Über die Azimutreduktionen wegen Lotkrümmung

Wilhelm Embacher [1]

[1] *Technische Hochschule Wien IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **50** (4), S. 122–126

1962


```
@ARTICLE{Embacher_VGI_196219,
Title = {{\"U}ber die Azimutreduktionen wegen Lotkr{\"u}mmung},
Author = {Embacher, Wilhelm},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {122--126},
Number = {4},
Year = {1962},
Volume = {50}
}
```

Die Verbesserungen selbst erhält man dann nach Formel (12) durch Aufsummieren der Einzelverbesserungen:

$$\triangle x = dx^{(1)} + dx^{(2)} = -2{,}269 + 0{,}111 = -2{,}158\ dm$$
$$\triangle y = dy^{(1)} + dy^{(2)} = +0{,}431 + 0{,}654 = +1{,}085\ dm$$

Nach dem klassischen Ausgleichsverfahren hätte man vorerst die Gauß'schen Normalgleichungen aufstellen müssen

$$+210{,}09\ \triangle x - 33{,}13\ \triangle y + 489{,}22 = 0,$$
$$-\ 33{,}13\ \triangle x + 19{,}75\ \triangle y - 92{,}91 = 0$$

deren Lösungen

$$\triangle x = \frac{[ab].[bl] - [bb].[al]}{[aa].[bb] - [ab]^2} = \frac{-6583{,}99}{3051{,}68} = -2{,}158\ dm$$

$$\triangle y = \frac{[ab].[al] - [aa].[bl]}{[aa].[bb] - [ab]^2} = \frac{3311{,}60}{3051{,}68} = +1{,}085\ dm$$

mit den oben gefundenen in völliger Übereinstimmung stehen. Ebenso kann man sich von der Evidenz der Fehlerquadratsumme

$$[vv] = [al].\triangle x + [bl].\triangle y + [ll] = 72{,}02$$

leicht überzeugen. Abschließend sei auf die hier deutlich erkennbare starke Konvergenz dieses Iterationsverfahrens hingewiesen. *(Fortsetzung folgt)*

Über die Azimutreduktionen wegen Lotkrümmung

Von *Wilhelm Embacher*, Wien

Um das Azimut des Vertikalschnittes von einem Geoidpunkt nach einem benachbarten Geoidpunkt zu erhalten, muß das astronomische Azimut des Vertikalschnittes nach einem benachbarten Punkt von der physischen Erdoberfläche streng auf das Geoid reduziert werden. Ist der Verlauf der Lotlinie bekannt, so können diese Reduktionen durchgeführt werden. Wäre z. B. die Krümmung und die Torsion in jedem Punkt der Lotlinie nur eine Funktion der Bogenlänge, so könnte man die Lotlinie durch das Integral der Riccatischen Differentialgleichung darstellen. Obwohl die Torsion in einem Teilkörper mit glatter Dichtefunktion vernachlässigt werden kann, ist die Lotlinie im allgemeinen keine ebene Kurve, da sich sowohl die Größe, als auch die Richtung des Krümmungsradius und damit des horizontalen Gradienten an jeder Unstetigkeitsstelle der Dichte unstetig ändert.

Nach Bruns[1]) gelten für zwei Teilkörper die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} g\left(\frac{\cos\Phi}{R} - \frac{\cos\Phi'}{R'}\right) &= -4\pi\,(k_o - k_o')\sin\delta\cos\delta \\ g\left(\frac{\sin\Phi}{R} - \frac{\sin\Phi'}{R}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1)$$

wobei Φ, Φ' Richtungswinkel der Krümmungsradien R und R' beim Durchgang

[1]) *H. Bruns*, Figur der Erde, Berlin 1878.

der Lotlinie durch die Massen mit der Dichte k_o und k_o' und mit dem Verwerfungswinkel δ sind.

Damit ist die Frage nach dem Verlauf der Lotlinie unter der physischen Erdoberfläche auf das Gebiet der Lagerstättenforschung zurückgeführt. Sollte es einmal allgemein möglich sein, exakte Angaben über Dichteänderungen entlang der Lotlinie machen zu können, so ist auch der Verlauf der Lotlinie geklärt.

Gelingt es, außer der Richtung der bis jetzt zur Projektion verwendeten Tangente in einem Punkt der Lotlinie auch die Krümmung zu messen, könnte man durch Fortsetzung des Krümmungskreises bis zum Geoid eine Zuordnung zwischen Oberflächenpunkt und Geoidpunkt erreichen, welche der wirklichen Gegebenheit eher entspricht; denn der bis zum Geoid fortgesetzte Krümmungskreis hat zwar nicht den Anspruch die Lotlinie darzustellen, doch wird er diese besser approximieren, als die Tangente, da die Berührung von höherer Ordnung ist.

Bekanntlich können aus dem horizontalen Gradienten der Krümmungsradius der Schwerkraftlinie und damit dessen reziproker Wert, die Krümmung, berechnet werden. Die Komponenten W_{xz} und W_{yz} des horizontalen Gradienten des skalaren Feldes der Schwereintensität können gravimetrisch bestimmt werden.

Der Horizontalgradient G ergibt sich damit

$$G = \sqrt{W^2_{xz} + W^2_{yz}}\,. \qquad \ldots(2)$$

Den Krümmungsradius R der Schwerkraftlinie erhält man bekanntlich aus

$$R = \frac{g}{G}, \qquad \ldots(3)$$

wenn g die Schwerebeschleunigung ist.

Die Aufgabenstellung, Winkelmessungen von einem Punkt der physischen Erdoberfläche unter Berücksichtigung der Lotlinienkrümmung auf das Geoid zu reduzieren, ist unter Annahme eines flachen Kreisbogens zu lösen.

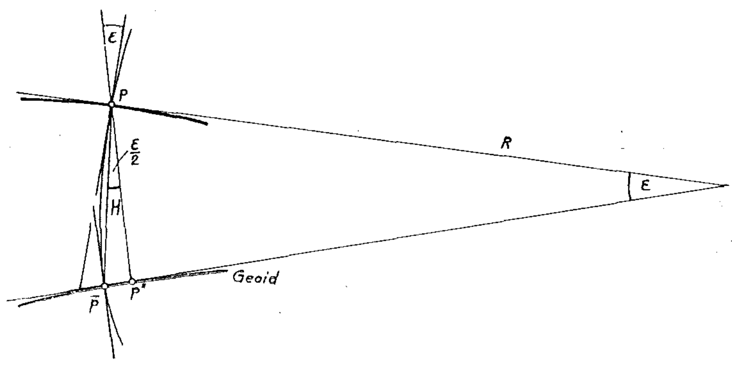

Abb. 1

Im Punkt P ist die Lotlinie durch die Richtung ihrer Tangente (φ', λ') und durch ihre Krümmung $\frac{1}{R}$ gegeben. Wird der Krümmungskreis in P bis zu einem Durchstoßpunkt in $\bar{P}$ mit dem Geoid fortgesetzt, so ist der Winkel zwischen der

Lotrichtung in P und der Lotrichtung in $\bar{P}$ nach Formel (3)

$$\varepsilon'' = \rho'' \frac{G}{g} H. \qquad \ldots(4)$$

Sind die geographischen Koordinaten in $\bar{P}$, also auf dem Geoid, $\bar{\varphi}'$ und $\bar{\lambda}'$, so sind

$$d\varphi' = \bar{\varphi}' - \varphi', \; d\lambda' = \bar{\lambda}' - \lambda' \qquad \ldots(5)$$

die Reduktionen der astronomischen Beobachtungen auf das Geoid. Der Krümmungsanteil ε im Azimut α ist dann

$$\varepsilon = d\varphi' \cos\alpha + d\lambda' \sin\alpha \cos\varphi. \qquad \ldots(6)$$

Der Einfluß ε_n der Lotkrümmung auf die Richtung eines Vertikalschnittes im Azimut α ist durch jene Komponente bedingt, die senkrecht zur Visierebene steht. Es ist also

$$\varepsilon_n = -d\varphi' \sin\alpha + d\lambda' \cos\alpha \cos\varphi. \qquad \ldots(7)$$

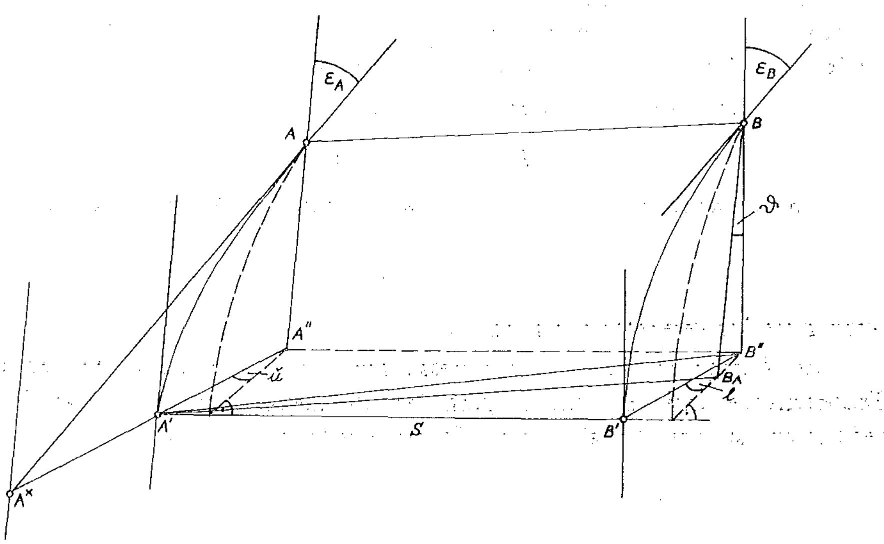

Abb. 2

Es soll das in A nach B gemessene Azimut so auf das Geoid reduziert werden, als wäre es von A' nach B' gemessen worden. Als erstes muß der Normalschnitt $ABA^{\times}$ in $A^{\times}$ auf das Lot von $A^{\times}$ bezogen werden, also wegen des wirksamen Teiles der Lotkrümmung ε_A, d. h. wegen ε_{nA} reduziert werden.

$$da_1 = -\frac{H_B}{S}\varepsilon_{nA}. \qquad \ldots(8)$$

Nun folgt die Reduktion wegen der windschiefen Lotrichtung auf dem Geoid. ϑ sei der Winkel, den die Lotrichtung in B'' und in $A^{\times}$ in ihrer Projektion auf die Normalebene von $A'B'$ bilden.

Dann ist

$$da_2 = +\frac{H_B}{S}\vartheta. \qquad \ldots(9)$$

Nun muß die Messung von B'' auf B' zentriert werden:

$$da_3 = + \frac{\overline{B'B''}}{S} \cos l = \frac{\varepsilon_{nB}}{2S} H_B, \qquad ..(10)$$

und schließlich von $A^\times$ auf A' bezogen werden:

$$da_4 = + \frac{\overline{A^\times A'}}{S} \cos n = \frac{\varepsilon_{nA}}{2S} H_A. \qquad ...(11)$$

Es ist also:

$$[da] = -\frac{H_B}{S} \varepsilon_{nA} + \frac{H_B}{S} \vartheta + \frac{H_B \, \varepsilon_{nB}}{2S} + \frac{H_A \, \varepsilon_{nA}}{2S}. \qquad ...(12)$$

Der Ausdruck $\frac{H_B}{S} \vartheta$ läßt sich nach *Vening Meinesz* darstellen:

$$\frac{H_B}{S} \vartheta = \frac{H_B}{S} \Big[(\xi_B + d\varphi'_B - \xi_A - d\varphi'_A) \sin \alpha_{AB} -$$

$$- (\eta_B + d\lambda'_B \cos \varphi_B - \eta_A - d\lambda' \cos \varphi_A) \cos \alpha_{AB} \Big] + \frac{H_B \, e^2}{2a} \rho'' \cos^2 \varphi_A \sin 2\alpha_{AB} =$$

$$= \frac{H_B}{S} \Big[(\xi_B - \xi_A) \sin \alpha_{AB} - (\eta_B - \eta_A) \cos \alpha_{AB} \Big] + \frac{H_B}{S} \Big[(d\varphi'_B - d\varphi'_A) \sin \alpha_{AB} -$$

$$- (d\lambda'_B \cos \varphi_B - d\lambda'_A \cos \varphi_A) \cos \alpha_{AB} \Big] + \frac{H_B \, e^2}{2a} \rho'' \cos \varphi_A \sin 2\alpha_{AB}.$$

Unter Verwendung der Gleichung (7) geht (10) über in

$$da_3 = \frac{H_B}{2S} \left(- d\varphi'_B \sin \alpha_{AB} + d\lambda'_B \cos \varphi_B \cos \alpha_{AB} \right),$$

und (11) lautet:

$$da_4 = \frac{H_A}{2S} \left(- d\varphi'_A \sin \alpha_{AB} + d\lambda'_A \cos \varphi_A \cos \alpha_{AB} \right).$$

Schließlich kann man für (8) schreiben:

$$da_1 = -\frac{H_B}{S} \left(- d\varphi'_A \sin \alpha_{AB} + d\lambda'_A \cos \varphi_A \cos \alpha_{AB} \right).$$

Dadurch wird

$$da_1 + da_2 = \frac{H_B}{S} \Big[(\xi_B - \xi_A) \sin \alpha_{AB} - (\eta_B - \eta_A) \cos \alpha_{AB} \Big] +$$

$$+ \frac{H_B e^2}{2a} \rho'' \cos^2 \varphi_A \sin 2\alpha_{AB} + \frac{H_B}{S} \left(d\varphi'_B \sin \alpha_{AB} - d\lambda' \cos \varphi_B \cos \alpha_{AB} \right).$$

Die Summe aller vier Korrektionen lautet:

$$[da] = \frac{H_B}{S} [(\xi_B - \xi_A) \sin \alpha_{AB} - (\eta_B - \eta_A) \cos \alpha_{AB} + \frac{H_B \, e^2}{2a} \rho'' \cos \varphi_A \sin 2\alpha_{AB} +$$

$$+ \frac{H_B}{2S} (d\varphi'_B \sin \alpha_{AB} - d\lambda'_B \cos \varphi_B \cos \alpha_{AB}) - \frac{H_A}{2S} (d\varphi'_A \sin \alpha_{AB} - d\lambda'_A \cos \varphi_A \cos \alpha_{AB}) =$$

$$= [da] = \frac{H_B}{S} [(\xi_B - \xi_A) \sin \alpha_{AB} - (\eta_B - \eta_A) \cos \alpha_{AB} + \frac{H_B\, e^2}{2a} \rho'' \cos \varphi_A \sin 2\alpha_{AB} +$$

$$+ \frac{1}{2S} \sin \alpha_{AB} \, [(H d\varphi')_B - (H d\varphi')_A] - \frac{1}{2S} \cos \alpha_{AB} \, [(H \cos \varphi \, d\lambda')_B - (H \cos \varphi \, d\lambda')_A]. \qquad \ldots (13)$$

K. Ledersteger[2]) hat in seiner Arbeit „Die Reduktion der astronomischen Beobachtungen wegen Lotkrümmung" dieselbe Formel für die Gesamtreduktion des beobachteten Azimutes auf das Geoid auf anderem Wege abgeleitet, wobei das erste Glied auf *Vening Meinesz* zurückgeht und der zweite Ausdruck die bekannte ellipsoidische Zielpunktreduktion darstellt.

Zur Gesamtverbesserung kommt noch der Ausdruck

$$da_5 = d\lambda' \sin \varphi \qquad \ldots (14)$$

d. i. die Meridiankonvergenz, welche auf Grund der Längenänderung wegen des Lotkrümmungsanteiles $d\lambda'$ berücksichtigt werden muß. Diese Reduktion ist im Normalfall, d. h. auf dem Rotationssphäroid, Null. Im allgemeinen wird sie sehr klein sein. Ihr Maximum erreicht sie bei einem senkrecht zur Meridianebene verlaufenden Horizontalgradienten. In diesem Fall, bei einer Lotkrümmung von z. B. 5 Bogensekunden und einer Höhe von 1000 m, beträgt die Azimutreduktion wegen der Meridiankonvergenz in unseren Breiten etwa 0,0004 Bogensekunden, d. h. sie ist praktisch nicht zu berücksichtigen.

Die Azimutreduktion wegen der Lotkrümmung, also der Ausdruck

$$\frac{1}{2S} \sin \alpha_{AB} [(H d\varphi')_B - (H d\varphi')_A] - \frac{1}{2S} \cos \alpha_{AB} [(H \cos \varphi \, d\lambda')_B - (H \cos \varphi \, d\lambda')_A]$$

erreicht sein Maximum bei einem in der Nord-Süd-Richtung verlaufenden Gradienten und einem Vertikalschnitt, der in der Ost-West-Richtung liegt. Wenn man annimmt, daß in einem begrenzten Vermessungsgebiet die Lotkrümmung etwa gleich groß ist, wird die Azimutreduktion dem Höhenunterschied zwischen Standpunkt und Zielpunkt direkt proportional. Die abschließende Tabelle gibt Aufschluß über die Größe dieser Reduktion (in Bogensekunden) bei einer Lotkrümmung von 5 Bogensekunden und den oben festgelegten Messungsumständen.

S_m \ $\triangle H_m$	200	400	600	800	1000
1000	0,5″	1,0″	1,5″	2,0″	2,5″
5000	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
10000	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
20000	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125
30000	0,017	0,034	0,050	0,067	0,083

[2]) *K. Ledersteger*, Die Reduktion der astronomischen Beobachtungen wegen Lotkrümmung. Schweiz. Zeitschr. f. Verm., Kulturtechnik u. Photogrammetrie. 1955, Heft 8.