

Paper-ID: VGI\_196117



## Die orthometrische Höhenkorrektion in begrenzten Vermessungsbereichen

Wilhelm Embacher <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Hochschule Wien IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **49** (6), S. 169–173

1961

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Embacher_VGI_196117,  
  Title = {Die orthometrische H{"o}henkorrektion in begrenzten  
    Vermessungsbereichen},  
  Author = {Embacher, Wilhelm},  
  Journal = {"Österreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen"},  
  Pages = {169--173},  
  Number = {6},  
  Year = {1961},  
  Volume = {49}  
}
```



Nie aber darf außer acht bleiben, daß bei Benützung eines Bussolentheodolites *Wild* TO dessen hervorragende Güte erst dann voll zur Geltung kommt, wenn die mit ihm ausgeführten Beobachtungen in der Art behandelt werden, wie es diese Arbeit darstellt.

## Die orthometrische Höhenkorrektur in begrenzten Vermessungsbereichen

Von *Wilhelm Embacher*, Wien

Die Anzahl und die Dichte von Gravimetermeßpunkten zur Berechnung der orthometrischen Höhenkorrektur ist in erster Linie vom Höhenunterschied dieser Meßpunkte und weiters von der Geländeform abhängig. Durch Begrenzung des Höhenunterschiedes und Ausnützung der Geländeformen ist der Einfluß der Topographie nur mehr auf wenige Kilometer zu berücksichtigen. Über die Dichte unterhalb des Vermessungsbereiches bis zum Geoid wird nur angenommen, daß sie stetig verläuft. Eine hypothetische Annahme ihrer Größe ist nicht notwendig.

Bekanntlich werden die dynamischen Höhen aus dem Arbeitsbegriff abgeleitet. Zwischen zwei unendlich benachbarten Niveauflächen gilt die Gleichung

$$g \, dh = \text{const.}$$

Wird durch eine willkürlich gewählte Schwerebeschleunigung (meist nimmt man  $\gamma^{45}$ , die normale Schwerkraft im Meeresniveau) dividiert, so erhält man der Dimension nach eine Höhe und zwar die dynamische Höhe, welche dadurch gekennzeichnet ist, daß sie für alle Punkte einer Niveaufläche constant ist. Speziell entlang der Lotlinie von  $P_1$  gilt dann

$$\int_{P_{01}}^{P_1} \frac{g}{\gamma^{45}} \, dh = \int_{P_{01}}^{P_1} dh + \int_{P_{01}}^{P_1} \frac{g - \gamma^{45}}{\gamma^{45}} \, dh.$$

Das rechte Glied bezeichnet man als dynamische Korrektur.

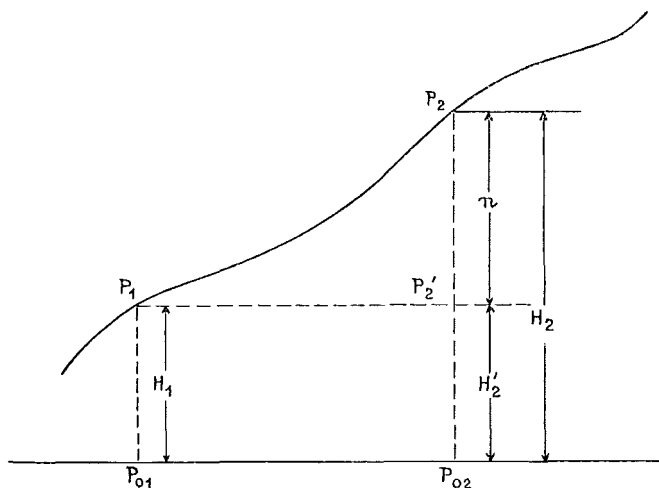


Abb. 1

Unter der Meereshöhe eines Punktes versteht man den in seiner Lotlinie gemessenen Geoidabstand. Bekanntlich ist die Meereshöhe oder orthometrische Höhe von  $P_2$  (Abb. 1)

$$H_2 = H_1 + \sum_{P_1}^{P_2} \Delta h + \sum_{P_1}^{P_2} \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} dh + \int_{P_{01}}^{P_1} \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} dh - \int_{P_{02}}^{P_2} \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} dh.$$

Die Summe der letzten drei rechten Glieder nennt man die orthometrische Korrektur. Sie setzt sich aus den beiden vertikalen dynamischen Korrekturen

$$\int_{P_{01}}^{P_1} \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} dh - \int_{P_{02}}^{P_2} \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} dh$$

und der dynamischen Wegkorrektur zusammen. Die vertikalen dynamischen Korrekturen sind nicht hypothesenfrei bestimmbar, da zur Berechnung des Durchschnittswertes der Schwere auch die Dichte in tieferen Bodenschichten bekannt sein soll.

Für begrenzte Vermessungsbereiche kann man Differenzen orthometrischer Höhen berechnen, wenn man die mittlere Dichte in diesem Bereich bestimmt, mit dieser sämtliche Reduktionen durchführt und die Messungen so anlegt, daß die Differenzen der Topographieeinflüsse mit wachsenden Radien der Zylinderring-sektoren kleiner werden als die Meßgenauigkeit des Schweremessers.

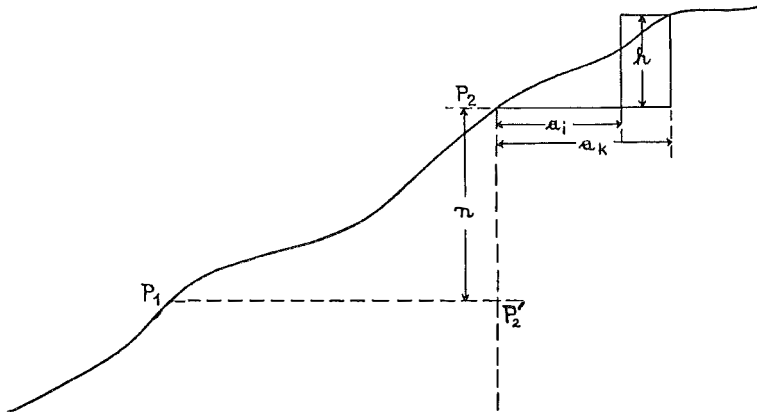


Abb. 2

Der unreduzierte nivellierte Höhenunterschied zwischen  $P_1$  und  $P_2$  (Abb. 2) sei

$\sum_{i=1}^m \Delta z_i$ . Dann gilt zwischen den Niveauflächen von  $P_1$  und  $P_2$  der konstante Wert:

$$\sum_{i=1}^m g_i \Delta z_i = n \cdot \bar{g}_{22}'$$

wenn  $g_i$  und  $\Delta z_i$  gemessen wurden und  $\bar{g}_{22}'$  den Durchschnittswert der Schwerebeschleunigung in der Lotlinie zwischen  $P_2'$  und  $P_2$  darstellt. Ist

$$z_n = \sum_{i=1}^m \Delta z_i$$

und  $\bar{g}_i$  der Durchschnittswert aller gemessenen  $g_i$ , so ist die orthometrische Korrektion

$$n - z_n = z_n \frac{\bar{g}_i - \bar{g}_{22}'}{\bar{g}_{22}'}$$

für den unreduzierten, nivellierten Höhenunterschied von  $P_1$  nach  $P_2$ . Helmert schlug vor, für  $\bar{g}_i$  den gemessenen Wert in halber Höhe zwischen  $P_1$  und  $P_2$  zu nehmen. Für einen begrenzten Bereich kann man für

$$\bar{g}_i \doteq \frac{g_1 + g_2}{2}$$

setzen und für den Durchschnittswert der Schwere in der Lotlinie von  $P_2$  nach  $P_2'$  den Wert

$$\bar{g}_{22}' = \frac{g_2 + g_{2n}}{2}$$

einsetzen, wenn

$$g_{2n} = g_2 + \frac{2g}{R} \cdot n - 4\pi k^2 \sigma n + \sigma T_2 - \sigma T_{2n},$$

also die nach Prey von  $P_2$  nach  $P_2'$  reduzierte Schwerebeschleunigung sein soll.

Die Berechnung der Topographieeinflüsse  $\sigma T_2$  und  $\sigma T_{2n}$  ist eine sehr langwierige Arbeit ( $\sigma$  ist die mittlere Dichte,  $T_2$  und  $T_{2n}$  sind die gesamten Topographieeinflüsse auf  $P_2$  und  $P_2'$ ). Betrachtet man aber die Differenz der Topographieeinflüsse auf den Oberflächenpunkt  $P_2$  und auf den Punkt  $P_2'$  in der Tiefe  $n$ , so ergeben sich einige arbeitssparende Vereinfachungen.

Der  $r$ -te Teil der Anziehung eines Zylinderringes mit der Dichte eins auf den Punkt  $P_2$  ergibt sich bekanntlich mit

$$\Delta T_2 = \frac{2\pi k^2}{r} (a_k - a_i + \sqrt{h^2 + a_i^2} - \sqrt{h^2 + a_k^2}),$$

$h$  sei die Höhe,  $a_i$  und  $a_k$  sind die Radien des Ringes. Derselbe Ringteil hat auf einen Punkt  $P_2'$ , der  $n$  Meter tiefer in derselben Lotlinie liegt, die Wirkung

$$\Delta T_{2n} = \frac{2\pi k^2}{r} (\sqrt{n^2 + a_k^2} - \sqrt{n^2 + a_i^2} - \sqrt{(h+n)^2 + a_k^2} + \sqrt{(h+n)^2 + a_i^2}).$$

Unter der Annahme, daß  $a_i$  und  $a_k \gg n, h$  sind, läßt sich die Differenz  $\Delta(T_2 - T_{2n})$  in eine rasch konvergierende Binomialreihe entwickeln, bei der Glieder dritter Größenordnung schon vernachlässigt werden können:

$$\begin{aligned} \frac{r \cdot \Delta(T_2 - T_{2n})}{2\pi k^2} &= \left[ a_k - a_i + a_i \left( 1 + \frac{h^2}{2a_i^2} \right) - a_k \left( 1 + \frac{h^2}{2a_k^2} \right) \right] - \\ &- \left[ a_k \left( 1 + \frac{n^2}{2a_k^2} \right) - a_i \left( 1 + \frac{n^2}{2a_i^2} \right) - a_k \left( 1 + \frac{(h+n)^2}{2a_k^2} \right) + a_i \left( 1 + \frac{(h+n)^2}{2a_i^2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\text{also } \frac{r \cdot \Delta(T_2 - T_{2n})}{2\pi k^2} = h \cdot n \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_i} \right).$$

Die Differenz dieser Wirkung ist nur vom Höhenunterschied  $n$  der beiden Meßpunkte und von der mittleren Höhe des Sektors  $h$  einerseits und dem rasch konvergierenden Ausdruck  $\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_i}\right)$  andererseits abhängig. In der angefügten Tabelle sind die Wurzelwerte für einige Annahmen von  $h$  und  $n$  zu vorgegebenen Werten von  $a_i$  und  $a_k$  durchgerechnet.

Tabelle

$n$	$h$	$a_k$	600	1000	1500	3000	5000				
		$a_i$	400	600	1000	1500	3000				
10	10	—	0.06	—	0.07	—	0.03	—	0.04	—	0.01
	20	—	0.16	—	0.14	—	0.06	—	0.08	—	0.02
	50	—	0.40	—	0.33	—	0.16	—	0.18	—	0.06
20	10	—	0.16	—	0.14	—	0.06	—	0.08	—	0.02
	20	—	0.35	—	0.27	—	0.13	—	0.14	—	0.05
	50	—	0.82	—	0.66	—	0.33	—	0.34	—	0.13
50	10	—	0.40	—	0.33	—	0.16	—	0.18	—	0.06
	20	—	0.82	—	0.66	—	0.33	—	0.34	—	0.13
	50	—	1.97	—	1.63	—	0.82	—	0.84	—	0.33

Die Topographieeinflüsse auf  $P_2$  und auf  $P_2'$  haben oberhalb der Niveaulfläche von  $P_2$  und unter der Niveaulfläche von  $P_2'$  dasselbe Vorzeichen. Für diese Anteile gilt also die Erkenntnis aus obiger Näherungsformel und aus der Tabelle, d. h. daß ihr Einfluß mit wachsenden Radien rasch abnimmt. Hingegen muß der Anteil des Topographieeinflusses zwischen den beiden Niveaulflächen doppelt genommen werden. Dies bedeutet keine wesentliche Zusatzarbeit, da dieser Teil auf jeden Fall tachymetrisch erfaßt werden muß. Die Gravimeter-Meßpunkte können demnach so angelegt werden, daß die Topographiedifferenzen durch Ausnützung der Geländeformen meistens sehr klein werden.

Ist  $n$  (Abb. 1) der in der Lotlinie von  $P_2$  gemessene Abstand der Niveaulflächen durch  $P_2$  und durch  $P_1$ , so ist die Meereshöhe von  $P_2$

$$H_2 = n + H_2'.$$

Aus dem Ansatz

$$H_1 \bar{g}_1 = H_2' \bar{g}_2'$$

( $\bar{g}_1$  und  $\bar{g}_2$  sind die Durchschnittswerte der Schwerebeschleunigung in den zugehörigen Lotlinienabschnitten) kann man  $H_2$  auf  $H_1'$  zurückführen.

$$(H_2' - H_1) = H_1 \frac{\bar{g}_1 - \bar{g}_2'}{\bar{g}_2'}.$$

K. Ledersteger\*) zeigt, daß der horizontale Gradient des Durchschnittswertes der Schwere benachbarter Lotlinien, abgehend von der Niet'hammerschen Definition des Durchschnittswertes der Schwere, berechnet werden kann. Aus späteren Unter-

\*) Ledersteger, K.: Die Reduktion der astron. Beob. wegen Lotkrümmung. Schweiz. ZfVW 53 (1955), Nr. 8.

suchungen hat sich ergeben, daß dazu außer der mittleren Dichte des vermessenen Bereiches nur eine verhältnismäßig geringe Berücksichtigung der Topographieinflüsse notwendig ist. Darauf aufbauend kann man, ohne Kenntnis der Dichte unterhalb des Vermessungsbereiches, für ein Gebiet, dessen Grenzen sich rechnerisch erfassen lassen, die orthometrische Korrektur des unreduzierten, nivellierten Höhenunterschiedes von  $P_1$  nach  $P_2$  ableiten:

$$H_2 - H_1 - z_n = H_1 \frac{\bar{g}_1 - \bar{g}_2'}{\bar{g}_2'} + z_n \frac{\bar{g}_i - \bar{g}_{22}'}{\bar{g}_{22}'}$$

Die orthometrische Korrektur, der rechte Teil der Gleichung, ist hier nur zweigliedrig und läßt sich aus Messungen berechnen.

## Zur analytischen Luftbildauswertung der Lagekoordinaten von signalisierten Punkten, deren Höhen terrestrisch bestimmt wurden

Von *Karl Killian*, Wien

(Schluß)

In Abb. 1 ist ein vollkardanisch gelagertes Kreiselpendel samt Dosenlibelle schematisch dargestellt. Es bedeutet:  $U$  = Unterstützungspunkt,  $S$  = Schwerpunkt,  $M$  = Mittelpunkt der Krümmung der Dosenlibelle,  $A$  = Schnittpunkt der Kreiselachse mit Libelle,  $L$  = Libellenblase. Von den Einflüssen der Erddrehung und der Erdkrümmung wird abgesehen; sie können, wie erwähnt wurde, berücksichtigt bzw. beseitigt werden.

Wenn der Kreisel eine Horizontalbeschleunigung vom Betrag  $b_h$  erfährt, so werden die Vektoren  $-\bar{b}_h$  und Fallbeschleunigung  $\bar{g}$  die Resultierende  $\bar{r}$  ergeben (Querstrich bedeutet Vektor).  $\gamma$  und  $\sigma$  sind die Winkel zwischen wahren Lot und Scheinlot bzw. Scheinlot und Kreiselachse. Ist  $G$  das Gewicht des Kreisels, so hat die dem  $\bar{r}$  entsprechende Kraft den Betrag:  $G \cdot r : g$  und dem Normalabstand  $s \sin \sigma$  vom Unterstützungspunkt  $U$ . Somit ist das auf das Kreiselpendel wirkende Moment

$$M = \frac{G}{g} r s \sin \sigma = \frac{G}{g} \sqrt{g^2 + b_h^2} s \sin \sigma \quad \dots (1)$$

Während der Zeit der Luftbildaufnahme ist  $b_h \leq 0,1$  g. Der Winkel  $\sigma$  kann  $< 60^\circ$  angenommen werden. Wenn man eine Vernachlässigung  $< 1\%$  des Betrages erlaubt, so folgt aus Gleichung (1)

$$M = G s \sigma \quad \dots (1a)$$

Dieses Moment bewirkt während des Zeitelementes  $dt$  eine Verlagerung der Kreiselachse, die aus dem Drehimpuls-Satz berechnet werden kann:

$$\bar{M} = \frac{d\bar{N}}{dt} \quad \dots (2)$$

$\bar{M}$  ist der Momentvektor und  $\bar{N} = \Theta \cdot \bar{\omega}$  ( $\Theta$  = Trägheitsmoment des Kreisels,  $\bar{\omega}$  = Drehvektor) ist der Impuls oder Drallvektor des Kreisels. Aus Abb. 2 folgt:

$$\Theta \omega d\psi = dN \quad \dots (3)$$