

Paper-ID: VGI_196018



Über die Berechnung bestimmter Integrale durch Schleppiteration

Ludwig Starkl ¹

¹ *Wels*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **48** (6), S. 191–198

1960

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Starkl_VGI_196018,  
Title = {{\U}ber die Berechnung bestimmter Integrale durch Schleppiteration  
},  
Author = {Starkl, Ludwig},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {191--198},  
Number = {6},  
Year = {1960},  
Volume = {48}  
}
```



8. Die Berechnung der Blatteckenwerte

Nach Punkt 3. wären durch Interpolation aus den astronomisch bestimmten Punkten, für die außer den geographischen Koordinaten ebene Koordinaten aus der Rahmenausgleichung vorlagen, die ebenen Koordinaten der mit φ_i , λ_i festgelegten Blatteckpunkte zu berechnen gewesen. Bei unserer Bearbeitung wurden trotzdem die Formeln (14) zur Berechnung verwendet und auf Differenzen geprüft.

9. Zusammenfassung

Für die im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen erstmalig durchgeführte Ausgleichung von aerotriangulierten Streifen mit astronomisch bestimmten Paßpunkten wurde ein einfacher Vorgang vorgesehen. Von den Angaben war die astronomische Ortsbestimmung für die Streifenausgleichung wohl zu ungenau. Die Ausgleichung der Rahmenstreifen ergab einen Rahmenschlußfehler von 9,8 m im Y und 0,8 m im X . Die Ausgleichung aller Füllstreifen wurde voneinander unabhängig und mit Punkten durchgeführt, deren Koordinaten aus den Rahmenstreifen erhalten worden waren. Für die Ausgleichung jedes Streifens wurden nur der Maßstab und die Streifenrichtung im Anfangs- und Endmodell verwendet und ein kreisförmiger Verlauf für die Verbesserungskurven angenommen. Als ungefähre absolute Genauigkeit kann ein Punktlagefehler von ± 5 m und ein Höhenfehler von $\pm 7,5$ m angegeben werden. Die mittlere relative Genauigkeit beträgt rund ± 1 m.

* * *

Abschließend möchte ich Herrn Präsidenten *Dr. eh. Ing. K. Neumaier* für die Ratschläge und Unterstützung der Veröffentlichung, den Herren *Dipl.-Ing. Dr. techn. J. Kovarik* und *Dipl.-Ing. P. Waldhäusl* für die Redigierung und allen Mitarbeitern meinen Dank aussprechen.

Literatur

[1] *Jordan-Eggert-Kneißl*, Handbuch der Vermessungskunde, 10. Ausgabe, Stuttgart 1959, Band IV (2. Hälfte), S. 1121.

Über die Berechnung bestimmter Integrale durch Schleppiteration

Von *Ludwig Starkl*, Wels

Zusammenfassung

In der vorliegenden Studie wird die allgemeine Planimetergleichung für Umfahrungsplanimeter mit Integrierrolle auf ruhender Unterlage in vektoranalytischer Darstellung entwickelt und anschließend auf eine als Schleppplanimeter bezeichnete, verbesserte Form des Prytzschen Stangenplanimeters spezialisiert. Es wird nachgewiesen, daß mit dem Schlepp-Planimeter und auch mit dem Stangenplanimeter entgegen der mehrfach abgeleiteten [7, 8, 11, 15, 16, 18, 20, 34], aber bisher als unbefriedigend bezeichneten [36] Theorie desselben eine theoretisch strenge Lösung bestimmter Integrale (Flächeninhaltsbestimmung) durch Iteration möglich ist. Abschließend wird ein möglichst vollständiger, zeitlich geordneter Überblick über die bisherige einschlägige Literatur gegeben.

Bei den Grundplanimetern mit Zweipunktführung wird der eine Meßvorrichtung tragende Fahrarm $P'P$ von im allgemeinen konstanter Länge l so bewegt, daß ein Punkt P desselben auf dem Umfang bzw. der Randkurve $\xi(t)$ des gegebenen Flächenstückes und ein Punkt P' auf einer bestimmten Leitkurve $\eta(t)$ geführt wird. Die verschiedenen Planimeterkonstruktionen unterscheiden sich durch die spezielle Form der Leitkurven und durch die Art der auf dem Fahrarm angebrachten Meßvorrichtung. Im folgenden wird als Meßvorrichtung eine Meßrolle R mit einem scharfen, geriffelten Rand vorausgesetzt, deren Achse $o-o$ parallel zum Fahrarm und zur Zeichenebene liegt.

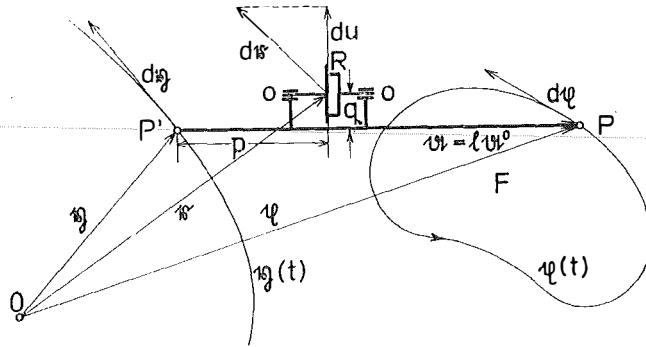


Abb. 1

Bei Annahme eines beliebigen Koordinatenursprunges O besteht zwischen den Ortsvektoren ξ und η eines Randkurvenpunktes P und eines korrespondierenden Leitkurvenpunktes P' nach Abb. 1 die Vektorbeziehung

$$\xi - \eta = \alpha \quad . . . (1)$$

wobei der Vektor $\alpha = \overrightarrow{P'P}$ von konstanter Länge l in der Form

$$\alpha = l\alpha^0 \quad . . . (2)$$

mit α^0 als Einheitsvektor in der Richtung α dargestellt werden kann. Der Auflagepunkt der Meßrolle R ist durch den Ortsvektor r bestimmt, für welchen mit Einführung des zum Vektor α senkrechten Einheitsvektors δ^0 nach Abb. 1 die Gleichung

$$r = \eta + p\alpha^0 + q\delta^0 \quad . . . (3)$$

besteht. Bei einer Elementarbewegung des Fahrarmes wird der Auflagepunkt der Meßrolle um das Vektordifferential dr verschoben, welches durch Differentiation von (3) mit

$$dr = d\eta + p d\alpha^0 + q d\delta^0 \quad . . . (4)$$

erhalten wird. Die Meßrolle besitzt die Eigenschaft, bei einer Verschiebung dr nur die Bewegungskomponente in Richtung der Rollenebene aufzunehmen. Diese Komponente beträgt nach Abb. 1

$$du = |dr| \sin (dr, \alpha) \quad . . . (5)$$

welcher Wert gleich ist dem Betrage des zur Zeichenebene senkrecht stehenden Vektorproduktes

$$du = \int du = dr \times \alpha^0 \quad . . . (6)$$

mit \mathfrak{k} als Einheitsvektor in der Koordinatenrichtung z . Mit (4) ergibt sich aus (6)

$$d\mathfrak{a} = (d\mathfrak{y} \times \mathfrak{a}^0) + (pd\mathfrak{a}^0 \times \mathfrak{a}^0) + (qdb^0 \times \mathfrak{a}^0) \quad \dots (7)$$

Das letzte Vektorprodukt in (7) hat den Wert Null, weil der Ableitungsvektor eines Einheitsvektors auf diesem senkrecht steht und daher db^0 und \mathfrak{a}^0 parallele Vektoren sind. Mit Rücksicht auf (2) resultiert somit aus (7)

$$l du = (d\mathfrak{y} \times \mathfrak{a}) + \frac{p}{l} (d\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) \quad \dots (8)$$

Das äußere Produkt $(d\mathfrak{y} \times \mathfrak{a})$ in (8) wird über die Identität

$$2(d\mathfrak{y} \times \mathfrak{a}) = (d\mathfrak{y} \times \mathfrak{a}) + (d\mathfrak{y} \times \mathfrak{a}) \quad \dots (9)$$

in 2 Schritten umgeformt. Vorerst wird das Vektordifferential $d\mathfrak{y}$ im zweiten Summenglied der Gleichung (9) durch den aus (1) folgenden Ausdruck

$$d\mathfrak{y} = d\mathfrak{x} - d\mathfrak{a} \quad \dots (10)$$

substituiert. In den beiden ersten Summanden der auf diese Weise erhaltenen Gleichung

$$2(d\mathfrak{y} \times \mathfrak{a}) = (d\mathfrak{y} \times \mathfrak{a}) + (d\mathfrak{x} \times \mathfrak{a}) - (d\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) \quad \dots (11)$$

wird der Vektor \mathfrak{a} in der Zerlegung (1) eingesetzt, wodurch mit

$$d(\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}) = (d\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}) - (d\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}) \quad \dots (12)$$

die endgültige Form

$$2(d\mathfrak{y} \times \mathfrak{a}) = (d\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}) - (d\mathfrak{y} \times \mathfrak{y}) - (d\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) + d(\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}) \quad \dots (13)$$

gewonnen wird. Mit diesem Ergebnis kann (8) in der Gestalt

$$l du = \frac{1}{2} (d\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}) - \frac{1}{2} (d\mathfrak{y} \times \mathfrak{y}) - \frac{l-2p}{l} \cdot \frac{1}{2} (d\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) + \frac{1}{2} d(\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}) \quad \dots (14)$$

geschrieben werden. Die Integration der hieraus folgenden skalaren Gleichung über die geschlossene Randkurve $\mathfrak{x}(t)$ liefert

$$l \oint du = \frac{1}{2} \oint |d\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}| - \frac{1}{2} \oint |d\mathfrak{y} \times \mathfrak{y}| - \frac{l-2p}{l} \cdot \frac{1}{2} \oint |d\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}| + \frac{1}{2} |\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}|_A^E \quad \dots (15)$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint |d\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}| &= F & \frac{1}{2} \oint |d\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}| &= F' \\ \frac{1}{2} |\mathfrak{y} \times \mathfrak{x}|_A^E &= \Delta F & \frac{1}{2} \oint |d\mathfrak{y} \times \mathfrak{y}| &= F'' \end{aligned} \quad \dots (16)$$

ergibt sich (15) in abgekürzter Schreibweise mit

$$l \oint du = F - \frac{l-2p}{l} F' - F'' + \Delta F \quad \dots (17)$$

In dieser Formel stellt F die vom Ortsvektor \mathfrak{x} bei der geschlossenen Umfahrung der Randkurve $\mathfrak{x}(t)$ überstrichene Fläche, d. h. den zu bestimmenden Flächen-

inhalt dar. Ebenso mißt das Kurvenintegral F'' jene Fläche, welche der Leitvektor η bei der zwangsläufigen Bewegung aus der Anfangslage A' in die im allgemeinen nicht damit zusammenfallende Endlage E' bestreicht. F' bedeutet die Fläche jenes Kreissektors, welche vom Fahrarm bei dessen Drehung um den Anfangs- und Endpunkt $A = E$ der Randkurvenumfahrung aus seiner Anfangslage in seine Endlage überstrichen wird. Die Differenz ΔF der absoluten Vektorprodukte ist gleich dem Flächenunterschied jener beiden Dreiecke, deren Grundlinie der Fahrarm in der Anfangs- bzw. Endlage und deren Spitze der angenommene Koordinatenursprung O ist. Wählt man den Anfangs- bzw. Endpunkt $A = E$ der Randkurvenumfahrung als Ursprung O des zur Ableitung der Gleichung (17) benutzten Koordinatensystems, dann wird $\xi(A) = \xi(E) = O$ und somit auch

$$\Delta F = O \quad . . . (18)$$

Bedeutet $2r$ den Durchmesser der Meßrolle R und n die Anzahl ihrer Umdrehungen, so wird

$$\oint du = 2r\pi n \quad . . . (19)$$

Mit (18) und (19) erhält man in bezug auf ein durch $A = E$ gelegtes Koordinatensystem die *allgemeine Gleichung für Umfahrungsplanimeter mit Integrierrolle auf ruhender Unterlage* mit

$$l\oint du = 2r\pi ln = F - \frac{l - 2p}{l} F' - F'' \quad . . . (20)$$

Durch Spezialisierung kann aus dieser Formel für den größten Teil aller Planimeterkonstruktionen (Polar-, Linear-, Radial-, Stangenplanimeter) die im einzelnen Fall geltende Formel auf einfache Weise hergeleitet werden. Eine ebenfalls in vektoranalytischer Darstellung entwickelte, allgemeine mathematische Theorie der Umfahrungsplanimeter wurde in der in [38], S. 125 erwähnten, mir leider nicht zugänglichen größeren Arbeit von *K. Ulbrich* [29] gegeben.

Das Prytzsche Stangenplanimeter, das auch als Beil-, Schneiden- oder Hatchet-Planimeter bezeichnet wird, ist dadurch gekennzeichnet, daß der Fahrarm $P'P$ an einem Ende eine scharfkantige, beim Gebrauch des Gerätes zur Zeichenebene senkrecht geführte Schneide oder Rolle trägt, deren zum Fahrarm parallele Ebene dem Leitpunkt P' nur eine Bewegung in der augenblicklichen Fahrarmrichtung erlaubt. Bei Umfahrung der Randkurve $\xi(t)$ beschreibt daher der Leitpunkt P' deren Schleppkurve als vom Gerät während der Bewegung erzeugte Leitkurve $\eta(t)$. Der Fahrarm $P'P$ ist hierbei immer Tangente an diese Schlepp- bzw. Leitkurve $\eta(t)$. Deshalb ist beim Stangenplanimeter stets

$$d\eta \times \alpha = O \quad . . . (21)$$

Die Integration der mit (21) aus (8) folgenden skalaren Gleichung liefert mit Rücksicht auf (16) und (19)

$$l\oint du = 2r\pi ln = \frac{2p}{l} F' \quad . . . (22)$$

Setzt man (22) in die allgemeine Gleichung (17) ein, erhält man die maßgebende Gleichung für das Stangenplanimeter mit

$$F = F' + F'' \quad . . . (23)$$

die zweckmäßig in der Form

$$F = 2 \dot{F}' - (F' - F'') \dots (24)$$

geschrieben wird. Die in (24) auftretende Differenz $(F' - F'')$ zwischen der Sektorfläche F' und der vom Leitstrahl überstrichenen Fläche F'' ist in der prinzipiellen Abb. 2 durch das Flächenstück $A'SE'A'$ gegeben. Ergibt sich für die Differenz $(F' - F'')$ eine ebenfalls in Abb. 2 dargestellte, verschränkte Figur $A'S_1S_2E'A'$, ist hierfür in der Literatur die Bezeichnung $(f' - f'')$ gebräuchlich, wobei f' und f'' die beiden, von dem sich überschneidenden Linienzug eingeschlossenen Teilflächen bedeuten.

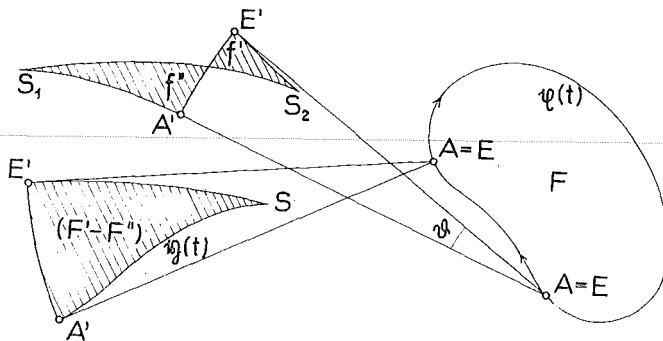


Abb. 2

Nach den bisher in methodischer Hinsicht vorgeschlagenen Verfahren wurde getrachtet, diese Differenz $(f' - f'')$ durch geeignete Wahl des Anfangspunktes der Umfahrung möglichst annähernd gleich Null zu machen, so daß gemäß (24) die Fläche F der doppelten Sektorfläche F' äquivalent wird:

$$F = 2 F' = l^2 \vartheta \dots (25)$$

Nach der von Runge [7] hergeleiteten Theorie gilt

$$(f' - f'') = \frac{1}{4} \int \rho^2 dF + \frac{1}{72 l^4} \int \rho^4 dF + \dots + \frac{2}{3} \int \left(\frac{\rho}{l} + \frac{\rho^3}{10 l^3} + \dots \right) \cos \psi \cdot dF \dots (26)$$

Hierin ist ρ der Radiusvektor vom Anfangspunkt $A = E$ der Umfahrung zum Fahrstift, $dF = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi$ das Flächenelement und ψ der Winkel zwischen Fahrstrahl und Fahrarm $P'P$. Formel (26) zeigt, daß die Differenz $(f' - f'')$ mit dem Verhältnis ρ/l stark abnimmt. Das erste Glied ist dem polaren Trägheitsmoment des zu planimetrierenden Flächenstückes proportional und wird daher ein Minimum, wenn der Schwerpunkt als Ausgangspunkt der Umfahrung gewählt wird. Zur weiteren Verminderung des positiven, systematischen Fehlers, der durch die Vernachlässigung der ersten Glieder von (26) in (25) entsteht, wird empfohlen [10, 18], an $l^2 \vartheta$ eine negative Korrektur anzubringen, welche eine Formvariante des Flächenstückes ist und von der Fahrarmlänge abhängt. Das letzte Glied in (26) wird angenähert eliminiert, wenn man mit einer um 180° gedrehten Fahrarm-Anfangslage eine zweite Messung vornimmt und beide Resultate mittelt. Jordan [27] verwendet zur gleich-

zeitigen Ausführung beider Umfahrungen ein Gerät mit zwei im Fahrstift gelenkig verbundenen Fahrarmen. *Pratelli* [34] schlägt eine Mittelbildung aus vier Umfahrungen mit diametral gegenüberliegenden Ausgangslagen vor. Um kontrollieren zu können, inwieweit $f' = f''$, wurde das Stangenplanimeter von *Hamann* [8], *Prytz* [12], *Kleritj* [13], *Menzin* [17] und *Viëtoris* [33] mit einfachen Vorrichtungen (Farbrolle, Zeichenstift) zur Aufzeichnung der Schleppkurve ausgestattet. *Viëtoris* geht dabei insofern systematisch vor, als er durch Probieren mit der Zirkelöffnung l den Randkurvenpunkt $A = E$ sucht, um den der Kreis mit dem Radius l eine durch mehr als eine volle Umfahrung erzeugte Schleppkurve $\eta(t)$ so teilt, daß $f' = f''$ ist.

Rein konstruktive Ergänzungen wurden von *Pregél* [20] und durch *von Sanden* [22] vorgeschlagen, die an Stelle der Schneide beiderseits des Fahrarmes zwei Schneidenränder im Abstand ν von demselben anbringen, um einerseits ein Kippen des Instrumentes zu verhindern und andererseits über den Wert der Abwicklungsdifferenz $2\nu\vartheta$ beider Rollen den zur Bestimmung von $F = l^2\vartheta$ erforderlichen Winkel ϑ unmittelbar ermitteln zu können. *Scott* [9] verwendet zur Messung des Bogens $l\vartheta$ eine Meßrolle mit zum Fahrarm senkrechter Ebene. Prinzipiell könnte das Stangenplanimeter entsprechend Abb. 1 mit einer Meßrolle ausgestattet werden. Ein derart ergänztes Gerät wurde einleitend als Schlepp-Planimeter bezeichnet. Indem F' aus (22) in Funktion der Meßrollenablesung n ausgedrückt und in (23) eingeführt wird, ergibt sich als maßgebende Gleichung für das Schlepp-Planimeter

$$F = \frac{r\pi l^2}{p} n + F'' \quad . . . (27)$$

Ermöglicht das Gerät entsprechend den als „Tractigraph“ bzw. „Tractorio-graph“ oder als „Schleppe“ bezeichneten Vorbildern die Aufzeichnung der Schleppkurve, dann läßt sich die Gültigkeit eines bisher nicht beachteten, theoretisch exakten Iterationsverfahrens nachweisen. Zur strengen Bestimmung des Flächeninhaltes F ist nach (24) neben der Kenntnis von F' auch die Ermittlung der von der Schleppkurve und dem Bogen $l\vartheta$ begrenzten Differenzfläche ($F' - F''$) erforderlich, die naheliegenderweise wieder mit der Schleppe vorgenommen wird. Die Differenzfläche ($F' - F''$) ist zu diesem Zwecke in einem Zuge zu umfahren, wodurch neuerdings eine korrespondierende Schleppkurve erhalten wird, so daß sich der Wert ($F' - F''$) entsprechend dem Zusammenhang (24) ebenfalls in Funktion einer weiteren Sektor- und Differenzfläche ergibt. Wird dieses Verfahren fortgesetzt, ergibt sich aus (24) durch laufendes Einsetzen der Iterationsformel

$$F_{\nu}' - F_{\nu}'' = 2 F'_{\nu+1} - (F'_{\nu+1} - F''_{\nu+1}) \quad . . . (28)$$

welche die stetig kleiner werdenden Differenzflächen bestimmt, die unendliche Summe

$$F = 2 \sum_{\nu=0, 1, 2, \dots} (-1)^{\nu} F_{\nu}' = 2 (F_0' - F_1' + F_2' - + \dots) \quad . . . (29)$$

bzw. mit (27)

$$F = 2 \frac{r\pi l^2}{p} \sum (-1)^{\nu} n_{\nu} = 2 \frac{r\pi l^2}{p} (n_0 - n_1 + n_2 - + \dots) \quad . . . (30)$$

Die Konvergenz der alternierenden Reihen (29) bzw. (30) ist einfach nachzuweisen. Nach dem *Leibniz*schen Kriterium ist eine Reihe mit alternierenden Vor-

zeichen dann konvergent, wenn die Reihenglieder monoton abnehmen und mit wachsendem ν gegen Null streben. Zu diesem Nachweis wird die Gleichung (28) in der Form

$$F_{\nu}' - F_{\nu}'' = F_{\nu+1}' + F_{\nu+1}'' \quad . . . (31)$$

geschrieben, woraus folgt, daß

$$F_{\nu}' > F_{\nu+1}' \quad . . . (32)$$

und weil offenbar keine untere Schranke für F_{ν}' existiert, auch

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_{\nu}' = 0 \quad . . . (33)$$

w. z. b. w.

Literatur zum Stangenplanimeter:

- [1] 1752 *Suardi G.*: Nuovi istrumenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne, Brescia.
- [2] 1886 *Prytz H.*: Tekniske Forenings Tidsskrift.
- [3] 1894 *Prytz H.*: The hatchet planimeter, Engineering 57, 687, 813.
- [4] 1894 *Kundsen C.*: Le Planimètre hachette ou le stangplanimètre de H. Prytz, Capitaine, est fabriqué chez Cornelius Kundsen, ingénieur opticien, Copenhague, imprimerie de Hoffensberg.
- [5] 1894 *Hill F. W.*: The hatchet planimeter, Phil. Mag. (5) 38, 265–269.
- [6] 1894 *Poulain A.*: Le stang-planimètre, Mathesis 5, Suppl. 1–10.
- [7] 1895 *Runge C.*: Das Stangenplanimeter, Z. Vermessungswesen 24, 321–331.
- [8] 1896 *Hamann J.*: Über das Stangenplanimeter, insbesondere das Stangenplanimeter mit Rolle, Z. Vermessungswesen 25, 643–650.
- [9] 1896 *Scott E. K.*: An improved stang planimeter, Engineering 62, 205.
- [10] 1896 *N. N.*: Goodman's hatchet-planimeter, Engineering 62, 255–256.
- [11] 1896 *Gentilli A.*: Das Beil-Planimeter, Schweiz. Bauztg. 28, 61–64.
- [12] 1897 *Prytz H.*: The hatchet planimeter and tractigraph, Engineering News 57, 386.
- [13] 1897 *Kleritj L.*: Tractoriograph und Konstruktion der transzendenten Zahlen „ π “ und „ e “ sowie Konstruktion von n seitigen, dem Kreise umbeschriebenen regelmäßigen Polygonen, Dingers polytechn. J. 305, Heft 10 und 11.
- [14] 1898 *Korselt A.*: Über den Tractoriographen von Kleritj und das Stangenplanimeter, Z. Math. Phys. 43, 312–318.
- [15] 1898 *Schleiermacher L.*: Das Stangenplanimeter von Prytz, Z. Vermessungswesen 27, 408–411.
- [16] 1899 *Jordan W.*: Stangenplanimeter Prytz, Z. Vermessungswesen 28, 315–317.
- [17] 1906 *Menzin A. L.*: The tractigraph, an improved form of hatchet planimeter, Engineering News 56, 131–132.
- [18] 1908 *Schreiber A.*: Zur Theorie des Stangenplanimeters, Z. Vermessungswesen 37, 689–702.
- [19] 1908 *Hammer E.*: Planimeter System Pregél, Z. Instrumentenkunde 28, 373.
- [20] 1909 *Pregél Th.*: Theorie des Präzisions-Stangenplanimeters System Pregél, Chemnitz.
- [21] 1910 *Hartner-Doležal*: Hand- und Lehrbuch der Niederen Geodäsie, I. Bd., 2. Hälfte, S. 1083, Wien.
- [22] 1911 *V. Sanden H.*: Über eine zweckmäßige Konstruktion des Stangenplanimeters, Z. Math. Phys. 59, 314–318.
- [23] 1912 *Scribanti A.*: Il planimetro a scure considerato come integrafo per equazioni differenziali, Atti Torino 48, 14–18.
- [24] 1912 *Scribanti A.*: Ancora intorno al planimetro a scure applicato all'integrazione di equazioni differenziali, Atti Torino 48, 799–814.
- [25] 1913 *Scribanti A.*: Complementi e varianti alla teoria del planimetro a scure considerato come apparecchio polare di quadratura, Nuovo Cimento (6) 5, 329–350.

- [26] 1913 *Pascal E.*: Il planimetro a scure di Prytz trasformato in integrafo per una notevole equazione differenziale. Napoli Rend. (3) 19, 23—29.
- [27] 1914 *Jordan W., Reinhertz C., Eggert O.*: Handbuch der Vermessungskunde II (8. Aufl.), 150—151.
- [28] 1930 *Montigel R.*: De stang-planimeter von Prytz, Med. v. d. Vereen. v. Off. v. d. Topogr. Diensti Ned. Indie, 1—15.
- [29] 1930 *Ulbrich K.*: Allgemeine mathematische Theorie der Umfahrungsplanimeter in vektoranalytischer Darstellung. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 28, Nr. 1—4.
- [30] 1932 *Sparks R.*: The hatchet planimeter, J. Franklin Inst. 213, 661—667.
- [31] 1934 *Lüdemann K.*: Über die Genauigkeit von Flächenberechnungen mit dem Beilschneidenplanimeter H. Prytz, Z. Vermessungswesen 63, 259—264.
- [32] 1934 *Berroth A.*: Beitrag zum Schneidenplanimeter, Schweiz. Z. Vermessungswesen 32, 1—11.
- [33] 1939 *Viëtoris L.*: Die Schleppe als Planimeter, Z. Angew. Math. Mech. 19, 120.
- [34] 1939 *Pratelli G.*: Planimetro a scure, Riv. Catasto Serv. tecn. erar. 6, 183—192.
- [35] 1940 *Hirvonen R.*: Tankoplanimetri, Mannmittauslehti, Helsinki.
- [36] 1949 *Meyer zur Capellen W.*: Mathematische Instrumente, 268—270, Leipzig.
- [37] 1950 *Ackerl F.*: Geodäsie und Photogrammetrie, I. Teil, 41—42, Wien.
- [38] 1951 *Willers Fr. A.*: Mathematische Maschinen und Instrumente, 178—181, Berlin.

Referat

Prof. Dr. A. A. Isotow in Wien und Graz

Im Frühjahr hatten die Technischen Hochschulen in Wien und Graz, die Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung und der Österreichische Verein für Vermessungswesen die große Freude und Ehre, einen der führenden sowjetischen Geodäten, Herrn Prof. Dr. A. A. Isotow, den Vizedirektor der geodätischen Spezialhochschule, des „Moskauer Institutes für Ingenieure der Geodäsie, Aerophotogrammetrie und Kartographie“ (MIIGAIK), als Gast in Österreich begrüßen zu können. Höhepunkte dieses Besuches waren die beiden Vorträge, die Prof. Isotow im Rahmen des Vereines an den Technischen Hochschulen in Wien (3. Mai) und Graz (6. Mai) hielt, und über welche im folgenden kurz berichtet werde.

Der Wiener Vortrag „Der gegenwärtige Stand und die Aufgabe der Geodäsie“ rollte in großen Zügen die modernen Probleme der Geodäsie auf, die teils durch die kontinentale Ausweitung der geodätischen Aufgaben, teils durch die stürmische Entwicklung der physikalischen und astronomischen Hilfsmittel entstanden sind. Die Berechnung großer astronomisch-geodätischer Netze macht nicht nur eine Genauigkeitssteigerung erforderlich, welche durch den gegenwärtigen hohen Stand im Instrumentenbau gewährleistet erscheint, der aber andererseits durch den systematischen Einfluß der Seitenrefraktion gewisse Grenzen gezogen sind. Vielmehr ist eine exakte Reduktion aller Messungen im Sinne einer Projektion auf die Bezugsfläche notwendig, damit die Projektionsmethode die ältere, als unzulänglich erkannte Methode der Netzausbreitung endgültig ablösen kann. Es ist klar, daß der Vortragende dabei mit berechtigtem Stolz auf die theoretischen Leistungen der sowjetischen Geodäten, insbesondere seines Lehrers *Krassowskij* sowie auf das astronomisch-gravimetrische Nivellement *Molodenskij's* hinwies.

Die Entwicklung der modernen Entfernungsmesser, wie des Geodimeters und des Tellurometers, eröffnet die Möglichkeit, die Triangulation durch die Trilateration zu ersetzen oder noch besser beide Verfahren entsprechend zu verbinden. Dabei erweist sich die Kenntnis der Lichtgeschwindigkeit von fundamentaler Bedeutung. Aber auch hinsichtlich der praktischen Durchführung der Triangulationen hat man neue Wege versucht. So erwähnte der Vortragende das ungarische Prinzip des analytischen Aufbaues der Fundamentaltriangulierung aus dem beobachteten Netze niederster Ordnung (*E. Regöczy*), das allerdings in großen Ländern auf theoretische und praktische Schwierigkeiten stößt. In diesem Zusammenhang ist auch die von *M. Hotine* vorgeschlagene räumliche Triangulierung zu nennen, die zwar die Reduktionsschwierigkeiten beseitigt, dafür aber an der Messung exakter Zenitdistanzen scheitern dürfte.