V}$$

ein, so erhält man die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d\sigma}{ds} = V \quad \text{und} \quad \frac{d\lambda}{dl} = V, \quad . . \quad (5a, b)$$

wobei man (5a) durch Einführung des Bogenmaßes für  $\sigma$  in die stets benützte Form

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{V}{a} \quad . . . \quad (5c)$$

umschreiben kann. In (1) und (5) liegen nunmehr die gesuchten Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken des ellipsoidischen und des zugeordneten sphärischen Polardreiecks vor.

Bevor wir auf die Auflösung der Differentialgleichungen (5) im Sinne der Jordanschen Lösung der Hauptaufgaben eingehen, wenden wir uns noch einen Augenblick der rechnerischen Auswertung der Formeln (1), d. h. der Berechnung der Funktion  $\beta = \beta(\varphi)$  zu. Keine der angegebenen Formen dieser Funktion ist für die zahlenmäßige Auswertung bequem zu benützen; wir greifen auf die Form (1a) zurück und erinnern dabei an einen Satz von Lagrange, der folgendes besagt: Verhalten sich die Tangenten zweier Winkel  $x$  und  $y$  zueinander wie  $m$  zu  $n$ , ist also

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{m}{n},$$

so ist die Differenz  $x - y$  dieser beiden Winkel aus der für nahezu gleiche Werte  $m$ ,  $n$  und  $\operatorname{sgn} m = \operatorname{sgn} n$  sehr rasch konvergierenden Reihe

$$x - y = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \frac{1}{i} \left( \frac{m-n}{m+n} \right)^i \sin 2 i y \quad \dots \quad (6)$$

gegeben. Im betrachteten Falle ist demnach

$$\beta - \varphi = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \frac{1}{i} \left( \frac{b-a}{b+a} \right)^i \sin 2 i \varphi \quad \dots \quad (7)$$

und

$$\varphi - \beta = \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \frac{1}{i} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^i \sin 2 i \beta \quad \dots \quad (8)$$

Die Koeffizienten der trigonometrischen Reihen (7) und (8) sind für ein bestimmtes Ellipsoid fest vorgegebene Werte und man erhält z. B. für die Ellipsoide von Bessel und Hayford, indem man noch die Umwandlungszahl  $\rho''$  hinzufügt, die in Sekunden ausgedrückten Differenzen  $\beta - \varphi$  und  $\varphi - \beta$  aus

$$\begin{aligned} (\beta - \varphi)'' &= - 345, 325 4036 \sin 2 \varphi & (\varphi - \beta)'' &= + 345, 325 4036 \sin 2 \beta \\ &+ 0, 289 0693 \sin 4 \varphi & &+ 0, 289 0693 \sin 4 \beta \\ &- 0, 000 3226 \sin 6 \varphi & &+ 0, 000 3226 \sin 6 \beta \\ &+ \dots & &+ \dots \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} (\beta - \varphi)'' &= - 347, 832 7256 \sin 2 \varphi & (\varphi - \beta)'' &= + 347, 832 7256 \sin 2 \beta \\ &+ 0, 293 2822 \sin 4 \varphi & &+ 0, 293 2822 \sin 4 \beta \\ &- 0, 000 3297 \sin 6 \varphi & &+ 0, 000 3297 \sin 6 \beta \\ &+ \dots & &+ \dots \end{aligned} \quad (9b)$$

Das erste der beiden Formelpaare bezieht sich auf das Ellipsoid von Bessel, das zweite auf jenes von Hayford. Mit diesen sehr leicht zu handhabenden Formeln ist der Zusammenhang zwischen der reduzierten und der geographischen Breite gegeben; fügt man ihnen bzw. einer ihrer ursprünglichen Formen (1) die Differentialgleichungen (5) bei, so liegt, wie schon früher erwähnt wurde, damit der vollständige Ansatz zur Lösung der Hauptaufgaben über das dem geodätischen Polardreieck zugeordnete sphärische Polardreieck vor.

Bessel hat in einer im Jahre 1826 erschienenen Abhandlung diesen Gedanken entwickelt und ausgeführt. Weitere Bearbeitungen (u. a. Helmert, Bodemüller) knüpfen daran an, hier sei dazu lediglich festgestellt, daß der Zusammenhang zwischen den ellipsoidischen und den konjugierten sphärischen Bestimmungsstücken durch elliptische Integrale gegeben ist, deren Lösung das Charakteristikum für die einzelnen Bearbeitungen ist.

Im Gegensatz dazu begründet Jordan die Auflösung des Polardreiecks auf Reihenentwicklungen nach

$$\sigma = \sum \frac{1}{i!} \frac{d^i \sigma}{ds^i} s^i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \dots \quad (10)$$

und

$$\lambda = \sum \frac{1}{i!} \frac{d^i \lambda}{dl^i} l^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \dots \quad (11)$$

d. h. die Integration der Differentialgleichungen (5) wird durch die eben angeschriebenen Reihenentwicklungen bewirkt.

Zweckmäßig schreibt man (10) und (11) in der Form

$$\sigma = s \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \frac{1}{i!} \frac{d^i \sigma}{ds^i} s^{i-1} = s k_s \quad \dots \quad (12)$$

und

$$\lambda = l \sum_{i=1, 2, 3, \dots} \frac{1}{i!} \frac{d^i \lambda}{dl^i} l^{i-1} = l k_l \quad \dots \quad (13)$$

an, woraus leicht ersichtlich ist, daß mit der Kenntnis der Funktion  $\beta = \beta(\varphi)$  und der Faktoren

$$k_s = \sum \frac{1}{i!} \frac{d^i \sigma}{ds^i} s^{i-1} \quad \dots \quad (14)$$

$$k_l = \sum \frac{1}{i!} \frac{d^i \lambda}{dl^i} l^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \dots \quad (15)$$

alle Bestimmungsstücke zur Lösung der Hauptaufgaben vorliegen. Streng genommen müßte man allerdings die Potenzreihe (11) in ihrer inversen Form anschreiben, da bei der Berechnung der ersten Hauptaufgabe zunächst der sphärische Längenunterschied  $\lambda$  im Ergebnis erscheint und auf den ellipsoidischen Längenunterschied zurückgeführt werden muß; die eben angeschriebene Form erweist sich aber für die weitere Entwicklung als günstiger.

Die Potenzreihe (14) — gleichbedeutend natürlich mit dem Ansatz (10) — konvergiert für Bogenlängen von einigen hundert Kilometern sehr rasch. Ihre Konvergenz reicht, wie vorgreifend mitgeteilt sei, bei entsprechend weit getriebener Entwicklung noch hin, den Faktor  $k_s$  für Bogenlängen bis etwa 2500 km ausreichend genau zu ermitteln. Mit Hilfe einiger allgemeiner Formeln lassen sich aus

$$\frac{d\sigma}{ds} = V = 1 + \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{8} \eta^4 + \frac{1}{16} \eta^6 - \frac{5}{128} \eta^8 + \frac{7}{256} \eta^{10} - \dots + \dots$$

die in (14) angezeigten Ableitungen leicht finden; wir zitieren dazu einige Ableitungen häufig vorkommender Funktionen nach der Bogenlänge, nämlich

$$\frac{d}{ds} \eta^i = \frac{t}{N} (-i \eta^i - i \eta^{i+2}) \cos \alpha$$

$$\frac{d}{ds} t^2 \eta^i = \frac{t}{N} \left( 2 \eta^i + 2 \eta^{i+2} - (i-2) t^2 \eta^i - (i-2) t^2 \eta^{i+2} \right) \cos \alpha$$

$$\frac{d}{ds} t^i \eta^2 = \frac{t}{N} \left( i t^{i-2} \eta^2 + (i-2) t^i \eta^2 + i t^{i-2} \eta^4 + (i-2) t^i \eta^4 \right) \cos \alpha$$

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{N^i} = -\frac{i t \eta^2}{N^{i+1}} \cos \alpha, \quad \frac{d}{ds} \frac{1}{N^i \cos \varphi} = \frac{t}{N^{i+1} \cos \varphi} \left( 1 - (i-1) \eta^2 \right) \cos \alpha$$

$$\frac{d}{ds} \frac{t}{N^i} = \frac{1}{N^{i+1}} \left( 1 + t^2 + \eta^2 - (i-1) t^2 \eta^2 \right) \cos \alpha$$

$$\frac{d}{ds} \frac{t}{N^i \cos \varphi} = \frac{1}{N^{i+1} \cos \varphi} \left( 1 + 2 t^2 + \eta^2 - (i-2) t^2 \eta^2 \right) \cos \alpha$$

$$\frac{d}{ds} \cos^i \alpha \sin^k \alpha = \frac{t}{N} (k \cos^{i+1} \alpha \sin^k \alpha - i \cos^{i-1} \alpha \sin^{k+2} \alpha).$$

Hierin und in weiterer Folge ist mit  $N$  der Normalkrümmungshalbmesser, mit  $\eta^2$  das Produkt  $e'^2 \cos^2 \varphi$  und mit  $t$  die Tangente der geographischen Breite  $\varphi$  bezeichnet.

Indem man (16) mit Benützung der vorstehenden Ableitungen fortlaufend nach  $s$  differenziert und sich dabei stets auf die Benützung einer Winkelfunktion von  $\alpha$ , nämlich  $\cos \alpha$ , beschränkt, erhält man für den Faktor  $k_s$  die nach Potenzen von  $s$  fortschreitende Potenzreihe

$$\begin{aligned}
 k_s = & 1 + \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{8} \eta^4 + \frac{1}{16} \eta^6 - \frac{5}{128} \eta^8 + \frac{7}{256} \eta^{10} \dots \\
 & + \frac{t}{32 N} \left[ (-16 \eta^2 - 8 \eta^4 + 2 \eta^6 - \eta^8) \cos \alpha \right] s \\
 & + \frac{1}{48 N^2} \left[ \begin{array}{ccc} ( & 8 t^2 \eta^2 & + 4 t^2 \eta^4 & - t^2 \eta^6) \\ + (-8 \eta^2 & - 12 \eta^4 + 24 t^2 \eta^4 - 3 \eta^6 + 12 t^2 \eta^6) \cos^2 \alpha \end{array} \right] s^2 \\
 & + \frac{t}{48 N^3} \left[ \begin{array}{ccc} (8 \eta^2 + 12 \eta^4 - 18 t^2 \eta^4 + 3 \eta^6 - 9 t^2 \eta^6) \cos \alpha \\ + ( & + 26 \eta^4 & + 39 \eta^6 - 30 t^2 \eta^6) \cos^3 \alpha \end{array} \right] s^3 \\
 & + \frac{1}{120 N^4} \left[ \begin{array}{l} (-4 t^2 \eta^2 - 6 t^2 \eta^4 + 9 t^4 \eta^4) + (4 \eta^2 + 10 \eta^4 - 94 t^2 \eta^4) \cos^2 \alpha + (13 \eta^4) \cos^4 \alpha \end{array} \right] s^4 \\
 & + \frac{t}{180 N^5} \left[ \begin{array}{l} (-4 \eta^2 - 10 \eta^4 + 63 t^2 \eta^4) \cos \alpha + (-71 \eta^4) \cos^3 \alpha \end{array} \right] s^5 \\
 & + \frac{1}{315 N^6} \left[ t^2 \eta^2 - \eta^2 \cos^2 \alpha \right] s^6 \dots \dots (17) \\
 & + \frac{t}{630 N^7} \left[ + \eta^2 \cos \alpha - 2 \eta^2 \cos^3 \alpha + 4 \eta^2 \cos^5 \alpha - 2 \eta^2 \cos^7 \alpha \right] s^7 + \dots
 \end{aligned}$$

Trotz seines recht bedeutend anmutenden Umfanges ist dieser Ausdruck leicht zu berechnen. Alle Koeffizienten beziehen sich hierin auf den Ausgangspunkt  $P_1$ , d. h. auf dessen geographische Breite  $\varphi_1$  und das in ihm bestehende Azimut  $\alpha_1$ . Eine Abschätzung der weiteren, auf den Term mit  $s^7$  folgenden Glieder dieser Potenzreihe zeigt, daß die letzteren (Annahme:  $\varphi = \alpha = \frac{\pi}{4}$ ) bei Bogenlängen zwischen 2500 und 3000 km die Größenordnung von 0,01 m und mehr erreichen; für diese Bogenlängen konvergiert die vorliegende Potenzreihe aber nur mehr sehr träge, weshalb die leicht mögliche Weiterentwicklung über den mitgeteilten Umfang hinaus nicht sinnvoll ist. Die Potenzreihe (17) gestattet, wie zusammenfassend festgestellt sei, mit einer maximalen Unsicherheit von 0,001 m den Übergang auf die sphärische Seite  $\sigma$  für geodätische Strecken, deren Größenordnung an den Betrag von rund 2500 km heranreicht; man gelangt also damit weit in den Bereich der langen geodätischen Strecken.

In der Regel wünscht man die im Gradmaß ausgedrückte sphärische Seite  $\sigma$  zu erhalten; unter Beachtung von (5c) ergibt sich diese aus

$$\sigma = \rho \frac{s}{a} k_s \dots \dots (18)$$







annehmen, d. h. es können in ihr nur geradzahlige Potenzen von  $\Delta\varphi$  und  $l$  vorkommen.

Aus der ursprünglichen Form

$$k_l - k_s = a_{20} \Delta\varphi^2 + a_{30} \Delta\varphi^3 + a_{40} \Delta\varphi^4 + a_{22} \Delta\varphi^2 l^2 + a_{04} l^4 \dots \quad (24)$$

geht die Entwicklung (23) hervor, wenn man die Koeffizienten  $a_{ik}$  von (24) im mittleren Argument  $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$  annimmt und sie, da sie in (24) auf  $P_1$  bezogen sind, nach Potenzen von  $-\frac{1}{2}\Delta\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$  entwickelt. Es ist z. B.

$$a_{20, 1} = a_{20, m} - a'_{20, m} \frac{\Delta\varphi}{2} + a''_{20, m} \frac{1}{2!} \frac{\Delta\varphi^2}{4} - \dots$$

usw.

Die Bedeutung eines Koeffizienten  $A_{ik}$  in (23) ergibt sich — durch Eintragung der vorstehenden Entwicklung für alle Koeffizienten in (24) — leicht mit

$$A_{ik} = a_{ik} - a'_{i-1, k} \frac{\Delta\varphi}{2} + a''_{i-2, k} \frac{\Delta\varphi^2}{8} - \dots$$

worin die Akzente ebenso wie vorhin Ableitungen nach der geographischen Breite anzeigen. Allgemein findet man (an Stelle der Akzente ist nunmehr die Hochzahl  $n$  gesetzt, die die Ordnung der Ableitung anzeigen soll) die mit wechselndem Vorzeichen fortschreitende, für ungerade Werte von  $i$  und  $k$  verschwindende Folge

$$A_{ik} = \sum_{n=0, 1, 2, \dots, i} \frac{1}{n! 2^n} a_{i-n, k}^n \dots \quad (25)$$

Nach leichter Rechnung folgt damit aus (22) der dem allgemeinen Ansatz (23) entsprechende Ausdruck, nämlich

$$\begin{aligned} k_l - k_s &= \frac{1}{48} (-8 t^2 \eta^2 + 12 t^2 \eta^4 - 15 t^2 \eta^6) \Delta\varphi^2 \\ &+ \frac{1}{720} (-2 \eta^2 - 6 t^2 \eta^2 + 3 \eta^4 - 48 t^2 \eta^4 + 21 t^4 \eta^4) \Delta\varphi^4 \\ &+ \frac{\cos^2 \varphi}{720} (-12 t^2 \eta^2 + 6 t^2 \eta^4 + 12 t^4 \eta^4) \Delta\varphi^2 l^2 \\ &+ \frac{\cos^4 \varphi}{720} (-2 t^4 \eta^2 - t^4 \eta^4) l^4 \\ &+ \dots \dots \dots \quad (26) \end{aligned}$$

In diese Entwicklung, die gemeinsam mit der Ordnungszahl 5 von (17) die Durchrechnung der ersten Hauptaufgabe bis zu Bogenlängen nahe an 1500 km gestattet, wäre allerdings der — zunächst noch unbekannte — ellipsoidische Längenunterschied  $l$  einzuführen. Da sich aber der sphärische Längenunterschied  $\lambda$  vom ellipsoidischen Längenunterschied  $l$  nur um eine Differenz von der Ordnung  $\eta^2 \lambda$  bzw.  $\eta^2 l$  unterscheidet, ist es gestattet, in (26) an Stelle von  $l$  den sphärischen Längen-

unterschied  $\lambda$  zu setzen. Die Koeffizienten sind hiebei, der vorangegangenen Entwicklung entsprechend, für die mittlere Breite  $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$  zu berechnen, was in aller Strenge möglich ist, da mit der Auflösung des sphärischen Polardreiecks die reduzierte Breite  $\beta_2$  und damit auch die geographische Breite  $\varphi_2$  erhalten wird.

Obwohl, wie aus der eben mitgeteilten Bemerkung hervorgeht, die Formel (26) im angeschriebenen Umfang zu einem recht beachtlichen Anwendungsbereich führt, liegt in ihrer Form — sie ist doch eine nach Potenzen der Koordinatenunterschiede fortschreitende Potenzreihe — bei ihrer Anwendung innerhalb der ersten Hauptaufgabe eine gewisse Inkonsequenz vor, die bei der Durchrechnung wegen der notwendigen Berechnung der Potenzen der Koordinatenunterschiede störend und den Rechenaufwand vermehrend in Erscheinung tritt. Dieser Übelstand läßt sich aber leicht beheben, wenn man in (26) die Koordinatenunterschiede mit Hilfe der Gaußschen Mittelbreitenformeln wieder durch Bogenlänge und Azimut ersetzt. Denkt man sich (26) um die Glieder von der Ordnungszahl sechs erweitert und die erwähnte Substitution ausgeführt, so erhält man

$$\begin{aligned}
 k_l - k_s = & \frac{1}{96 N^2} \left[ (-16 t^2 \eta^2 - 8 t^2 \eta^4 + 2 t^2 \eta^6 - t^2 \eta^8) \cos^2 \alpha \right] s^2 \\
 & + \frac{1}{720 N^4} \left[ \begin{array}{l} (-2 \eta^2 - 6 t^2 \eta^2 - 5 \eta^4 - 42 t^2 \eta^4 - 9 t^4 \eta^4) \cos^4 \alpha \\ (-32 t^2 \eta^2 - 30 t^4 \eta^2 - 48 t^2 \eta^4 - 3 t^4 \eta^4) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\ (-2 t^4 \eta^2 \quad \quad \quad - t^4 \eta^4) \sin^4 \alpha \end{array} \right] s^4 \\
 & + \frac{1}{30240 N^6} \left[ \begin{array}{l} (\eta^2 - 33 t^2 \eta^2) \cos^6 \alpha \\ + (-30 \eta^2 - 78 t^2 \eta^2) \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha \\ + (-267 t^2 \eta^2 - 567 t^4 \eta^2 - 294 t^6 \eta^2) \cos^2 \alpha \sin^4 \alpha \\ + (-30 t^4 \eta^2 - 10 t^6 \eta^2) \sin^6 \alpha \end{array} \right] s^6
 \end{aligned} \tag{27}$$

Alle Funktionen der geographischen Breite sind hierin wieder für die Mittelbreite  $\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$  zu nehmen, während als Azimut nunmehr das mittlere Azimut  $\alpha_m = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$  einzuführen ist. Diese beiden Argumentwerte sind nach der Auflösung des sphärischen Polardreieckes bekannt, so daß (27) eine in aller Strenge gültige Lösung darstellt. Im übrigen läßt sich der Faktor  $k_l$  für sich allein ebenso behandeln, wie es im Vorstehenden für die Differenz  $k_l - k_s$  gezeigt wurde.

Nimmt man, um zu einer Vorstellung von der Konvergenz zu gelangen, eine Abschätzung der Größenordnungen in (27) vor, so findet man, daß für  $\varphi_m = \alpha_m = \frac{\pi}{4}$  das Glied von der Ordnungszahl sechs bei Bogenlängen um 1500 km in die Größenordnung der Millimeter gelangt; für  $s = \frac{N}{2}$ , also für etwa 3200 km, erreicht es den Wert von etwa 0,5 m. Vergleicht man damit das Glied mit  $s^4$ , so kann man

aus dem Größenverhältnis dieser beiden Glieder mit einiger Sicherheit darauf schließen, daß für die letztere Annahme die vernachlässigten Glieder höherer Ordnung schon den Betrag von etlichen Millimetern erreichen dürften. Man wird also den Anwendungsbereich von (27) mit etwa  $s = 3000$  km begrenzen müssen, wobei man wahrscheinlich Unsicherheiten in der Größenordnung einiger Millimeter in Kauf nimmt.

Um letzten Endes einen zusammenfassenden Überblick über die Konvergenz der beiden, die Lösung der ersten Hauptaufgabe bestimmenden Potenzreihen (17) und (27) zu gewinnen, geben wir für einige Bogenlängen den Umfang an, bis zu welchem diese Potenzreihen zu berechnen sind, wenn man für die Summen der vernachlässigten Glieder den Betrag von ungefähr einem Millimeter zuläßt. Der nachstehenden Abschätzung liegt die Annahme  $\varphi_1 = \alpha_1$  bzw.  $\varphi_m = \alpha_m = \frac{\pi}{4}$  zu Grunde; die beiden Potenzreihen wären für die angeführten Streckenlängen demnach zu berechnen bis:

$s$ in m	Potenzreihe (17)	Potenzreihe (27)
0		
50	$s$	$s^2$
150	$s^2$	$s^2$
500	$s^3$	$s^2$
1000	$s^4$	$s^4$
1500	$s^5 - s^6$	$s^6$
2500	$s^6 - s^7$	$s^6$

Ein kleines Beispiel möge die vorliegenden Ergebnisse zahlenmäßig belegen. Zwischen zwei Punkten des Besselschen Ellipsoids ( $\varphi_1 = 40^\circ$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ$ ,  $l = 20^\circ$ ) wurden die geodätische Strecke mit  $s = 2\,623\,003,820$  m und ihre Azimute mit  $250^\circ 23' 27''$ ,  $246\,992$  und  $41^\circ 00' 40''$ ,  $192\,835$  berechnet. Diesem Ergebnis entnehmen wir als Annahme für die erste Hauptaufgabe  $\varphi_1 = 40^\circ$ ,  $\alpha_1 = 250^\circ 23' 27''$ ,  $246\,992$ ,  $s = 2\,623\,003,820$  m und berechnen damit nach (17) zunächst den Faktor  $k_s$ . In der gleichen Reihenfolge wie in (17) angeschrieben, finden wir diesen Faktor als die Summe nachstehender Zahlenwerte:

$$\begin{array}{r}
 1,001\,9695\,601 \\
 - 0,000\,6150\,385 \ (s) \\
 - 0,000\,0120\,490 \ (s^2) \\
 + 0,000\,0348\,677 \ (s^3) \\
 + 0,000\,0002\,815 \ (s^4) \\
 - 0,000\,0007\,945 \ (s^5) \\
 - 0,000\,0000\,067 \ (s^6) \\
 + 0,000\,0000\,110 \ (s^7) \\
 \hline
 k_s = 1,001\,3768\,316.
 \end{array}$$

Die nunmehr mögliche Auflösung des sphärischen Polardreiecks ergibt mit  $\beta_1 = 39^\circ 54' 20''$ ,  $019996$ ;  $\beta_2 = 59^\circ 55' 00''$ ,  $688548$ .  $\alpha_2 = 41^\circ 00' 40''$ ,  $192056$  und  $\lambda = 20^\circ 01' 33''$ ,  $315204$ .

Daraus folgt  $\varphi_2 = 59^\circ 59' 59'' 999424$  und  $\varphi_m = 50^\circ$ ,

$$\alpha_m = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) = 33^\circ 12' 03'', 719524.$$

Mit den letzteren Werten ergibt sich nach (27)

$$- 0, 000 0776 390 (s^2)$$

$$- 0, 000 0030 570 (s^4)$$

$$- 0, 000 0000 825 (s^6)$$

---


$$k_l - k_s = - 0, 000 0807 785$$

und daraus  $k_l = k_s + (k_l - k_s) = 1, 001 2960 531$ .

Man erhält aus  $l = \lambda \frac{1}{k_l}$  den Wert  $l = 19^\circ 59' 59'', 999352$ , der mit dem im vorhinein bekannten Sollwert von  $20^\circ$  bis auf den linearen Betrag von rund 0,015 m übereinstimmt; eine ähnliche Übereinstimmung zeigt die errechnete geographische Breite  $\varphi_2$  mit ihrem Sollwert. Dieses Ergebnis wird man, da die Formel (17) mit  $s \doteq 2600$  km etwas über ihre Leistungsfähigkeit hinaus beansprucht ist, als durchaus befriedigend bezeichnen dürfen.

## Über Winkelreduktionen bei Absteckarbeiten

Von *W. Embacher*

Die Übertragung ingenieurtechnischer Entwürfe ins Gelände bezeichnet man als Absteckungsarbeit.

Es soll der Versuch unternommen werden, sämtliche Winkelreduktionen anzuführen, welche an den gerechneten und gezeichneten Entwurf angebracht werden müssen, um ihn sinngemäß auf die physische Erdoberfläche übertragen zu können. Diejenigen Verbesserungen, die infolge der Konvergenz der Lotlinien, wegen des Azimutunterschiedes Geodätische Linie-Vertikalschnitt und wegen der Refraktion anzubringen sind, seien nur der Vollständigkeit halber angeführt. Es soll hauptsächlich gezeigt werden, wie stark sich die Tatsache, daß die Lotrichtungen zueinander windschief sind, in verhältnismäßig kleinen Vermessungsbereichen, z. B. bei Tunnel- und Stollenabsteckungen, auswirken kann.

Die Richtung der Lotlinien weicht zunächst wegen der großen kontinentalen Geoidwellen von den Flächennormalen eines Rotationsellipsoides, als welches das Referenzellipsoid der Landesvermessung dient, ab; sie ist aber auch lokal bedingt, wenn durch eine Ansammlung oder durch ein Fehlen von Massen lokale Unstetigkeiten in der Dichte der Erdkrinde entstehen. Eine beliebige Ebene durch eine Ellipsoidnormale nennen wir Normalebene und ihr Schnitt mit dem Ellipsoid heißt Normal- oder Vertikalschnitt. Da sich die Flächennormalen des Rotationsellipsoides im allgemeinen nicht schneiden, ist die Verbindung zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$  des Ellipsoides durch die beiden Normalschnitte nicht eindeutig festgelegt, denn die Ebene durch die Normale in  $P_1$  und durch  $P_2$  ist im allgemeinen nicht ident mit der Ebene durch die Normale in  $P_2$  und durch  $P_1$ . Man definiert daher andere Kurven, die innerhalb eines bestimmten Bereiches durch zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt sind: die