Genauigkeitsfragen und gegenwärtig bestehende Leistungsgrenzen bei der Lagebestimmung luftsichtbar gemachter Punkte mittels rechnerischer Einbildphotogrammetrie

Hans Bernhard [1]

[1] *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII, Krotenthallergasse 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **50** (2), S. 42–56

1962

Genauigkeitsfragen und gegenwärtig bestehende Leistungsgrenzen bei der Lagebestimmung luftsichtbar gemachter Punkte mittels rechnerischer Einbildphotogrammetrie*)

Von *Hans Bernhard*, Wien

Auszug aus der im November 1961 vorgelegten Dissertation gleichen Titels, approbiert von der Technischen Hochschule Wien, zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der technischen Wissenschaften.

I. Einleitung

Kaum ein Sachgebiet der Geodäsie dürfte in letzter Zeit eine für die Praxis so bedeutsame Entwicklung erfahren haben, wie das der Photogrammetrie. Dabei wird unter Photogrammetrie heute hauptsächlich *Luft*photogrammetrie, in noch engerem Sinne Stereophotogrammetrie aus der Luft verstanden. Dem praktisch tätigen Photogrammeter stehen wohl auch noch die terrestrisch-photogrammetrischen Arbeitsverfahren zur Verfügung. Es ist aber bekannt, daß die diesbezüglichen Methoden hinsichtlich der Geländeform starken Einschränkungen unterliegen. Ähnliches gilt auch für die Einbild- oder Entzerrungsphotogrammetrie. Die Stereophotogrammetrie aus der Luft ist demgegenüber i. a. universell anwendbar. Aber selbst diese Sparte der Photogrammetrie mußte sich in ihren Anwendungen bis vor etwa 10 Jahren weitgehend auf graphische Auswertungen in überwiegend topographischen Maßstäben beschränken. Erst nachdem bedeutende Fortschritte auf optischem und instrumentellem Gebiet das Leistungsvermögen der Photogrammetrie erheblich gesteigert hatten, konnte der Anwendungsbereich der Zweibildphotogrammetrie auch auf Arbeiten in großen Maßstäben, unter gleichzeitigem Übergang auf numerische Auswertungen erweitert werden (Katasterphotogrammetrie). Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit der Luftphotogrammetrie beruhen auf der Abbildungstreue der Hochleistungsobjektive, auf der Präzision moderner Auswertegeräte und nicht zuletzt auf praktisch wohl erprobten Orientierungs- und Rechenverfahren.

Aber noch ist, wie sich bereits seit einiger Zeit abzeichnet, die Entwicklung auf dem Gebiete der Photogrammetrie nicht abgeschlossen. Hand in Hand mit der Entwicklung programmgesteuerter Rechenautomaten und im Streben nach noch höherer Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit hat sich das Interesse des Photogrammeters analytischen Verfahren zugewendet. Sie sind hinsichtlich ihrer Problemstellung zwar nicht neu, konnten aber wegen ihres großen Rechenaufwandes in der Praxis bislang nicht angewendet werden. Die nunmehr gegebene Aktualität erklärt sich aus den im Rechnen mit Rechenautomaten gewonnenen guten Erfahrungen. Ausgegangen wird von der direkten Messung der Bildkoordinaten. Manche instrumentelle Fragen vereinfachen sich dadurch erheblich. Auch an den Auswerter werden verminderte Anforderungen gestellt, denn die Ermittlung der „Äußeren Orientierung" durch schrittweise Lösung der „Doppelpunkteinschaltung im Raum" entfällt. Die analytischen Verfahren sind somit in zwei für die Praxis sehr wesentlichen Belangen

*) Gedruckt mit Unterstützung des Kulturamtes der Stadt Wien auf Antrag des Notringes der wissenschaftlichen Verbände Österreichs.

entschieden anspruchsloser als die bisherige „klassische" Methode. Dieser Umstand allein dürfte die Erwartungen rechtfertigen, die man in die neuen Verfahren setzt.

Bei der rechnerischen Behandlung spielt die als Rückwärtseinschneiden im Raum bezeichnete Aufgabe eine fundamentale Rolle. Was die Auswertung selbst anbelangt, bieten sich in Analogie zu den bisherigen Arbeitsverfahren wieder die Möglichkeiten, Einzelbilder oder Bildreihen (analytische Aerotriangulierung) auszuwerten.

In instrumenteller Hinsicht ist dieser Entwicklungstendenz bereits Rechnung getragen worden. Die mit Photogrammetrie befaßten Firmen haben leistungsfähige, mit Koordinatenregistriergeräten ausgestattete, Präzisionskomparatoren entwickelt und diese anläßlich des IX. Internationalen Kongresses für Photogrammetrie in London, im Herbst 1960, erstmals vorgeführt. Die *innere* Genauigkeit dieser Instrumente bewegt sich laut Firmenangaben zwischen $\pm$ 0,001 und $\pm$ 0,002 mm. Die *praktisch* erreichbare Genauigkeit liegt zur Zeit zwischen $\pm$ 0,003 und $\pm$ 0,005 mm. Sie bestimmt sich hauptsächlich aus der Güte des photographischen Auflösungsvermögens (Punktdefinition) und aus der Echtheit der zentralperspektiven Abbildung (Restverzeichnung, Planität der photographischen Platten und Refraktion). Auch die Notwendigkeit einer sachgemäßen Behandlung der Platten während des photographischen Prozesses darf nicht übersehen werden.

Methodisch liegen gleichfalls bereits verschiedene Vorschläge vor. Über praktische Erfahrungen jedoch ist bisher erst wenig bekannt geworden. Mit besonderem Interesse wird der Behandlung von Genauigkeitsfragen entgegengesehen. Die Fehlerquellen, auf die oben — im Zusammenhang mit der praktisch erzielbaren Meßgenauigkeit — hingewiesen wurde, spielen dabei eine entscheidende Rolle. Es stellt sich somit insbesondere die Frage, welche Genauigkeit bei Anwendung analytischer Verfahren erwartet werden kann.

Im folgenden wird unter Beschränkung auf ein Verfahren der Einbildphotogrammetrie versucht, die zuletzt aufgeworfene Frage zu beantworten. Das der Untersuchung zugrunde gelegte Verfahren wird vorerst erörtert; dann werden Fehlerformeln hergeleitet und unter bestimmten in der Praxis zutreffenden Voraussetzungen zahlenmäßig ausgewertet und diskutiert. Die Ergebnisse dürften geeignet sein, das zu erwartende qualitative Leistungsvermögen dieser Art von Photogrammetrie zu charakterisieren.

II. Lagebestimmung mittels rechnerischer Einbildphotogrammetrie

1. Grundgedanke

Die Auswerteverfahren der Einbildphotogrammetrie gründen sich auf der zwischen Bild und Gelände bestehenden projektiven Zuordnung. Dabei wird ebenes, jedoch nicht horizontales, Gelände vorausgesetzt. Wird demgegenüber von einer Luftaufnahme *beliebigen* Geländes ausgegangen, so können die in diesem Luftbild in bezug auf die Bildhauptachsen (Rahmenmarken) gemessenen Bildkoordinaten der auszuwertenden Punkte nur dann in Gelände- bzw. Landeskoordinaten umgeformt werden, *wenn neben den für die Bestimmung der projektiven Zuordnung notwendigen Paßpunkten die Meereshöhen der lagemäßig gesuchten Punkte vorgegeben sind.* Unter diesen Voraussetzungen kann die gefragte Transformation entweder unter

Benutzung der zwischen einem *Meßbild* und dem zugehörigen Gelände bestehenden *perspektiven* Zuordnung oder unter Verwendung der *Kollineation* durchgeführt werden. Da eine kollineare Zuordnung aber nur zwischen zwei Ebenen besteht, erfordert dieser Weg die Einschaltung einer Bezugsebene.

Für die Handhabung der kollinearen Transformation hat Prof. Dr. W. Wunderlich [1] unter Verwendung von Flächenkoordinaten eine elegante Lösung gezeigt. Die Benutzung der Perspektivität hat Dr. K. Killian [2, 3] vorgeschlagen. Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf die Verwendung der Perspektivität.

2. *Handhabung des Verfahrens*

Es sind die folgenden Arbeitsschritte notwendig: 1. Messung der auf die Bildhauptachsen bezogenen Koordinaten der Paßpunkte und aller (lagemäßig) gesuchten Punkte, 2. Berechnung der Koordinaten des Bild- und Geländenadirpunktes sowie der absoluten Flughöhe mittels Rückwärtseinschneiden in Raum, 3. Transformation (Drehung und Verschiebung) der unter 1. gemessenen Koordinaten in das Hauptvertikalsystem im Bild, 4. Perspektive Transformation aller Punkte in das Hauptvertikalsystem im Gelände und 5. Anfelderung der Ergebnisse von 4. in das Landeskoordinatensystem.

Zu 1. Einbildphotogrammetrische Verfahren erfordern an sich keine stereoskopische Überdeckung. Da aber in der Praxis Kontrollen in Form von Doppel- und Mehrfachauswertungen erwünscht sind, sind die bei der Zweibildmessung üblichen Überdeckungen (Längs- und Querüberdeckungen) auch bei Anwendung des zur Rede stehenden Verfahrens anzustreben. Für die Messung der Bildkoordinaten selbst kommen sowohl Mono- als auch Stereokomparatoren in Betracht.

Zu 2. Für die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens im Raum sind zahlreiche Lösungen bekannt. Eine übersichtliche, je Luftaufnahme 4 Paßpunkte erfordernde Lösung hat Dr. K. Killian [4] angegeben. Sie setzt keine Näherungswerte voraus. Die Programmierung dieser Lösung für den programmgesteuerten Rechenautomaten IBM 650 liegt vor (siehe [3]). Als Ergebnis werden die Lagekoordinaten von Bild- und Geländenadir sowie die absolute Flughöhe erhalten.

Zu 3. Für die Transformation der unter 1. gemessenen Bildkoordinaten in das Hauptvertikalsystem im Bild erhält man zunächst (Figur 1)

$$\varkappa = R_{N'H'} - 100^g \quad \text{und} \quad c = -\frac{y_N'}{\sin R_{N'H'}} = -\frac{x_N'}{\cos R_{N'H'}} \qquad \ldots (1)$$

und die Transformationsgleichungen lauten damit

$$\begin{aligned} y &= y' \cos\varkappa - x' \sin\varkappa + c \\ x &= y' \sin\varkappa + x' \cos\varkappa \,. \end{aligned} \qquad \ldots (2)$$

Zu 4. Der rechnerische Zusammenhang zwischen Bild- und Geländekoordinaten wird — bei im Bild und im Gelände beliebig orientierten Koordinatensystemen — durch die linearen, gebrochenen Gleichungen

$$Y = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + 1} \qquad X = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{ax + by + 1} \qquad \ldots (3)$$

bestimmt. Diese Abbildungsgleichungen vereinfachen sich erheblich und werden damit für die Praxis gangbarer, wenn man den Ursprung des Bild- bzw. Geländekoordinatensystems in den Bild- bzw. Geländenadir legt und überdies jedes der beiden Koordinatensysteme nach der zugehörigen Blickrichtung orientiert. Unter diesen Voraussetzungen gehen die Gleichungen (3) über in (Herleitung z. B. in [2])

$$Y = \frac{h y \cos \nu}{s - y \sin \nu} \qquad X = \frac{h x}{s - y \sin \nu}, \qquad \ldots (4)$$

worin $s = f / \cos \nu$ ist.

Die Bildneigung ν und die jeweilige Flughöhe über Grund h erhält man aus

$$\nu = ar \operatorname{ctg} \frac{c}{f} \quad \text{und} \quad h = H_a - H. \qquad \ldots (5)$$

In (5) bedeutet f die Bildweite der Aufnahmekammer, H_a die absolute Flughöhe und H die Meereshöhe eines Punktes P.

Mit den herkömmlichen Rechenhilfsmitteln war die numerische Berechnung von ν und H_a langwierig. Es erklärt sich daraus, weshalb die im *Hauptvertikalschnitt* geltenden einfachen Beziehungen — auf die bereits Prof. O. v. Gruber [5] aufmerksam gemacht hat — bislang keine praktische Bedeutung erlangen konnten.

Zu 5. Für den Anschluß der unter 4. erhaltenen Geländekoordinaten an das Landeskoordinatensystem sind zwei Paßpunkte erforderlich. Da in unserem Fall je Bild stets 4 Paßpunkte vorliegen, empfiehlt sich die Anwendung der Helmert-Transformation. Dabei geben die nach der Transformation in den Paßpunkten verbleibenden Fehler und der aus diesen resultierende mittlere Koordinatenfehler Aufschluß über die Genauigkeit der Einpassung. Auch die Helmert-Transformation liegt für den Rechenautomaten IBM 650 programmiert vor.

III. Genauigkeitsfragen und Leistungsgrenzen

1. Aufgabenstellung

Durch das Rückwärtseinschneiden im Raum werden die Lotrichtung und die absolute Flughöhe erhalten. Damit sind auch die für die perspektive Transformation erforderlichen Elemente ν und h bestimmt bzw. einfach rechenbar (vgl. II. 2 Glg. [5]).

Ferner ist aus den Transformationsgleichungen (4) — unter Berücksichtigung der Substitution $s = f/\cos \nu$ — zu ersehen, daß die Geländekoordinaten Y und X funktionell abhängig sind von der Bildneigung ν, der Flughöhe ü. G. h, den Bildkoordinaten y und x und der Bildweite f.

Die Bildweite f ist immer vorgegeben und bleibt überdies für Aufnahmen ein- und desselben Bildfluges konstant. Die übrigen Transformationselemente dagegen werden durch Messung *und* Rechnung (ν und h) bzw. durch Messung *allein* gewonnen (y und x) und sind folglich mit unvermeidlichen Fehlern behaftet.

Die der vorliegenden Arbeit zu Grunde liegende Frage nach der bei Anwendung des zur Rede stehenden Verfahrens zu erwartenden Genauigkeit läuft somit auf eine fehlertheoretische Untersuchung der Gleichungen (4) hinaus, wozu — da die Fehlerformeln zahlenmäßig ausgewertet werden sollen — die den o. a. Transformationselementen anhaftenden Fehler bekannt sein müssen.

2. *Die Fehler in den Transformationselementen*

A) *Fehlerursachen*

Die Fehler in den Transformationselementen resultieren aus Fehlern in den terrestrischen und photogrammetrischen Grundlagen sowie aus Beobachtungsfehlern (Komparator).

Aa) *Die terrestrischen Grundlagen*

Die hier wirksam werdenden Fehler beziehen sich auf die Genauigkeit der Paßpunktbestimmung und auf die Meereshöhen der (lagemäßig) gesuchten Punkte.

Bei der Lagebestimmung der Paßpunkte bestehen höchste Genauigkeitsforderungen. Es kommen deshalb i. a. nur die Methoden der „trigonometrischen Punktbestimmung" in Betracht. Dabei handelt es sich bei großmaßstäblichen photogrammetrischen Arbeiten immer um Einschaltungen in Triangulierungsnetze niedriger Ordnung. Treffen diese Voraussetzungen zu, so darf — die Praxis hat es vielfach bestätigt — angenommen werden, daß die Punktlagefehler der Paßpunkte innerhalb $\pm$ 5 cm bleiben.

Anders liegen die Verhältnisse bei der Bestimmung der Höhen. Hier muß berücksichtigt werden, daß in der Photogrammetrie „Lage und Höhe" korreliert sind, wobei die Wirkung dieser Korrelation — bedingt durch den zentralperspektiven Aufnahmevorgang — an den Bildrändern am größten und im Nadirpunkt null ist. Genauigkeitsforderungen für die Bestimmung der Höhen können somit nur unter Bedachtnahme auf den genannten Zusammenhang festgelegt werden. Die beiden folgenden, allgemein gültigen, Aussagen sind aber dennoch möglich:

1) Die Höhenfehler müssen jeweils so gehalten werden, daß ihr Einfluß auf die (photogrammetrische) Bestimmung der Lage innerhalb einer bestimmten gewünschten Grenze bleibt, wobei die Beachtung dieser Forderung gleichzeitig größtmögliche Wirtschaftlichkeit bei den Arbeiten im Gelände gewährleistet,

2) da die Paßpunkte nahe den Bildecken liegen, zählen sie zu jenen Punkten, für die auch höchste Höhengenauigkeit gefordert wird.

Die zwischen „Lage und Höhe" bestehende Korrelation wird unter III. 3 C behandelt.

Ab) *Die photogrammetrischen Grundlagen**)

Die photogrammetrischen Grundlagen bestimmen die Bildqualität des Meßbildes und die geometrische Richtigkeit der zentralperspektiven Abbildung. Im Hinblick auf die nun gegebene Leistungsfähigkeit der neuen Komparatoren sind die zu stellenden Genauigkeitsforderungen sehr hoch. So müßte das photographische Auflösungsvermögen die Punktdefinition im Bild auf 1 bis 2 Mikron sicherstellen und die durch den Verzeichnungsfehler des Aufnahmeobjektives sowie durch Mängel in der Planität der Photoplatten und durch atmosphärische Einflüsse hervorgerufenen

---

*) Bei Behandlung von Verfahrens- und Genauigkeitsfragen werden zu den photogrammetrischen Grundlagen des öfteren auch die sogenannten Instrumentalfehler gezählt. Sie sind bei Arbeiten mit den orthodoxen (Zweibild-) Auswertegeräten von großer Bedeutung.

Im Hinblick auf die dem gegenständlichen Verfahren zu Grunde liegenden Messungen mit modernen Komparatoren jedoch erscheint es gerechtfertigt, wenn bei den unter 2. Ab) angeführten Überlegungen Instrumentalfehler nicht in Erwägung gezogen werden.

(geometrischen) Abbildungsfehler sollten sich innerhalb der gleichen (Fehler-) Grenze halten.

Es ist bekannt, daß die angeführten Forderungen zur Zeit noch nicht restlos erfüllt werden können. Verfeinert werden müßte vor allem das Auflösungsvermögen der photographischen Emulsion. Ankündigungen von photochemischer Seite lassen Fortschritte auf diesem Gebiet erwarten. Aber auch die gegenwärtig in Verwendung stehenden Methoden für die Kompensation der Verzeichnung können den zur Rede stehenden Genauigkeitsansprüchen nicht voll entsprechen. Deshalb nicht, weil sie nur eine mittlere, in der Regel aus 4 Profilen ermittelte Verzeichnung kompensieren. Die dabei unberücksichtigt bleibenden Fehler sind sicher oft größer als 1 bis 2 Mikron.

Den Einfluß von Plattenunebenheiten bei Geräten mit orthogonaler Bildbetrachtung entnimmt man aus Figur 2. Planitätsstörungen bewirken demnach Bildpunktverlagerungen

$$\blacktriangle r = \triangle f \frac{r}{f}, \qquad \ldots (6)$$

die mit dem Radialabstand r und mit kleiner werdender Bildweite f wachsen. Unter Zugrundelegung der Bildweiten $f = 100$ mm und $f = 170$ mm sowie von Platten im Format 14×14 cm findet man, daß die Planität in den Bildecken auf $\sim$ 2,5 bzw. $\sim$ 4 Mikron erfüllt sein müßte, je nachdem, ob Weit- oder Normalwinkelobjektive verwendet werden.

Für die der Praxis derzeit zur Verfügung stehenden Platten beträgt die *Planitätsgarantie* jedoch nur $\pm$ 0,02 mm. Daraus darf allerdings nicht geschlossen werden, daß Unebenheiten dieser Größenordnung jeweils über den gesamten Bereich der Platten auftreten müssen. Planitätsfehler können mit Hilfe einer Prüfplatte und Abzählen der unter Natriumlicht sichtbar werdenden Interferenzringe relativ einfach und rasch festgestellt werden.

Als letzte Fehlerquelle verbleibt die Refraktion, deren Einfluß abhängig ist von der Flughöhe, der Meereshöhe des aufgenommenen Gebietes und von dem Öffnungswinkel des photogrammetrischen Strahlenbündels. Bei den für großmaßstäbliche Arbeiten in Frage kommenden Flugdispositionen, wie etwa: $h = 1000$ m und $f = 100$ mm oder $h = 1700$ m und $f = 170$ mm werden nach Leyonhufvud [6] die Randstrahlen bis zu 6^{cc} abgelenkt. Diesem Wert entsprechen bei den Öffnungswinkel $\alpha = 25^g$ bzw. $\alpha = 40^g$ und den zugehörigen Bildweiten radiale Punktverlagerungen im Bild in der Größe von $\sim$ 2 Mikron. Der Einfluß der Refraktion wird demnach — soferne keine Refraktionsstörungen, wie sie bei Arbeiten im Gebirge auftreten können, vorliegen — i. a. außer Ansatz bleiben.

Aus den angeführten Überlegungen erkennt man, daß die hohe Präzision der modernen Meßmittel gegenwärtig noch nicht völlig ausgeschöpft werden kann. Nach übereinstimmender Meinung namhafter Fachleute beträgt die derzeit de facto erreichbare Genauigkeit $\pm$ 3 bis $\pm$ 5 Mikron.

B) *Festlegung der Fehlergrößen*

Über die beim räumlichen Rückwärtseinschneiden auftretenden Fragen und über die erzielbare Genauigkeit hat vor Jahren unter damals geltenden Voraussetzungen insbesondere Prof. Dr. Gotthardt [7] berichtet. Genauigkeitstests, die der

Verfasser im Hinblick auf das gegenständliche Verfahren unter Benützung der Elektronenrechenmaschine IBM 650 durchgeführt hat, haben gezeigt, daß die Bildneigung ν und die absolute Flughöhe H_a nunmehr mit einer Genauigkeit von $\pm$ 1 bis $\pm$ 2^c bzw. $\pm$ 0,05 bis 0,10$^0/_{00}$ h erhalten werden können. Entsprechende Genauigkeitsergebnisse hat Prof. Dr. Gotthardt in letzter Zeit in [8] mitgeteilt.

Als Fehler in den Transformationselementen sind demzufolge in Rechnung zu stellen (mit Bezug auf die Ermittlung von Leistungsgrenzen werden jeweils die unteren Schranken eingeführt):

Nadirdistanzfehler	$d\nu = \pm 1^c$
Flughöhenfehler	$dh = \pm 0{,}005^0/_{00}\, h$
Bildkoordinatenfehler	$dy = dx = \pm 0{,}003$ mm

Die Bildweite f der Aufnahmekammer wird als fehlerfrei angenommen*).

3. *Differentialformeln für die Geländekoordinaten Y und X*

A) *Allgemeines*

Untersucht werden die Partialeinflüsse auf die Geländekoordinaten Y und X. Die gesuchten Fehler werden immer in Funktion von Y und X dargestellt. Für die Elimination der Bildkoordinaten y und x werden auch die zu den Gleichungen (4) inversen Beziehungen benötigt. Beide Gleichungspaare sind nachstehend angeführt:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{hy \cos \nu}{s - y \sin \nu} = \frac{hy \cos^2 \nu}{f - y \sin \nu \cos \nu} \\ X &= \frac{hx}{s - y \sin \nu} = \frac{hx \cos \nu}{f - y \sin \nu \cos \nu} \end{aligned} \qquad \ldots (4)$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{fY}{\cos^2 \nu\, (h + Y \tan \nu)} \\ x &= \frac{fX}{\cos \nu\, (h + Y \tan \nu)} \end{aligned} \qquad \ldots (4')$$

Für die zahlenmäßige Auswertung der Fehlerformeln gelten neben den unter 2. Ab) und 2. B) angeführten Fehlern in den Transformationselementen die folgenden Daten:

$$\begin{aligned} f &= 100 \text{ mm} \\ h &= 1000 \text{ m (Gelände eben)} \\ Y_{max} = X_{max} &= 1000 \text{ m} \end{aligned}$$

---

*) Die Aufnahmekammern werden zumeist periodisch — zweckmäßig am Beginn und nach Beendigung der jährlichen Flugperiode — kalibriert. Dabei wird die Bildweite unter Berücksichtigung des verwendeten Objektives bestimmt.

Hinsichtlich der vorne, unter III. 1, angeführten Konstanz der Bildweite ist zu sagen: Bei Verwendung von Film muß der sogenannte Schrumpf in Rechnung gestellt werden (reduzierte Brennweite). Der Schrumpf ändert sich mitunter von Bild zu Bild und zeigt des öfteren auch affinen Charakter. Es wird im Rahmen dieser Arbeit darauf bewußt nicht eingegangen. Deshalb, weil für katasterphotogrammetrische und sonstige numerische Auswertungen in großen Maßstäben — also zumeist dann, wenn die auszuwertenden Punkte luftsichtbar gemacht werden — in Österreich ausschließlich Platten Verwendung finden.

und der Bereich der Nadirdistanz ν wird auf Werte innerhalb 6^g eingeschränkt, da in der Praxis nur genäherte Senkrechtaufnahmen Verwendung finden.

Die Fehlerformeln werden graphisch dargestellt. Dabei werden für ν jeweils 2 Werte, nämlich $\nu = 0^g$ und $\nu = 6^g$ eingeführt. Es wird dadurch auch der Einfluß der Bildneigung veranschaulicht. Auf die Wirkung von Geländehöhenunterschieden wird gesondert hingewiesen.

B) *Der Einfluß des Nadirdistanzfehlers $d\nu$*

Ba) *Der Einfluß auf die Geländekoordinate Y*

Für den Einfluß auf Y gilt

$$d Y_\nu = \frac{\partial Y}{\partial \nu} d\nu.$$

Führt man die partielle Differentiation aus, so kommt

$$d Y_\nu = \frac{-2\, h y \sin\nu \cos\nu\, (f - y \sin\nu \cos\nu) + h y^2 \cos^2\nu\, (\cos^2\nu - \sin^2\nu)}{(f - y \sin\nu \cos\nu)^2}\, d\nu$$

und durch Rücksubstitution in (4) erhält man schließlich

$$d Y_\nu = \left[\frac{Y^2\,(1 - \tan^2\nu)}{h} - 2\, Y \tan\nu\right] d\nu. \qquad \ldots (7)$$

Mit

$$a = \frac{1 - \tan^2\nu}{h}\, d\nu \quad \text{und} \quad b = -2 \tan\nu \;\; d\nu, \qquad \ldots (8)$$

worin ν, $d\nu$ und h Konstanten sind, geht (7) über in

$$d Y_\nu = a Y^2 + b Y. \qquad \ldots (9)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Achse parallel zur dY_ν-Achse liegt und deren Scheitel die Abszisse

$$Y = -\frac{b}{2a} = +\frac{h \tan\nu}{1 - \tan^2\nu} \qquad \ldots (10)$$

hat. Die Ordinate dY_ν des Parabelscheitels ergibt sich durch Substitution von (10) in (9) zu

$$d Y_\nu = -\frac{h \tan^2\nu}{1 - \tan^2\nu}\, d\nu. \qquad \ldots (11)$$

Die Schnittpunkte der Parabel mit der Abszissenachse lauten

$$Y_1 = 0 \quad \text{und} \quad Y_2 = -\frac{b}{a}. \qquad \ldots (12)$$

Für $\nu = 0$ wird aus (7)

$$d Y_\nu = \frac{Y^2}{h}\, d\nu. \qquad \ldots (13)$$

Im Falle von Senkrechtaufnahmen liegt demnach der Scheitel der Fehlerkurve im Ursprung und die Parabelachse fällt mit der dY_ν-Achse zusammen.

Die Fehlerkurven dY_ν sind in Figur (3) dargestellt. Man erkennt, daß durch einen Nadirdistanzfehler $d\nu$ die Homogenität der Y-Koordinaten gestört wird. Es ist jedoch zu beachten, daß Größe und Verteilung der Homogenitätsstörung auch von der Kantung $\varkappa$ abhängig sind. Setzt man nämlich nahe in den Bildecken gelegene Paßpunkte voraus, so gilt: Bei $\varkappa = 0^g$ und 100^g bzw. 200^g und 300^g können die in den 4 Paßpunkten auftretenden Fehler dY_ν durch eine Translation kompensiert werden. Die verbleibenden Fehler sind daher für Punkte mit $Y = 0$ bzw. $Y =$ nahe Null am größten. Bei $\varkappa = 50^g$ und 150^g bzw. 250^g und 350^g hingegen sind die Fehler dY_ν in zwei Paßpunkten nahe Null und in den beiden anderen annähernd gleich groß und gleich gerichtet. Nach einer ausgleichenden Translation bleiben folglich in allen 4 Paßpunkten paarweise entgegengesetzt gerichtete Fehler bestehen.

Bei Bezug der verbleibenden Fehler dY_ν auf das Landeskoordinatensystem ist auf den Winkel, den dieses mit dem Hauptvertikalsystem einschließt, Bedacht zu nehmen.

Ist das Gelände nicht eben, so findet man an Hand von (7) als Fehlerdifferenz zwischen zwei verschieden hoch gelegenen Punkten P_1 und P_2

$$\triangle dY_\nu^{1,2} = dY_\nu^{(1)} - dY_\nu^{(2)} = dY_\nu^{(1)} \frac{\triangle h}{h_1}, \qquad \ldots (14)$$

worin $\triangle h = h_1 - h_2$ ist.

Der Einfluß des Nadirdistanzfehlers $d\nu$ nimmt demzufolge mit kleiner werdender Flughöhe über Grund ab. Für Abschätzungen wird man als Bezugshöhe h_1 zweckmäßig die Flughöhe über dem tiefsten Punkt wählen.

Bb) *Der Einfluß auf die Geländekoordinate X*

Für den Einfluß auf X gilt

$$dX_\nu = \frac{\partial X}{\partial \nu}\, d\nu.$$

Führt man die partielle Differentiation aus, so erhält man

$$dX_\nu = \frac{-\,hx \sin\nu\,(f - y\sin\nu\cos\nu) + (\cos^2\nu - \sin^2\nu)\, hxy\cos\nu}{(f - y\sin\nu\cos\nu)^2}\, d\nu.$$

Durch Rücksubstitution in (4) und mit

$$\frac{y}{x} = \frac{Y}{X\cos\nu}$$

kommt schließlich

$$dX_\nu = \left[\frac{XY(1 - \tan^2\nu)}{h} - X\tan\nu\right] d\nu. \qquad \ldots (15)$$

Setzt man in (15)

$$a = \frac{1 - \tan^2\nu}{h}\, d\nu \quad \text{und} \quad b = -\tan\nu\ \ d\nu, \qquad \ldots (16)$$

worin ν, $d\nu$ und h wieder Konstanten sind, so geht (15) nach Auflösung nach X über in

$$X = \frac{dX_\nu}{aY + b}. \qquad \ldots (17)$$

Als lineargebrochene Funktion ist (17) die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren zur X-Achse parallele Asymptote die Abszisse

$$Y = -\frac{b}{a} = + \frac{h \tan \nu}{1 - \tan^2 \nu} \quad . . . (18)$$

hat; die zweite Asymptote fällt mit der Y-Achse zusammen.

Für $\nu = 0$ hat (15) die Form

$$dX_\nu = \frac{XY}{h} d\nu, \quad . . . (19)$$

wonach bei Senkrechtaufnahmen der Mittelpunkt der Hyperbel in dem Koordinatenursprung liegt.

Aus den in den Figuren 4a und 4b dargestellten Fehlerkurven dX_ν geht hervor, daß ein Nadirdistanzfehler $d\nu$ auch die Homogenität der X-Koordinaten stört. Maßgebend für die Verteilung der Fehlerwirkung ist wieder die Lage des Hauptvertikalsystems im Bild. Werden die Paßpunkte wie unter 3. Ba) als nahe den Bildecken gelegen angenommen, so gilt:

Bei $\varkappa = 0^g$ und 100^g bzw. 200^g und 300^g sind die Fehler dX_ν in den Paßpunkten annähernd gleich groß, aber paarweise entgegengesetzt gerichtet und können folglich weder durch eine Translation, noch durch eine Maßstabsänderung, kompensiert werden. Bei $\varkappa = 50^g$ und 150^g bzw. 250^g und 350^g dagegen sind die Fehler in den vier Paßpunkten klein, weil jeweils eine der beiden Paßpunktkoordinaten nahe Null ist. Die größten verbleibenden Fehler treten bei diesen Lagen des Hauptvertikalsystems in der Mitte der Bildränder auf.

Hinsichtlich der Zuordnung der verbleibenden Fehler zu dem Landeskoordinatensystem trifft auch hier das unter 3. Ba) Gesagte zu und den Einfluß von Geländehöhenunterschieden betreffend gilt Gleichung (14) sinngemäß. Sie lautet nun

$$\triangle dX_\nu^{1,2} = dX_\nu^{(1)} - dX_\nu^{(2)} = dX_\nu^{(1)} \frac{\triangle h}{h_1}. \quad . . . (20)$$

C) *Der Einfluß des Höhenfehlers dh*

Für die Einflüsse auf die Koordinaten Y und X gilt

$$dY_h = \frac{\partial Y}{\partial h} dh \quad \text{und} \quad dX_h = \frac{\partial X}{\partial h} dh.$$

Führt man die partielle Differentiation aus, so wird

$$dY_h = \frac{y \cos \nu}{s - y \sin \nu} dh = \frac{Y}{h} dh \text{ und} \quad . . . (21)$$

$$dX_h = \frac{x}{s - y \sin \nu} dh = \frac{X}{h} dh. \quad . . . (22)$$

Mit (21) und (22) erhält man den aus einem Höhenfehler dh resultierenden Lagefehler dL_h zu

$$dL_h = \sqrt{dY_h^2 + dX_h^2} = \frac{dh}{h} \sqrt{Y^2 + X^2}. \quad . . . (23)$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit dem Radius

$$r = \frac{h}{dh}\, dL_h, \qquad \ldots (24)$$

dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt. An Hand der Beziehung (24) können die beiden folgenden Fragen beantwortet werden:

C a) Wie groß ist jeweils der Lagefehler dL_h, wenn h und dh bekannt sind und r den in Betracht kommenden Bereich von 0 bis 1000 m durchläuft,

C b) Wie genau müssen die Höhen jeweils bestimmt werden, wenn der aus einem Höhenfehler dh hervorgehende Lagefehler dL_h einen bestimmten, gewünschten Wert nirgends überschreiten soll.

Zu C a) Nach (24) ist

$$dL_h = \frac{dh}{h}\, r. \qquad \ldots (25)$$

Der gefragte Lagefehler ist demnach proportional zur Entfernung r von dem Nadirpunkt. Das Bild von (25) ist eine Gerade durch den Ursprung. Figur 5 veranschaulicht für $dh = 5$ cm und $h = 1000$ m sowie r mit dem Bereich bis 1000 m den durch (25) gegebenen Zusammenhang.

Zu C b) Für die Beantwortung der zweiten Fragestellung erhält man aus (24)

$$dh = \frac{h\, dL_h}{r}. \qquad \ldots (26)$$

Die Höhengenauigkeit ist somit verkehrt proportional zu der Entfernung von dem Koordinatenursprung. Das Bild von (26) ist eine gleichseitige Hyperbel.

Mit $dL_h = 5$ cm und $h = 1000$ m können die jeweils bestehenden (Höhen-) Genauigkeitsforderungen aus Figur 6 abgelesen werden.

Mit Bezug auf die unter 2. Aa) besprochenen terrestrischen Grundlagen erkennt man insbesondere, daß die Paßpunkte auch der Höhe nach mit höchster Genauigkeit bestimmt werden müssen. Die Erfüllung dieser Forderung ist für die unter 2. B) mitgeteilten, beim Rückwärtseinschneiden im Raum erhaltenen Genauigkeitsergebnisse, von grundlegender Wichtigkeit.

D) *Der Einfluß der Bildkoordinatenfehler dy und dx*

Da) *Der Einfluß auf die Geländekoordinate Y*

Die Geländekoordinate Y ist nur von der Bildabszisse y abhängig. Für den Einfluß eines Fehlers dy gilt

$$dY_y = \frac{\partial Y}{\partial y}\, dy.$$

Führt man die partielle Differentiation aus, so kommt zunächst

$$dY_y = \frac{h \cos \nu\, (s - y \sin \nu) + h\, y \sin \nu \cos \nu}{(s - y \sin \nu)^2}\, dy$$

und mittels Rücksubstitution in (4) folgt daraus

$$dY_y = \left[\frac{Y}{y} + \frac{Y^2 \tan \nu}{h\, y}\right] dy.$$

Wird y durch Einführen von (4′) eliminiert, so erhält man schließlich

$$d Y_y = \left[\frac{Y^2 \sin^2 \nu}{f h} + \frac{Y \sin 2\nu}{f} + \frac{h \cos^2 \nu}{f}\right] dy. \quad \ldots (27)$$

Mit

$$a = \frac{\sin^2 \nu}{f h} dy, \quad b = \frac{\sin 2\nu}{f} dy, \quad \text{und } c = \frac{h \cos^2 \nu}{f} dy \quad \ldots (28)$$

worin ν, dy, f und h Konstanten sind, geht (27) über in

$$dY_y = a\, Y^2 + b\, Y + c \quad \ldots (29)$$

Die Fehlerkurve ist mithin eine Parabel, deren Achse parallel zur $d Y_y$-Achse liegt und deren Scheitel die Abszisse

$$Y = -\frac{b}{2a} = -h \cot \nu \quad \ldots (30)$$

hat. Wegen $b^2 - 4\,ac = 0$ liegt der Scheitel auf der Y-Achse.

Für $\nu = 0^g$ erhält man die vom „Normalfall" her bekannte Beziehung

$$dY_y = \frac{h}{f} dy, \quad \ldots (31)$$

wonach bei Senkrechtaufnahmen der Fehler $d Y_y$ mit dy in linearer Beziehung steht.

Bei $\nu \neq 0^g$ kann die Fehlerkurve in dem für Y in Frage kommenden Bereich mit Rücksicht auf die nach (30) gegebene große Entfernung des Kurvenscheitels von dem Koordinatenursprung durch ihre Tangente ersetzt werden. Der Schnittpunkt der Parabel mit der $d Y_y$-Achse hat die Koordinaten

$$\begin{aligned} Y &= 0 \\ d Y_y &= \frac{h \cos^2 \nu}{f} dy \end{aligned} \quad \ldots (32)$$

und die Tangente in diesem Punkt hat die Steigung

$$(dY_y)' = +\, b. \quad \ldots (33)$$

In Figur 7 sind die Fehlerkurven für $\nu = 0^g$ und $\nu = 6^g$ dargestellt. Die Diskussion wird gemeinsam mit dem Einfluß der Bildkoordinatenfehler auf die Geländekoordinate X geführt.

D b) *Der Einfluß auf die Geländekoordinate X*

Die Geländekoordinate X ist von beiden Bildkoordinaten abhängig. Für den Fehlereinfluß gilt

$$dX_{xy} = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy = dX_x + dX_y.$$

Führt man die partielle Differentiation gliedweise aus, so kommt zunächst

$$dX_x = \frac{h}{s - y \sin \nu} dx = \frac{X}{x} dx$$

und nach Elimination der Bildkoordinate x ergibt sich der Einfluß eines Fehlers dx auf X zu

$$dX_x = \frac{h \cos \nu + Y \sin \nu}{f} dx \qquad \ldots (34)$$

Ferner erhält man

$$dX_y = \frac{h\, x \sin \nu}{(s - y \sin \nu)^2} dy = \frac{X^2 \sin \nu}{h\, x} dy,$$

woraus durch Elimination von x

$$dX_y = \left[\frac{X \sin \nu \cos \nu}{f} + \frac{X\, Y \sin^2 \nu}{f\, h}\right] dy \qquad \ldots (35)$$

wird.

Setzt man schließlich $dy = dx = dk$, so können (34) und (35) zusammengezogen werden zu

$$dX_k = \left[\frac{X\, Y \sin^2 \nu}{f\, h} + \frac{X \sin \nu \cos \nu}{f} + \frac{Y \sin \nu}{f} + \frac{h \cos \nu}{f}\right] dk. \qquad \ldots (36)$$

Mit

$$\left.\begin{aligned} a = \frac{\sin^2 \nu}{f\, h} dk, \quad b = \frac{\sin \nu \cos \nu}{f} dk, \quad c = \frac{\sin \nu}{f} dk \quad \text{und} \\ d = \frac{h \cos \nu}{f} dk - dX_k, \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (37)$$

worin ν, dk, f und h Konstanten sind, erhält (36) die Form

$$a\, X\, Y + b\, X + c\, Y + d = 0. \qquad \ldots (38)$$

Die Fehlerkurve dX_k ist demnach eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt durch die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} Y &= -\frac{b}{a} = -h \cot \nu \\ X &= -\frac{c}{a} = -\frac{h}{\sin \nu} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (39)$$

gegeben ist.

Für $\nu = 0^g$ geht (36) über in

$$dX_k = \frac{h}{f} dk. \qquad \ldots (40)$$

Im Falle von Senkrechtaufnahmen ist folglich auch der Fehler dX_k nur von der Bildmaßstabszahl und von dk abhängig.

Die Auflösung von (38) nach X gibt

$$X = -\frac{c\, Y + d}{a\, Y + b} \qquad \ldots (41)$$

und für $Y = 0$ folgt daraus

$$X = -\frac{d}{b}. \qquad \ldots (42)$$

An Hand von (42) können die Ordinaten der Schnittpunkte der Fehlerkurven mit der X-Achse berechnet werden. Ausgehend von den unter 2. B) und 3. A) getroffenen Annahmen findet man, daß für den in Frage kommenden Bereich nur die aus $dX_k = 3$ cm hervorgehende Fehlerkurve in Betracht kommt (die aus $dX_k = 2$ cm und 4 cm resultierenden Fehlerkurven schneiden die X-Achse bei $X \doteq - 3500$ m bzw. $X \doteq + 3600$ m).

Bei $\nu = 0^g$ geht die Kurve durch den Koordinatenursprung und hat dort die Steigung -1.

In Figur 8 sind die Fehlerkurven für $\nu = 0^g$ und $\nu = 6^g$ dargestellt.

Die Fehler, die in den Bildkoordinaten entstehen, sind von zweifacher Art: 1) sind es systematische Fehler, hervorgerufen durch eine fehlerhafte Lage des Bildnadirs N' (vgl. Figur 1) und
2) sind es zufällige Fehler, hervorgerufen durch die Messung am Komparator.

Die Ergebnisse der Untersuchung beziehen sich auf die unter 1) genannten Fehler. Sie sind, da die Lage des Nadirpunktes im Bild nur mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}01$ bis $\pm 0{,}02$ mm erhalten wird, verhältnismäßig groß. Ihre Wirkung jedoch führt, wie man den Figuren 7 und 8 entnimmt, praktisch nur zu Translationen, die bei der Anfelderung eliminiert werden.

Die Wirkung der unter 2) genannten Fehler hingegen bleibt, da sie unbestimmtes Vorzeichen haben, bestehen.

4. Leistungsgrenzen

Bei der unter 3. durchgeführten fehlertheoretischen Untersuchung der Gleichungen (4) sind die bei Anwendung der Perspektivtransformation auftretenden Fehlereinflüsse formelmäßig dargestellt worden. Dabei hat sich gezeigt, daß die Genauigkeit der Auswertung hauptsächlich von der Wirkung des Nadirdistanzfehlers $d\nu$ abhängig ist.

Um das bei großmaßstäblichen luftphotogrammetrischen Vermessungen zu erwartende qualitative Leistungsvermögen abschätzen zu können, wurden die Fehlerformeln unter Zugrundelegung der bei solchen Arbeiten gegenwärtig geltenden Daten zahlenmäßig ausgewertet. Aus den graphischen Darstellungen entnimmt man, daß

1) die verbleibenden, durch $d\nu$ hervorgerufenen Fehler systematischer Art in der Größenordnung von 6 cm liegen,

2) die von den Messungsfehlern in den Bildkoordinaten herrührenden zufälligen Fehler etwa ± 3 cm betragen.

Der Einfluß von Höhenunterschieden muß an Hand der vorliegenden Formeln jeweils gesondert abgeschätzt werden.

Bei praktischer Anwendung des zur Rede stehenden Verfahrens wäre hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit zu bedenken, daß durch die in Form von unabhängigen Doppel- und Mehrfachauswertungen erwünschten Kontrollen (Längs- und Querüberdeckung) noch Genauigkeitssteigerungen erzielt werden können.

IV. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf ein Verfahren zur Lagebestimmung luftsichtbar gemachter Punkte mittels rechnerischer Einbildphotogrammetrie. Es beruht auf der zwischen Bild und Gelände bestehenden perspektiven Zuordnung und benutzt die im Hauptvertikalschnitt geltenden, einfachen Abbildungsgleichungen. Je Bild sind 4 Paßpunkte erforderlich und die Höhen der (lagemäßig) zu bestimmenden Punkte müssen bekannt sein. Hinsichtlich der Geländeform werden folglich keine einschränkenden Bedingungen gestellt. Für die Messung der Bildkoordinaten werden Präzisionskomparatoren als vorhanden vorausgesetzt und für die Berechnung der Lotrichtung und der absoluten Flughöhe ist es aus wirtschaftlichen Erwägungen notwendig, daß moderne Rechenhilfsmittel (Rechenautomaten) eingesetzt werden können.

Von besonderem Interesse waren die bei diesem Verfahren auftretenden Genauigkeitsfragen. Ausgehend von den terrestrischen- und photogrammetrischen Grundlagen, sowie von den beim Rückwärtseinschneiden im Raum entstehenden Fehlern, wurden die Transformationsformeln fehlertheoretisch untersucht und unter Zugrundelegung der bei großmaßstäblichen luftphotogrammetrischen Vermessungen gegenwärtig geltenden Daten numerisch ausgewertet und graphisch dargestellt. An Hand dieser Unterlagen ist versucht worden, das qualitative Leistungsvermögen des Verfahrens abzuschätzen. Es hat sich gezeigt, daß die Genauigkeit der Auswertung hauptsächlich von der Wirkung des Nadirdistanzfehlers $d\nu$ abhängig ist. Hinreichend ebenes Gelände vorausgesetzt liegen die verbleibenden Fehler systematischer Art in der Größenordnung von etwa 6 cm und die zufälligen Fehler betragen rund 3 cm. Der Einfluß von Geländehöhenunterschieden muß jeweils gesondert abgeschätzt werden.

Das behandelte Verfahren ist übersichtlich und einfach zu handhaben. Für eine Gegenüberstellung mit den Verfahren der Stereophotogrammetrie müssen die Ergebnisse weiterer, auf breiterer Basis durchgeführter, Versuchsarbeiten abgewartet werden.

Literatur

[1] Zur rechn. Durchführung d. Vierpunktverfahrens, ÖZfV *45* (1957) Nr. 1.
[2] Beitrag z. num. u. graph. Auswertung v. Luftbildern, ÖZfV *45* (1957) Nr. 4.
[3] Luftphotogrammetrische Vermessung signalisierter Punkte, deren Meereshöhen anderweitig ermittelt wurden, ÖZfV *48* (1960) Nr. 3.
[4] Über das Rückwärtsschneiden im Raum, ÖZfV *43* (1955) Nr. 6.
[5] Ferienkurs für Photogrammetrie, Verlag K. Wittwer 1930.
[6] On astronomic, photogrammetric and trigonometric refraction, dissertation, Stockholm 1950.
[7] Genauigkeitsfragen beim räumlichen Rückwärtseinschnitt und bei der Doppelpunkteinschaltung im Raum ZfV 1942/10.
[8] Bildmessung und Luftbildwesen 1959, Heft 4.

Studie zur photogrammetrischen Bearbeitung der österreichisch-bayrischen Staatsgrenze (II. Abschnitt)

Von *Franz Halwax*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien)

Die Abbildung 1 der Beilage zeigt den Abschnitt II der österreichisch-bayrischen Staatsgrenze und die Gebietsaufteilung für die terrestrische Einmessung von Paßpunkten. Der Polygonzug bei den Streifen 8 und 9 wurde vom bayrischen Landesvermessungsamt zur Prüfung der photogrammetrischen Genauigkeit gemessen.