

Paper-ID: VGI_196109



Über die Auswertung affin deformierter Modelle

Karl Hubeny ¹

¹ *Graz, Techn. Hochschule, Rechbauerstr. 12*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **49** (3), S. 73–79

1961

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Hubeny_VGI_196109,  
Title = {{\U}ber die Auswertung affin deformierter Modelle},  
Author = {Hubeny, Karl},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {73--79},  
Number = {3},  
Year = {1961},  
Volume = {49}  
}
```



len in Abb. 7 die Kennlinien eines schlechten Libellenkörpers gezeigt werden. Es handelt sich um einen Libellenkörper mit 12 mm Durchmesser und 50 mm Länge. Um die Verlässlichkeit der erhaltenen Kennlinien zu zeigen, wurden sowohl hebend (rechts) als auch senkend (links) die Kennlinien je zweimal aufgenommen. Die zusammengehörigen Kennlinien stimmen sehr gut überein. In Abb. 8 sehen wir gleichfalls die je zweimal aufgenommenen Kennlinien eines Libellenkörpers mit 14 mm Durchmesser und 65 mm Länge: links für die Hebung, rechts für die Senkung des Prüfarmendes. Man erhält hier Kennlinien, die nur durch kleinere Störungen beeinflusst sind und die für kleinere Ausscheidungen an der inneren Libellenwand charakteristisch sind.

Wir nannten den hier beschriebenen Libellenprüfer einen halbautomatischen Libellenprüfer, weil die Koinzidenz der Blasenenden durch Beobachtung und Handeinstellung erfolgt. Man könnte auch dies unschwer automatisieren, doch hätte diese Lösung in dem vorliegenden Fall bei Verlust der Einfachheit nur relativ wenig praktische Bedeutung, da ja ein Beobachter mit Rücksicht auf die kurze Bewegungszeit der Blase sowieso erforderlich ist. Dagegen hat eine solche Automatisierung bei der Bedienung mehrerer solcher Libellenprüfer wohl praktische Vorteile.

Die automatische Einstellung der Blasenenden kann immerhin auch bei einem Libellenprüfer dann nützlich sein, wenn wir den hier erörterten Grundsatz der Libellenprüfung auf Sekundenlibellen übertragen wollten. Um die Einwirkung der Trägheitskräfte wesentlich herabzusetzen und die speziellen Parswerte entsprechend genau zu erhalten, müßte man dann die Hebegeschwindigkeit des Prüfarmes ganz bedeutend herabsetzen, wodurch die Beobachtungszeit sich ganz bedeutend vergrößern würde. Dann hätte die automatische Einstellung nicht nur aus Zeitersparnis, sondern auch deshalb einen Vorteil, weil die Körperwärme des Beobachters die sehr empfindliche Sekundenlibelle nicht beeinflusst.

Bezogene Literatur:

[1] *Tarczy-Hornoch*: Ein neuer automatischer Libellenprüfer für Sekundenlibellen. Erscheint in der Zeitschrift: *Geofisica pura e applicata*, Milano.

[2] *Drodofsky*: Libellen mit Anzeige durch Glasblasen. Deutsche Geodätische Kommission Reihe C, Heft Nr. 17, München, 1956.

Über die Auswertung affin deformierter Modelle

Von *Karl Hubeny, Graz*

Die Erzeugung und Auswertung eines in der z -Richtung affin deformierten Modells besitzt sicherlich eine gewisse, unter Umständen vielleicht sogar erhebliche Bedeutung für die Konstruktion von photogrammetrischen Kartiergeräten. Kann man nämlich dem Modell in der z -Richtung beliebige Maßstäbe erteilen, so kann die Kammerkonstante des Auswertegerätes für verschiedene Kammerkonstanten der Aufnahmekammer innerhalb enger Schranken festgehalten werden, andererseits kann man aus konstruktiven Gründen (Auswertung von Weitwinkelaufnahmen) eine gerade noch mögliche Kammerkonstante in das Auswertegerät einführen und diese für alle Fälle der Auswertung beibehalten,

Liegen zueinander parallele Aufnahmerichtungen vor (wie z. B. in der Erdbildmessung), so findet man für die durch ein bestimmtes Verhältnis zwischen den Kammerkonstanten f und f_a der Aufnahme- und der Auswertekammer erzeugte affine Deformation des Modells in Richtung der Aufnahmeachsen geometrische Gegebenheiten vor: Alle in dieser Richtung liegenden Strecken müssen nämlich mit dem Faktor $m_a = \frac{f_a}{f}$ reduziert eingeführt werden; alle Dimensionen des Modells in Richtung der Aufnahmeachsen sind dann, um wieder ihre Sollwerte zu erlangen,

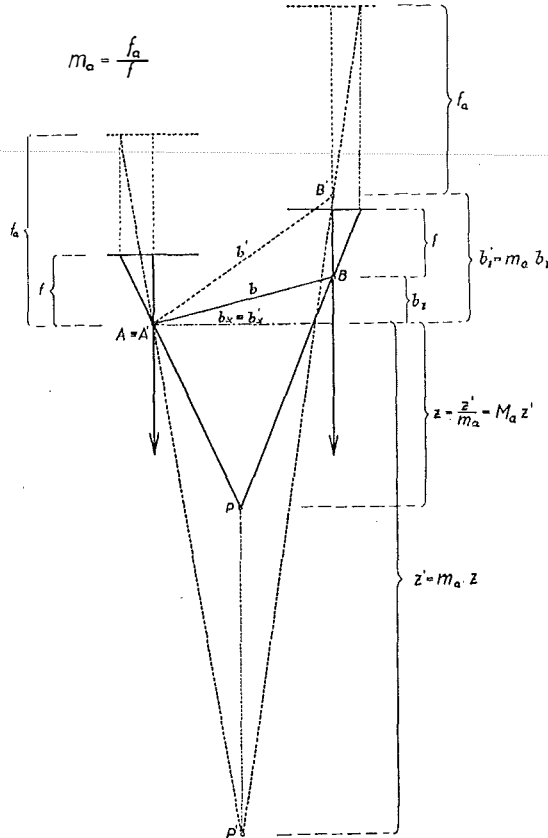


Abb. 1

mit dem Faktor $M_a = \frac{1}{m_a} = \frac{f}{f_a}$ zu multiplizieren (Abb. 1). Soweit, d. h. unter der vorhin getroffenen Voraussetzung, liegen also die Dinge recht einfach. Es bleibt nun zu untersuchen, wie bei nicht parallelen oder, im Hinblick auf die Luftaufnahme, bei geringen und bei einem Bildpaar verschiedenen Abweichungen der beiden Aufnahmerichtungen von der Lotrechten eine affine Deformation des Modells möglich ist, welche Modellverbiegungen daraus entstehen und durch welche Maßnahmen diese behoben werden können.

Als Grundlage unserer Überlegungen möge die Abbildung 2 dienen. Wir haben darin ein Aufnahme paar mit konvergierenden, von der Lotrichtung abweichenden

Aufnahmerichtungen dargestellt und hierbei die Annahme so weit spezialisiert, daß beide Aufnahmerichtungen in der Zeichenebene liegend, also die Bildebenen senkrecht zu dieser, angenommen werden. Indem wir etwa den Punkt A festhalten, erteilen wir dieser Figur eine affine Deformation in der z -Richtung, d. h. wir multiplizieren die Maßzahlen aller in dieser Richtung liegenden Strecken mit einem Faktor m_a , lassen hingegen die Dimensionen der Figur in den beiden anderen Richtungen des Koordinatensystems unverändert. Es entsteht damit eine der ursprünglichen Anordnung entsprechende, strichliert gezeichnete und mit gestrichenen Bezeichnungen versehene Figur, aus der wir die aus der Transformation folgende Gegebenheiten leicht ablesen können.

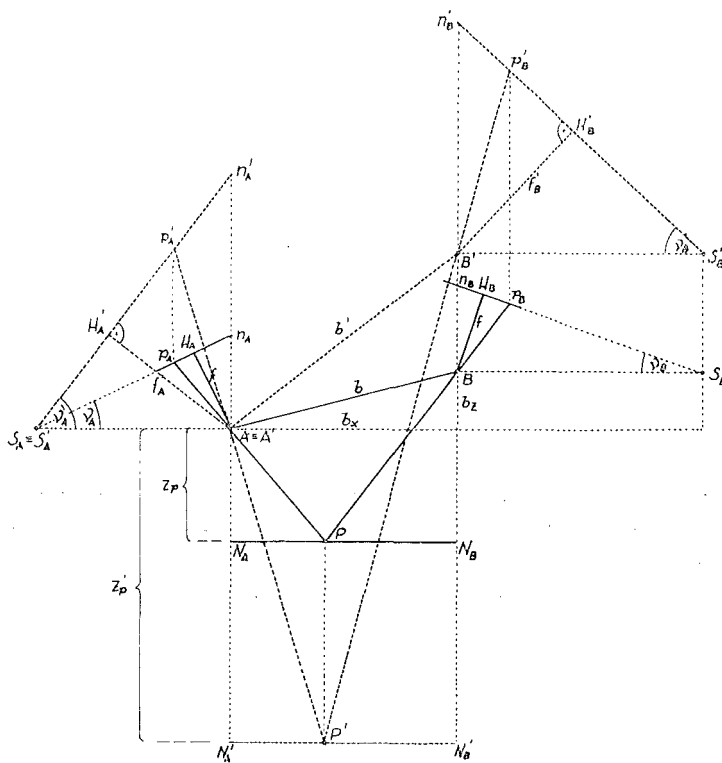


Abb. 2

Wir halten zunächst fest: Die beiden, auf die Horizontebene durch einen Geländepunkt P bezogenen Nadirpunkte N_A und N_B gelangen, in der z -Richtung verschoben, in die Lagen $N_{A'}$ und $N_{B'}$; damit dies möglich ist, müssen offenbar die Bildnadire n_A und n_B in $n_{A'}$ und $n_{B'}$ zu liegen kommen, wobei

$$\frac{Z'_{P'}}{Z_P} = \frac{\overline{A'n_{A'}}}{\overline{An_A}} = \frac{\overline{B'n_{B'}}}{\overline{Bn_B}} = m_a$$

sein muß. Die beiden Bildebenen sind also so zu orientieren, daß die Bildnadire n_A, n_B in der z -Richtung verschoben an die Stellen $n_{A'}, n_{B'}$ gelangen und dabei die Schnittgeraden S_A, S_B der Bildebenen mit den Horizontalebenen durch A und B in den neuen Stellen der letzteren durch A' ($\equiv A$) und B' ihre Lage beibehalten.

Es entstehen neue und durch die Nadirdistanzen v'_A, v'_B weiter definierte Lagen der Bildebenen, wobei jeweils die Bildnadire in der z -Richtung verschoben sind und die Schnittgeraden zwischen Bildebene und zugeordneter Horizontebene in der letzteren erhalten bleiben.

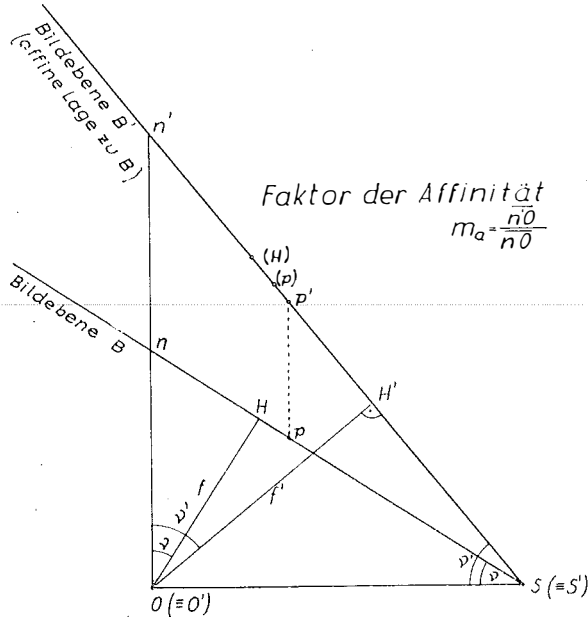


Abb. 3

Die weiteren Überlegungen werden sehr vereinfacht, wenn wir eines der beiden Elemente der Abbildung 2 herausgreifen und gesondert betrachten (Abb. 3). Wir können dabei sogar die einschränkende Annahme, die der Abbildung 2 zugrunde liegt, fallen lassen und als Zeichenebene die beliebig orientierte Ebene der Nadirdistanz annehmen.

Aus Abbildung 3 lesen wir ab: $\overline{On} \cdot m_a = \overline{O'n'}$,
 also ist $\overline{OS} \cdot \text{tg } v \cdot m_a = \overline{O'S'} \cdot \text{tg } v' \quad (\overline{OS} = \overline{O'S'})$

und daher
$$\frac{\text{tg } v'}{\text{tg } v} = m_a \quad \dots (1)$$

Ist also der Faktor der affinen Deformation und die ursprüngliche Nadirdistanz bekannt, so läßt sich die affin zugeordnete Nadirdistanz nach (1) mit

$$\text{tg } v' = m_a \text{tg } v \quad \dots (2)$$

berechnen. Weiter ergibt sich $\frac{f}{\sin v} = \overline{OS} = \overline{O'S'} = \frac{f'}{\sin v'}$

und daraus
$$f' = f \frac{\sin v'}{\sin v} \quad \dots (3)$$

welchen Ausdruck man für kleinere Werte von v — dann ist $\sin v \doteq \text{tg } v$ — durch die Näherung

$$f' \doteq m_a f \quad \dots (3a)$$

ersetzen könnte.

Die Betrachtung der Abbildung 3 liefert aber noch andere Ergebnisse, die wir zunächst hinsichtlich der Orientierung der Bildebene in ihrer Affinstellung B' betrachten. Der Nadirpunkt n in B gelangt nach n' in B' ; der Bildhauptpunkt H nimmt, da die Strecke \overline{Hn} beim Einlegen des Negativs in die Ebene B' erhalten bleibt, mit $\overline{n'(H)} = \overline{nH}$ die Lage (H) ein. Die Senkrechte vom Projektionszentrum auf B' definiert hingegen mit ihrem Durchstoßpunkt H' den Bildhauptpunkt der Auswertekammer, der gegenüber dem ursprünglichen Bildhauptpunkt den in der Ebene der Nadirdistanz zu messenden Abstand $\overline{H'(H)}$ zeigt.

Da $\overline{Hn} = f \operatorname{tg} \nu$ und $\overline{H'n'} = f' \operatorname{tg} \nu'$ ist, ergibt sich die notwendige Verschiebung des Bildhauptpunktes gegenüber dem Hauptpunkt der Auswertekammer mit

$$\overline{H'(H)} = v = \overline{H'n'} - \overline{Hn} = f' \operatorname{tg} \nu' - f \operatorname{tg} \nu,$$

wobei die Strecke v in der Richtung von S' gegen H' positiv gezählt wird. Substituiert man in der zuletzt angeschriebenen Differenz aus (2) und (3), so erhält man

$$v = f \operatorname{tg} \nu \left(m_a \frac{\sin \nu'}{\sin \nu} - 1 \right), \quad \dots (4)$$

wobei man für kleine Nadirdistanzen zufolge

$$\frac{\operatorname{tg} \nu'}{\operatorname{tg} \nu} \doteq \frac{\sin \nu'}{\sin \nu}$$

als Näherung den Ausdruck $v = f \operatorname{tg} \nu (m_a^2 - 1)$

verwenden kann. Dem Bildhauptpunkt des ursprünglichen Bildes ist also beim Einlegen in das Auswertegerät gegenüber dem Hauptpunkt der Auswertekammer eine der Ebene der Nadirdistanz parallele Verschiebung nach (4) zu erteilen, damit der Bildnadir, wie vereinbart, an die Stelle n' zu liegen kommt.

Die Abbildung 3 läßt noch einen weiteren für die Beurteilung des Vorganges äußerst wichtigen Zusammenhang ablesen: Ein irgendeinem Raumpunkt P ursprünglich konjugierter Bildpunkt p müßte nach der affinen Deformation, in der z -Richtung in B' projiziert, dort in die Lage p' gelangen. Die Strecke \overline{pn} ist nun aus dem Meßbild fest vorgegeben; breitet man das Meßbild in B' aus, indem man seinen Bildnadir n in den Punkt n' legt, so gelangt der Bildpunkt p in die Lage (p). Der der Auswertung dadurch zugrunde gelegte Bildpunkt (p) weist also gegen jene Lage, die ihm eigentlich zukommen müßte — die Lage in p' — eine Verschiebung im Ausmaße von $d\nu = \overline{p'n'} - \overline{pn}$ auf und müßte daher um diesen Betrag in Richtung gegen den Punkt S' verschoben werden. Diese notwendige Verschiebung folgt — wir wollen sie ebenso wie v nach (4) von S' weg positiv zählen — aus

$$\overline{pn} \cos \nu = \overline{p'n'} \cos \nu', \quad \overline{p'n'} = \overline{pn} \frac{\cos \nu}{\cos \nu'}$$

mit $d\nu = \overline{pn} \left(\frac{\cos \nu}{\cos \nu'} - 1 \right) \quad \dots (5)$

oder, wenn wir den Abstand eines Bildpunktes vom Bildnadir allgemein mit r be-

zeichnen, aus $d\nu = r \left(\frac{\cos \nu}{\cos \nu'} - 1 \right) \quad \dots (5a)$

Überlegt man, daß

$$\nu' \doteq m_a \nu$$

ist, so gelangt man vom vorstehenden Ausdruck leicht zur Näherungsformel

$$d\nu = \frac{1}{2} r \nu^2 \left(m_a^2 - 1 \right). \quad . . . (5b)$$

Diese Formel läßt nun zunächst die Abschätzung zu, wie weit eine affine Deformation ohne besondere Vorkehrungen überhaupt möglich ist. Schreiben wir z. B. vor, es dürfe $d\nu$ den Betrag von $\pm 0,01$ mm nicht überschreiten (eine Annahme also für die Meßgenauigkeit in der Bildebene) und nehmen wir weiter $r = \pm 100$ mm, $\nu = \pm 3^\circ$ an, so ergibt sich aus (5 b) $0,95 < m_a < 1,05$, d. h. die affine Deformation darf nur innerhalb dieser Grenzen für den Affinitätsfaktor stattfinden. Sehr kleine Nadirdistanzen, um $\pm 1^\circ$, würden bei sonst gleichen Annahmen Affinitätsfaktoren im Bereiche zwischen 0,45 und 1,35 zulassen.

Die zuletzt gewonnenen Ergebnisse gestatten zwei Feststellungen, nämlich: Eine praktisch ins Gewicht fallende affine Deformation — etwa im Betrage zwischen 0,5 und 1,5 — verursacht zufolge (5) schon bei den üblichen Nadirdistanzen Modellverbiegungen, die über die Größenordnung der durch Meßfehler entstehenden Verbiegungen hinausgehen, ist also nicht möglich. Gleichzeitig gelangen wir aber aus der Formel (5) vorstehenden Zeile zu dem Schluß, daß beliebige Affinitätsfaktoren benützt werden können, wenn man die Bildebene B , d. h. das Negativ, mit dem Faktor $k = \frac{\cos \nu}{\cos \nu'}$ in Richtung der Nadirdistanz gestreckt oder gestaucht unter Beachtung von $n \equiv n'$ in die Bildebene B' einlegt. Dann ist nämlich die aus der Affinität folgende Bedingung

$$\overline{pn} \cos \nu = \overline{p'n'} \cos \nu' \quad . . . (6)$$

streng erfüllt und ein Bildpunkt p liegt immer an jener Stelle, d. h. in p' , wo er zufolge der affinen Transformation liegen müßte.

In weiterer Folge wirft sich damit natürlich die Frage auf, wie man die eben formulierte Voraussetzung erfüllen könnte. Notwendig für jede Maßnahme in dieser Richtung ist die — zumindest genäherte — Kenntnis von Größe und Richtung der Nadirdistanz, welche Werte z. B. aus der Angabe der Dosenlibelle genähert hervorgehen; ebenso würde eine bestmögliche relative und absolute Orientierung der bereits affin deformierten Büschel zur Kenntnis von ν' führen, woraus sich mit dem gewählten Wert für m_a wieder ν ergibt. Durch Umphotographieren des Negativs bei streifenweiser Belichtung (Streifen senkrecht zur Ebene der Nadirdistanz) und einer der Formel (6) entsprechenden gleichzeitigen Bewegung der Negativ- oder der Bildebene kann die nach (5) notwendige Verschiebung für jedes Meßbild optisch erzeugt werden. Derart umgebildete Negative ermöglichen — zumindest theoretisch — für jeden beliebigen Affinitätsfaktor den streng richtigen Auswertevorgang; praktisch wird natürlich die bei der Bestimmung der Nadirdistanz in ihrer Richtung erreichte Genauigkeit den noch möglichen Affinitätsfaktor nach oben und unten hin begrenzen.

Der hier geschilderte Vorgang ist bei Auswertegeräten mit optischer und mit mechanischer Rekonstruktion des Strahlenganges möglich. Geräte auf mechanischer Grundlage lassen die notwendige Korrektur auch durch relativ einfache konstruktive Maßnahmen im Auswertegerät selbst zu. Führt man nämlich in die Formel (5) einen Extremwert für m_a im Betrage von, sagen wir, $m_a = 3$ ein und legt man für die

anderen Größen Grenzen mit $r = \pm 100$ mm, $\nu = \pm 5\%$ fest, so erreicht das Maximum der Bildpunktverschiebung den Betrag von etwa $\pm 2,5$ mm. Diese relativ kleine Korrektur läßt sich bei Auswertegeräten mit mechanischer Rekonstruktion des Aufnahmevorganges ziemlich leicht herbeiführen. Man denke z. B. an die mechanischen Gegebenheiten eines Auswertegerätes des Typs Wild B 8. Bei dieser Konstruktion führt der Lenker das Hauptglied des Betrachtungssystems in einem zur Bildebene parallelen Kreuzschlitten, dessen azimutale Orientierung natürlich ohne jeden Einfluß auf die Funktion des Gerätes ist. Man kann sich deshalb diesen Kreuzschlitten um die Hauptnormale der Kammer drehbar angeordnet denken, so daß immer die eine seiner beiden Bewegungsrichtungen parallel zur Ebene der jeweiligen Nadirdistanz eingestellt werden kann. Die Formel (5) erklärt nun die im Bilde parallel zur Ebene der Nadirdistanz notwendige Bildpunktverschiebung als lineare Funktion des Abstandes des betrachteten Punktes vom Nadirpunkt; diese kann daher mit einem vor dem Betrachtungssystem angeordneten, von diesem mitgeführten und proportional dem Abstand vom Nadirpunkt gesteuerten optischen Mikrometer leicht und sehr genau erzeugt werden. Demnach wäre auf jenem der beiden Schlitten des Kreuzschlittens, dessen Richtung in die Ebene der jeweiligen Nadirdistanz gedreht wird, bildseitig vor dem Betrachtungssystem mit seiner Drehachse senkrecht zur Ebene der Nadirdistanz — d. h. senkrecht zur Bewegungsrichtung des Schlittens — eine planparallele Platte anzuordnen, der ein dem Abstand vom Bildnadir proportionaler, nach (5) mit der Nadirdistanz und dem Affinitätsfaktor variabler linearer Steuerungsimpuls erteilt wird. Die nach (5) notwendige Korrektur kann auf diese Weise automatisch und theoretisch streng vollzogen werden; man könnte darüber hinaus noch die notwendige Verschiebung des Bildhauptpunktes nach (4) durch eine konstante Verschiebung des Betrachtungssystems in dieser Richtung erzeugen, so daß alle notwendigen Korrekturen in das Betrachtungssystem verlegt sind. Durch eine derartige Ergänzung, die den Konstrukteur eines Auswertegerätes vor keine besonderen Schwierigkeiten stellt, ist die Lösung des Problems der Affinauswertung relativ einfach und dabei doch streng — wobei der Grad der Strenge von der Genauigkeit der Erfassung der Nadirdistanzen und ihrer Richtungen bestimmt wird — möglich. Eine kleine Variationsmöglichkeit für die Kammerkonstanten im Auswertegerät müßte, wenn man die strenge Relation (3) berücksichtigen will, allerdings vorgesehen werden.

Die Untersuchung der Modellverbiegungen, die durch Affinauswertungen entstehen, bei denen nur die in den Formeln (3 a) und (4 a) ausgedrückten Korrekturen berücksichtigt werden, ist mit den früheren Ergebnissen leicht möglich. Sie soll in einer den vorliegenden Zeilen in Kürze folgenden kleinen Arbeit mitgeteilt werden.

Allgemeine und spezielle überbestimmte analytische Lösungen der einfachen Punkteinschaltung im Raum

Von *Ludwig Starkl*, Wels

Zusammenfassung

Die bei der äußeren Orientierung eines Luftbildes auftretende Aufgabe der einfachen räumlichen Punkteinschaltung ist durch 3 Paßpunkte geometrisch bestimmt und führt in diesem Falle auf eine Gleichung vierten Grades. Die vorliegende Arbeit