

Paper-ID: VGI\_196222



## Die Zielfehlertheorie

Hellmuth Brunner <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Ingenieurkonsulent für Vermessungswesen, Vöcklabruck, Stadtplatz 12*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **50** (5, 6), S. 154–159, 181–186

1962

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Brunner_VGI_196222,  
Title = {Die Zielfehlertheorie},  
Author = {Brunner, Hellmuth},  
Journal = {"Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen"},  
Pages = {154--159, 181--186},  
Number = {5, 6},  
Year = {1962},  
Volume = {50}  
}
```



geübten Tischrechenverfahren derartige Bemühungen wegen der geringen Möglichkeiten, die diese Rechenmaschinen boten, nur unmerklich in Erscheinung treten konnten, geben die modernen Elektronenanlagen in ihrer Vielfalt von Funktionen in dieser Hinsicht freien Raum. So gesehen darf das in dieser Arbeit dargelegte Verfahren nicht als „die Lösung“ des gestellten Problems aufgefaßt werden, sondern nur als eine von vielen möglichen Lösungen. Die Forschung auf diesem Gebiet wird uns immer wieder neue und bessere Verfahren in die Hand geben, aber niemals wird man sagen können, eine bestmögliche Lösung gefunden zu haben.

#### Literatur

[1] *Höllrigl, F.*, Wien: Rationalisierung im österreichischen Bundesvermessungsdienst durch den Einsatz des Lochkartenverfahrens für geodätische Berechnungen; *ÖZfV* 48 (1960), Nr. 2/3.

[2] *Wolf, H.*, Bonn: Ausgleichung ohne Zuhilfenahme von Normalgleichungen, unter Verwendung eines schwedischen Manuskriptes von G. Galvenius: Erfahrungsbericht über die Benützung von Rechenautomaten für geodätische Berechnungen; *Vermessungstechnische Rundschau* 1959, Heft 12.

[3] *Morpurgo, A.*, Graz: Die wiederholte Einzelausgleichung, ein Verfahren zur vereinfachten Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit vielen Unbekannten; Teubners technische Leitfäden, Band 26, Leipzig und Berlin 1930.

[4] *Stiefel, E.*, Zürich: Ausgleichung ohne Aufstellung der Gauß'schen Normalgleichungen; Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, Jahrgang 1952/53, Heft 3.

[5] *Bodewig, E.*, Holland: Matrix Calculus; North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1956.

## Die Zielfehlertheorie

von *Hellmuth Brummer*, Vöcklabruck

### Vorschau

Die Geodäsie und alle messenden Naturwissenschaften leiten ihr Ergebnis von Messungsgrößen ab. Dieses „Ist-Resultat“, das die Messung ergibt und das „Soll-Resultat“, das die mathematische Beziehung fordert, ist niemals gleich. Der Unterschied hat seine Ursache im Messungsfehler. Er ist eine Funktion der Unvollkommenheit der menschlichen Sinneswerkzeuge.

Will man den uns umgebenden Raum durch rechtwinkelige Koordinaten ordnen, so wird diese Ordnung umso mangelhafter sein, je größer  $x$ ,  $y$  und  $z$  werden. Diese Störung der math. Beziehung wird durch den Messungsfehler einmal so groß werden, daß sie zur Schaffung der Raumordnung nicht mehr anwendbar ist. Dieses Versagen gilt immer, ob nun die Koordinaten astronomische, irdische oder mikroskopische Werte annehmen. Die Sternparallaxenmessung versagt erst mit Lichtjahrgrößen, während die Methode der opt. Distanzmessung, die bei 100 m gute Werte gibt, bei 1 km unbrauchbar ist. Diese Unzulänglichkeit gilt auch für den Mikroraum. Die Forschung in der prakt. Geometrie und aller messenden Naturwissenschaften gipfelt darin, den brauchbaren Messungsraum immer mehr zu erweitern. Sie läuft darauf hinaus, den Messungsfehler in seiner Wirkung zu erkennen.

### *Der Gauß'sche Algorithmus*

Der auf der Hochschule ausgebildete Geodät wird mit den Widersprüchen, die sich aus der Messung ergeben, durch die Ausgleichsrechnung fertig. Sie beruht im

wesentlichen auf der Minimalbedingung für die Verbesserung und auf dem Eliminieren des doppelten Vorzeichens des Messungsfehlers während der Rechnung. Beide Voraussetzungen sind willkürlich. Sie haben sich in der Praxis jedoch bewährt, so daß die Ausgleichsrechnung aus der prakt. Geometrie nicht mehr wegzudenken ist. Sie ist jedoch eine Automatik geblieben, die nur in den Gewichten auf den Fehlercharakter eingeht. Sie allein aber sagen nichts über das Zusammenspiel der Messungsfehler selbst aus. Es läßt sich leicht zeigen, daß die geometrische Addition nicht immer anwendbar ist. Da nun jeder Messungsfehler aus einer Summe von Teilfehlern besteht, so muß es Aufgabe jeder Fehleruntersuchung sein, diese aufzudecken und ihr Zusammenspiel zu erkennen. Erst dort, wo die Herstellung der Beziehung von Teilfehlern untereinander nicht gelingt, darf man sich der geom. Addition bedienen.

#### *Vom Messungs- zum Zielfehler*

Gemessen werden nur Strecken. Auch der Winkel ist eine bestimmte Strecke des Kreisumfanges. Zum Messen bedarf es eines Maßstabes. Das ist eine Strecke, der im geordneten Raum ein bestimmter Wert zugeteilt ist. Die zu messende Strecke gehört dieser Raumordnung noch nicht an und wird erst durch Messung in diese eingeordnet. Gemessen wird nun so, daß Maßstab und zu messende Strecke miteinander verglichen werden, durch Decken zweier bestimmter Punkte von Maßstab und zu messender Strecke. Die Tätigkeit des „zur Deckung bringen“ wird als Zielen bezeichnet. Jede Messung zerfällt daher in 2 Zielvorgänge. Da jede Zielung selbst fehlerhaft ist, ist der Messungsfehler das Zusammenwirken von 2 Zielfehlern. Dadurch reduziert sich das Messungsfehlerproblem auf die Untersuchung des Zielfehlers.

Es sei noch bemerkt, daß es sich bei der Messung immer um die Herstellung von zwei Koinzidenzen (Deckung) handelt, ganz gleich, ob man ein Maßband an einen Grenzstein anhält, ob man mit dem Faden eines opt. Instrumentes eine Marke anzielt oder ob am Radargerät die Wellenverschiebung abgelesen wird.

#### *Zielen, ein physiologischer Vorgang*

Die Herstellung der Deckung von zwei Punkten ergibt sich aus dem Zusammenwirken von Auge und Hand. Durch die Hand wird eine Bewegung eingeleitet, durch welche sich die zur Deckung kommenden Punkte einander nähern. Das Auge verfolgt diese Bewegung und wird im Augenblick der Deckung durch das Nervensystem der Hand den Befehl erteilen, die Bewegung abubrechen. Dies gilt immer, ganz gleich, ob der Bewegungsvorgang durch einen Bewegungsautomaten vor sich geht oder ob mit oder ohne opt. System beobachtet wird. Eingeleitet und abgebrochen wird die Bewegung immer durch die Hand und registriert wird der Bewegungsvorgang immer durch das Auge. Es läßt sich daher der Satz aufstellen: „Das Zielen ist ein von der Hand ausgelöster Bewegungsvorgang, der durch das Auge überwacht wird“.

Der Vollständigkeit halber sei noch angeführt, daß auch andere Sinnesorgane zum Messen herangezogen werden können. Man kann zwei Werkstücke durch Befühlen mit der Hand auf ihre Deckung prüfen. Man kann mittels des Ohres Schallwellen vergleichen. Doch solche Messungsmethoden spielen in der prakt. Geometrie keine Rolle und belasten das Zielen nicht. Schließlich kommt man durch das Zusammenspiel von Auge und Hand auf die ursprüngliche Wortbedeutung des Zielen zurück, nämlich dem Zielen mit dem Gewehr. Hier wird die Bewegung der

Zielvorrichtung zum Ziel mittels Hand eingeleitet. Dann kommt der Befehl des Auges an die Hand zum Abdrücken.

Mit der Zieldefinition ist nun eine ganz wesentliche Feststellung gemacht. Nicht opt. Systeme oder Theodolite messen, sondern die Sinneswerkzeuge ganz allein. Opt. Systeme und Mechanismen unterstützen Auge und Hand. Sie können die Fehlergröße, *auf den Objektsraum bezogen*, verändern. Der sich an der Netzhaut abspielende Zielvorgang wird jedoch nicht berührt. Die Fehlergröße bleibt bei gleichen Netzhautbildern immer gleich.

### Benennungen

1. Der Zieler: Instrumentfaden oder sonst eine Vorrichtung, die mit der Zielmarke zur Deckung gebracht werden soll.
2. Das Ziel: Zielmarke oder sonst ein Gegenstand, auf welchen gezielt wird.
3. Die Zielanordnung: Das Netzhautbild des Zieles und des Zieler mit der näheren Umgebung.
4. Vergrößerung =  $v$ : ist das opt. Übersetzungsverhältnis.
5. Der Fernrohrzielfehler =  $z$ : ist das Zusammenwirken aller Teilfehler, die bei Beobachtung eines Zieles mittels Fernrohr entstehen.
6. Physische Reaktionszeit =  $t$ : ist jene Zeit, die notwendig ist, um auf einen Sinneseindruck zu reagieren.
7. Min. Bewegungswahrnehmung =  $B_{min}$ : ist jene kleinste Bewegung, die das Auge gerade noch wahrnimmt.
8. Der Deckungsfehler =  $d$ : Er ist die mangelhafte Aufdeckung, die durch die Unvollkommenheit des Auges allein verursacht wird.
9. Der Einstellfehler =  $e$ : Er ist die Verfehlung des Zieles, die durch die Trägheit der Hand allein verursacht wird.
10. Fadenparallaxe =  $p$ : Die Unsicherheit der Beobachtung bei Fadeninstrumenten.
11. Die optische Fehlerkonstante =  $o$ : ist jene Zahl, die die Güte des opt. Systems angibt.

Zwischenergebnisse bei der Untersuchung des Zielfehlers, durch welche ein oder mehrere Teilfehler beteiligt sind, werden mit Indizes  $d$ ,  $e$ ,  $o$  und  $p$  bezeichnet. Je nachdem sich dieselben auf die Netzhaut oder auf den Gegenstandsraum beziehen, erhalten sie noch die Indizes  $n$  und  $g$ .

Daher ist:

12. Der Zielfehler  $z_n$ : ist durch Zusammenspiel von  $d$  und  $e$  an der Netzhaut gegeben.
13. Der Zielfehler  $z_g$ : wie 12, im Gegenstandsraum gemessen.
14. Der Zielfehler  ${}_o z_n$ : ist 12, durch das optische System, an der Netzhaut gemessen.
15. Der Zielfehler  ${}_o z_g$ : ist 14, im Gegenstandsraum gemessen.
16. Der Zielfehler  ${}_{op} z_n$ : entsteht durch Beobachtung mit Instrumentenfaden, an der Netzhaut gemessen.
17. Der Zielfehler  ${}_{op} z_g$ : ist 16, im Gegenstandsraum gemessen.

### Der Deckungsfehler

Das Auge ist ein Organ zur Verarbeitung von Lichteindrücken. Es reagiert nur auf verschiedenen nebeneinanderliegende Helligkeitsunterschiede. Der stärkere Lichteindruck wird als hell, der schwächere als dunkel empfunden. Diese Empfindung ist unabhängig von der absoluten Helligkeit. Hell und dunkel sind die Hilfsmittel des Auges, um auszusagen, welche Fläche mehr und welche Fläche weniger Licht ausstrahlt. Die für die Seh Wahrnehmung notwendigen Helligkeitsunterschiede beeinflussen das Sehnervensystem anders, wenn sich die Form, die Flächengröße, das Helligkeitsgefälle von hell zu dunkel und die Farbe der Flächen ändert.

Eine Zielanordnung stellt nun eine an der Netzhaut bestimmte Verteilung von Hell und Dunkel vor. Für diese Verteilung hat nun das Auge beim Zielen einen bestimmten Grad von Reaktionsfähigkeit, die durch eine bestimmte Größe des Deckungsfehlers ausgedrückt wird. Ändert sich die Zielanordnung nach Form, Fläche, Helligkeitsgefälle und Farbe, so ändert sich die Reaktionsfähigkeit des Auges, welche im Deckungsfehler zum Ausdruck kommt.

Daraus leitet sich der Satz ab:

„Der Deckungsfehler ist eine Funktion der Zielanordnung“.

Änderungen der Zielanordnung, auf geodätische Zielungen zugeschnitten, können sein:

1. Die Form von Ziel und Zieler (Parallelstriche, Keile, Kreise usw.).
2. Die Größe von Ziel und Zieler.
3. Die Helligkeit der Umgebung von Ziel und Zieler.
4. Helligkeitsgefälle von Hell zu Dunkel (Kontrast).
5. Farbkontraste.

Kombinationen dieser Änderungsmöglichkeiten geben eine sehr große Zahl von verschiedenen Zielanordnungen. Es ist nicht Aufgabe dieses Aufsatzes, solche einzelne Zielanordnungen zu besprechen. Es sei nur erwähnt, daß bei Benützung des gewöhnlichen Schwarz-Weiß-Kontrastes, wie er bei einer Zeichnung mit schwarzer Tusche auf weißem Papier entsteht, der Deckungsfehler bei Beobachtung mit freiem Auge zwischen 20'' und 0,5'' schwankt. Bei entsprechender Kontraststeigerung jedoch wurden Werte von 0.02'' beobachtet\*).

Man ist durch diese große Mannigfaltigkeit und der großen Fehlergrößenschwankungen in der Lage, jene praktisch zu verwendende Zielanordnung zu wählen, die für eine bestimmte Messungsmethode die günstigste ist.

### Der Einstellfehler

Das Wort „Einstellen“ deutet auf eine Bewegung. Wird beim Zielen an die Bewegung eine bestimmte Forderung gestellt, die nicht erfüllt werden kann, so entsteht durch diesen Mangel ein Fehler.

Bewegt nun die Hand den Zieler und bringt ihn an das Ziel heran, so kontrolliert das Auge diese Annäherung. Stellt das Auge die Deckung fest, so erteilt es der Hand den Befehl, die Bewegung abzubrechen. Dies geht jedoch nicht augenblicklich vor sich. Die Zeit, die zwischen Befehl und Ausführung vergeht, ist die physische Reak-

\*) Dissertation Nötzli, Zürich, 1915.

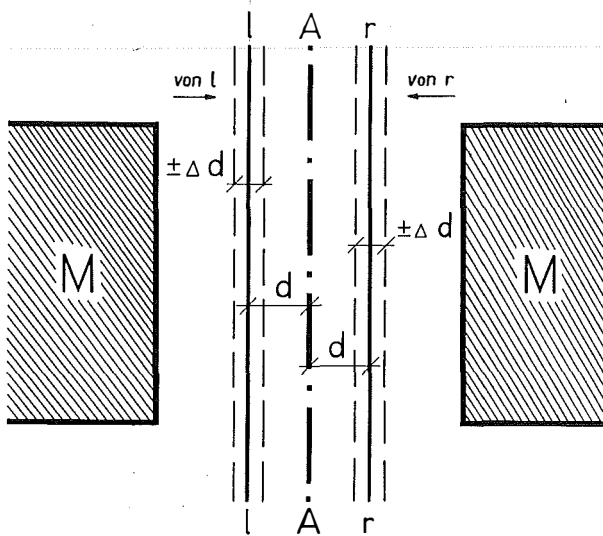
tionszeit. Während dieser hat sich der Zieler weiterbewegt. Nun wird einerseits diese Zielverfehlung umso kleiner werden, je langsamer die Bewegung ist, andererseits muß sie aber noch so groß sein, daß das Auge eine Bewegung wahrnimmt.

Es gilt die Beziehung:

$$e = t \cdot B_{\min} \quad \dots(1)$$

### Zusammenwirken von Deckungs- und Einstellfehler

Durch die Zieldefinition ist das Zusammenwirken von Auge und Hand notwendig. Daher kann man auch keinen Deckungsfehler und keinen Einstellfehler allein beobachten. Bei Zielbeobachtungen erhält man als Fehler immer das Zusammenwirken beider. Es läßt sich aber ihre Wechselwirkung zueinander zeigen.



In nebenstehender Figur stellt M — M eine Parallelmarke dar. Die Markenachse ist  $\overline{AA}$ . Die Annäherung des Fadens an die Achse von links oder rechts ist durch Pfeile gekennzeichnet. Es wird nun einen Raum, durch die Unvollkommenheit des Auges bedingt, geben, innerhalb welchem der Faden als in der Mitte erscheint. Befindet sich der Faden dort, so kann das Auge nicht mehr feststellen, daß die Abstände zum Markenrand links und rechts nicht gleich groß sind. Dieser Raum ist durch  $\overline{ll}$  und  $\overline{rr}$  begrenzt.

Denkt man sich nun die Fadengeschwindigkeit sich der Grenze Null nähern, dann wird auch der Einstellfehler sich der Grenze Null nähern. Der Faden muß dann bei  $\overline{ll}$  oder  $\overline{rr}$  stehen bleiben, je nachdem man von links oder rechts den Faden heranbewegt hat.

Der Deckungsfehler ist dann:

$$\frac{\overline{ll} - \overline{rr}}{2} = d \quad \dots(2)$$

Der Deckungsfehler ist damit eine Größe, dessen Vorzeichen bekannt ist. Er wechselt sein Vorzeichen mit der Einstellrichtung. Um nun den Fehlerraum  $2d$  für eine bestimmte Zielmarke zu erhalten, muß die Annäherung öfter wiederholt werden. Das Auge wird nicht immer gleich reagieren. Der Fehlerraum selbst erhält eine Unsicherheit von  $\pm \Delta d$ .

Bewegt sich nun der Faden mit endlicher Geschwindigkeit, so wird dieser in den Fehlerraum von  $d$  eindringen. Der Abstand zur Achse wird daher  $d - e$  werden. Der Einstellfehler ist dadurch ebenfalls eine Größe, dessen Vorzeichen bekannt ist. Sein Vorzeichen ist dem  $d$  entgegengesetzt.

Da nun auch für den Einstellfehler mehrere Beobachtungen notwendig sind, wird für  $e$  ebenfalls die Unsicherheit  $\pm \triangle e$  auftreten. Es wird daher der Beobachtungsfehler mit freiem Auge:

$$z_n = z_g = \frac{d - e \pm \sqrt{d^2 + e^2}}{2} \quad \dots (3)$$

sein.  $z_n$  und  $z_g$  sind dann gleich, wenn die Fehler im Bogenmaße (Gesichtswinkel) gemessen werden.

Formel (3) zeigt für das Zusammenwirken von  $d$  und  $e$  nicht mehr die geom. Addition. Weiters sieht man, daß  $d$  und  $e$  einander gleich werden können und dieser Zustand ein Fehlerminimum darstellt.

Um nun die praktische Auswirkung der Formel zu zeigen, habe ich an einem Verschiebeapparat, an welchem sich Ziel und Zieler prallaxenfrei verschieben lassen, eine Parallelmarke beobachtet. Der Markenraum war in 200 Einheiten ( $E$ ) geteilt. Es wurden nun 10 Einstellungen von links mit dem Ergebnis  $86 E \pm 5$  und 10 Einstellungen von rechts mit dem Ergebnis  $116 E \pm 4$  gemacht. Nimmt man daraus das Mittel, so erhält man als besten Wert  $101 E$ , während die wirkliche Mitte bei  $100 E$  lag. Die wahre Mitte wurde nur um  $1 E$  verfehlt. Hätte man nun auf die Einstellrichtung keine Rücksicht genommen und wären zufällig alle Beobachtungen von links oder alle durch Fadenbewegung von rechts gemacht worden, so wäre die max. Abweichung von der Mitte entweder  $14 E$  bzw.  $16 E$  gewesen und man hätte die Mitte einmal auf der Skala bei  $86 E$  bzw. bei  $116 E$  gesucht. Die mittlere Abweichung von der Mitte für eine Beobachtung ohne Rücksicht auf die Einstellrichtung ist  $15 E$ . Bei zwei Beobachtungen, die bewußt einmal von links und von rechts gemacht werden, ist die mittlere zu erwartende Abweichung von der Mitte  $\pm 1 E$ . Es ist damit gezeigt, daß durch Beachtung der Einstellrichtung jede Zielung verbessert werden kann. Es sei aber bemerkt, daß sich dieser Vorteil nur dann auswirkt, wenn der Einstellmechanismus für die Ziellanordnung genügend fein ist. (Schluß folgt)

## Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens

Von *Peter Meissl*, Wien

### 1. Vorbemerkungen

In der folgenden Arbeit wird ausgiebig von der Matrizenrechnung Gebrauch gemacht. Matrizen werden mit Großbuchstaben bezeichnet, ihre Elemente mit den entsprechenden Kleinbuchstaben samt Zeilen- und Spaltenindex. Z. B.:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine Ausnahme bilden einzeilige oder einspaltige Matrizen, die wir mitunter als Vektoren ansprechen und mit irgendwelchen Buchstaben bezeichnen. Ihre Elemente erhalten denselben Buchstaben versehen mit einem einfachen Index. Z. B.:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom  
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der Österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,  
o. Prof. Hofrat Dr. phil., Dr. techn. eh. K. Ledersteger und  
ORdVD. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

---

Nr. 6

Baden bei Wien, Ende Dezember 1962

50. Jg.

---

## Die Zielfehlertheorie

von *Hellmuth Brunner*, Vöcklabruck

(Schluß)

*Die Wirkung des opt. Systems*

Wird eine Ziellanordnung durch das opt. System so beobachtet, daß Ziel und Zieler in einer Ebene außerhalb desselben liegen, so tritt keine Parallaxe auf. Der so beobachtete Zielfehler wird sich von dem mit freiem Auge beobachteten in seiner Größe unterscheiden. Dieser Unterschied ist auf das Wirken des opt. Systems allein zurückzuführen.

Das opt. System ist nun eine Vorrichtung, die durch Strahlenbrechung imstande ist, Bilder mit anderem Gesichtswinkel auf die Netzhaut zu projizieren, als die mit freiem Auge beobachteten. Es ist wie eine mech. Übersetzung aufzufassen. Das Übersetzungsverhältnis ist  $\nu$ . Dieses  $\nu$  ist keine Fehlerquelle. Dies wird am besten durch folgende Überlegung klar:

Man nehme zwei, der Form nach gleiche Ziellanordnungen, die sich jedoch in ihrer Größe wie  $1 : \nu$  verhalten. Denkt man sich ferner das opt. System ideal (ohne Verzerrungen und Helligkeitsausfall), und beobachtet man die große Ziellanordnung mit freiem Auge, die kleine durch das opt. System aus gleicher Entfernung, so wird an der Netzhaut beide Male das gleiche Bild entstehen und daher der an der Netzhaut gemessene Deckungsfehler in beiden Fällen  $z_n = {}_o z_n$ , im Gegenstandsraum jedoch

$$z_g = \frac{z_n}{\nu} \quad \dots(4)$$

sein.  $\nu$  wirkt daher nur im Gegenstandsraum, und zwar genau verkehrt prop. dem Fehler an der Netzhaut gemessen.

Wenn nun aber mit zunehmendem  $\nu$ , wie die Erfahrung lehrt, der Zielfehler relativ größer wird, so liegt dies nur an der Unvollkommenheit des opt. Systems.



Es hat Eigenschaften, die das Netzhautbild und damit den Zielfehler nachteilig beeinflussen:

- a) Den Astigmatismus durch Verzeichnung der Bilder.
- b) Die Aberration durch Randverzerrung der Bilder.
- c) Den Helligkeitsausfall durch Verdunklung der Bilder.

Diese 3 negativen Eigenschaften des opt. Systems werden an der Netzhaut eine verzerrte Ziellanordnung entwerfen und daher einen größeren Zielfehler ergeben. Ist der Zielfehler bei gleich großen Netzhautbildern für das freie Auge  $z_n$ , für das bewaffnete Auge  ${}_o z_n$ , so ist der Einfluß des opt. Systems:

$$o = \frac{{}_o z_n}{z_n} \quad \dots(5)$$

$o$  ist die optische Fehlerkonstante. Sie ist  $o > 1$  und mit dem Auflösungsvermögen verwandt.

Eine theoretische Ableitung dieser Konstanten aus optischen Gesetzen ist aussichtslos, denn sie ist nur für das gleiche Instrument und gleicher Ziellanordnung gleich. Der Zielfehler mit optischem System im Netzhautraum ist dann:

$${}_o z_n = z_n \cdot o \quad \dots(6)$$

Im Gegenstandsraum:

$${}_o z_g = \frac{z_n \cdot o}{y} \quad \dots(7)$$

Formel (6) und (7) zeigen wieder, daß das Primäre das Spiel des Auges ist.  $o$  zeigt die Veränderung der Reaktionsfähigkeit an, wenn das Netzhautbild durch das opt. System verzerrt wird.

#### *Die Fadenparallaxe*

Um nun von den bisher behandelten Zielungen auf die wirkliche Tätigkeit eines geod. Fernrohres zu kommen, ist die Wirkung der Fadenparallaxe noch im Zielfehler zu zeigen.

Bei optischen Instrumenten, mit Faden in der Brennebene des Okulars, kann Ziel und Zieler nie genau in einer Ebene liegen. Es tritt bei Unruhe des Auges während des Zielens Parallaxe auf und dadurch wird das Zielen unsicher. Während nun der Deckungsfehler auf Unvollkommenheit des Auges, der Einstellfehler auf Unvollkommenheit des Nervensystems, die optische Konstante auf Unvollkommenheit der Linsen beruht, leitet sich der Parallaxenfehler aus einer positiven Eigenschaft des Auges ab, und zwar aus seiner Fähigkeit, hintereinanderliegende Gegenstände noch gleichzeitig scharf zu sehen. Es ist die Tiefenschärfe. Der sich aus ihr ergebende Zielfehler ist *dem Vorzeichen nach* unabhängig von den bisherigen. Ihr Zusammenwirken kann daher nur durch geom. Addition erfolgen. Seiner Größe nach aber ist er vom Deckungsfehler durch die Bewegungswahrnehmung abhängig. Je empfindlicher nämlich die Ziellanordnung, desto kleiner  $B_{min}$  und damit  $d$ . Da aber auch die Parallaxe auf dieses  $B_{min}$  reagiert, ist der Zusammenhang gegeben. Solange man die Parallaxe an der Marke bemerkt, solange hat man die Möglichkeit, durch Scharfeinstellen diese Bewegungswahrnehmung zu verkleinern. Bezeichnet man die Tiefenschärfe mit  $T_a$ , die Augbewegung vor dem Auge senkrecht zur Zielachse mit  $a$ , so ist:

$$p = \text{Funktion}(a, d, T_a).$$

$\alpha$  ist ein Wert, der niemals verschwinden kann, selbst dann, wenn man den Kopf absolut ruhig halten könnte. Der Augapfel macht beim Beobachten eine Dreh- und Pendelbewegung um die Augachse. Dadurch bewegt sich das Strahlenbild an der Netzhaut und wird von den Enden der Sehzellen (Zapfen) abgetastet. Es wurde nachgewiesen, daß selbst bei starrstem Blick eine Amplitude von 6' bis 8' auftritt. Es sind daher sowohl  $\alpha$  als auch  $T_\alpha$  Größen, die das vollkommene Auge benötigt. Der Parallaxenfehler kann daher nie ganz verschwinden. Es gilt jedoch der Satz: „Wird eine Zielanordnung gewählt, die kleine Deckungsfehler gibt, so wird auch der Parallaxenfehler klein.“

Das Zusammenwirken des Parallaxenfehlers mit den anderen Teilfehlern geschieht wegen seines doppelten Vorzeichens durch geom. Addition.

$$opz_n = \pm \sqrt{oz_n^2 + p^2} \quad \dots (8)$$

und

$$opz_g = \pm \frac{opz_n}{v} \quad \dots (9)$$

#### *Beobachtungsentfernung und Zielfehler*

Da man für verschiedene Beobachtungsentfernungen in der Praxis nicht immer andere Zielmarken verwenden kann, werden sich mit Änderung dieser immer neue Zielanordnungen an der Netzhaut ergeben. Dazu kommt der Einfluß der Luftperspektive, welche das Netzhautbild bei zunehmender Entfernung immer unschärfer macht. Dadurch wird der Deckungsfehler beeinflusst. Durch Verwendung bestimmter Zielmarken jedoch, bei welchen mit wachsender Entfernung sich bessere Zielanordnungen ergeben, wird es vorkommen, daß bei zunehmender Entfernung beide Fehlerquellen so zusammenwirken, daß der Zielfehler erst kleiner und dann wieder größer wird. Es wird daher für einige Zielanordnungen bestimmte günstige Beobachtungsentfernungen geben.

#### *Zusammenfassung*

Der Zielfehler ist in erster Linie eine Funktion der Zielanordnung. Diese ändert sich durch Form, Helligkeit, Kontrast und Größe der Zielmarke. Durch das optische System, die Parallaxe, die Beobachtungsentfernung treten immer neue Varianten der Zielanordnung auf. Man wird daher niemals in der Lage sein, a priori eine Zielfehlerformel aufzustellen, die für alle Messungsfälle gilt. Die Mannigfaltigkeit der Ursachen ist so groß und kommt aus so verschiedenen Richtungen des menschlichen Wissens, daß sie kaum jemals in ein math. Gewand gebracht werden können. Was aber möglich ist, ist die Aufstellung einer Rahmenformel, bei der jede Größe noch ihr beliebiges Spiel hat. Auch ist es unmöglich, für ein geod. Instrument den Zielfehler seiner Größe nach anzugeben, weil das Instrument allein einen solchen nicht hat. *Erst in Verbindung mit der Zielanordnung entsteht ein Zielfehler.*

Was man jedoch kann, ist, aus der großen Mannigfalt jene Zielanordnungen und Instrumente zu wählen, die einem bestimmten Messungszweck am besten genügen. In diesem Sinne können die aufgestellten Beziehungen gewertet werden. Wie das für die Praxis geschieht, zeigt das folgende Beispiel:

*Zielfehleruntersuchung für einen Fernrohr-Theodolit*

Gewählt wurde ein kleiner Tachymeter von Starke & Kammerer, ein sehr einfaches, billiges, aber sehr viel verwendetes Instrument in der Bauindustrie.

Der durchschnittliche 100-m-Fehler bei der Reichenbach'schen Tachymetrie war  $\pm 20$  cm. Für eine Visur  $\pm 14,15$  cm oder  $\pm 3,6''$ .

Es soll festgestellt werden, aus welchen Teilfehlern sich diese Unsicherheit zusammensetzt.

Als Hilfsgerät ist ein Verschiebeapparat notwendig, durch welchen man Ziel und Zieler parallaxenfrei verschieben kann\*). Weiters ist die Feststellung der Fernrohrvergrößerung in bekannter Weise notwendig. Dann zeichnet man zwei Zielmarken, die sich der Größe nach wie  $1 : \nu$  verhalten. Schließlich wird eine Beobachtungsentfernung gewählt, bei welcher man mit freiem Auge, ohne Akkommodationsanstrengung arbeiten kann (mind. 12 m).

Die Fehleranalyse geht nun so vor sich:

a) Zuerst wird die große Zielanordnung in den Verschiebeapparat eingespannt, stellt den Zieler mittels Trommel und freiem Auge auf das Ziel ein und macht mit Rücksicht auf die Einstellrichtung je 10 Ablesungen von links und rechts.

Man erhält:

$$z_n = \frac{(z_n \text{ links} + z_n \text{ rechts})}{2}$$

b) Man beobachtet durch das opt. System nun die kleine Zielanordnung aus gleicher Entfernung, ebenfalls mit Rücksicht auf die Einstellrichtung, doch ohne Verwendung des Fernrohrzielfadens. Es werden wieder je 10 Einstellungen gemacht.

Man erhält in gleicher Weise wie vorher:

$$o z_g = \frac{z_n \cdot o}{\nu}$$

und daraus:

$$o = \frac{o z_n}{z_n} \text{ (die optische Fehlerkonstante).}$$

c) Nun stellt man auf die gleiche Zielmarke den Instrumentfaden ein, jedoch so, daß man den Instrumentfaden nicht bewegt, sondern die Zielmarke auf den Fernrohrfaden einstellt. Da aber bei dieser Beobachtung Parallaxe auftritt, ist:

$$o p z_g = \sqrt{\frac{o z_n^2 + p^2}{\nu}}$$

und daraus den Parallaxenfehler:

$$p = \pm \sqrt{(o p z_g)^2 - (o z_g)^2}$$

d) Als letzte Beobachtungsserie wird der Instrumentfaden mit der Feinschraube des Theodolites auf die Marke mit Rücksicht auf die Einstellrichtung eingestellt und erhält  $z$  den wirklichen Zielfehler, wie er bei der Beobachtung in der Praxis mit diesem Instrument auftritt, und zwar:

$$z = o p z_g - E$$

\*) Dissertation Brunner, Graz 1954.

und

$$E = z - {}_{op}z_g.$$

Der Großbuchstabe  $E$  wurde für den Theodoliten gewählt, da der Verschiebeapparat den Einstellfehler  $e$  hat, der bereits in  $z_n$  enthalten ist.

Damit der Beobachter den Verschiebeapparat selbst bedienen kann, was ja eine notwendige Voraussetzung für die Ermittlung des Einstellfehlers ist, bedient man sich einer Spiegelbildeinrichtung\*). Man stellt dazu auf ein zweites Stativ den Verschiebeapparat mit Marke gleich vor oder neben dem Instrument so auf, daß man das Instrument beobachten und gleichzeitig den Verschiebeapparat mittels Hand bedienen kann. Auf halber Entfernung wird ein Planspiegel so aufgestellt, daß im Fernrohr das Spiegelbild der Marke erscheint.

Für das Starke-Instrument wurde nun absichtlich eine Keilmarke zur Beobachtung gewählt, weil sie im vornhinein einen kleineren Deckungsfehler erwarten ließ, als die Einstellungen auf der Tachymeterlatte. Die Keilmarke hatte eine Öffnung von 300 mit folgenden Ergebnissen:

$$\begin{aligned} z_n &= \pm 1,65'' \\ {}_oz_n &= \pm 2,83'' \\ {}_oz_g &= \pm 0,16'' \\ o &= \frac{2,83}{1,65} = 1,71 \\ {}_{op}z_g &= \pm 0,64'' \\ z &= \pm 1,34'' \end{aligned}$$

Für die Ermittlung des Einstellfehlers konnte die Einstellrichtung nicht berücksichtigt werden, da die Feinschraube zu grob und die Gegenfeder zu wenig fest war. Es mußte daher  $E$  das Doppelporzeichen behalten.

Stellt man nebeneinander, so erhält man:

$$\begin{aligned} z_g &= \frac{z_n}{v} = \pm 0,09'' \text{ (Fehler aus Zielmarke allein),} \\ {}_oz_g &= \frac{z_n}{v} = \pm 0,16'' \text{ (Fehler aus Zielmarke und opt. System),} \\ {}_{op}z_g &= \pm 0,64'' \text{ (Fehler aus Zielmarke, opt. System und Parallaxe),} \\ z &= \pm 1,34'' \text{ (Fehler aus Zielmarke, opt. System, Parallaxe und} \\ &\quad \text{Einstellung),} \\ p &= \pm 0,62'' \text{ (Parallaxe allein),} \\ E &= \pm 1,20'' \text{ (Einstellfehler allein).} \end{aligned}$$

Da nun bei der Tachymetrie mit diesem Instrument bei Intervallschätzung und Randeinstellung ein Fehler von 3,6'' für eine Zielung auftritt, ergibt sich allein für

$$z_g = \pm 3,3'' \text{ (für Schätzung und Randeinstellung für die gewöhnliche Tachymeterlatte).}$$

\*) Dissertation Nötzli, Zürich 1915.

Rechnet man alle gewonnenen Fehler auf 2 Zielungen um, um daraus den 100-m-Längenfehler für die opt. Distanzmessung zu erhalten, ergibt sich folgende Tabelle:

Nr.	B e s c h r e i b u n g	Bezeich- nung	für eine Zielung "	für zwei Zielungen "	100 m Fehler mm
1	für 2 Keilmarken 30°	$Z_g$ .	$\pm 0,09$	$\pm 0,13$	$\pm 7$
2	„ Tachymeterlatte cm Teilung	$Z_g$ .	$\pm 3,30$	$\pm 4,50$	$\pm 226$
3	„ starke Theod. u. Keilmarke	$O Z_g$ .	$\pm 0,16$	$\pm 0,23$	$\pm 11$
4	„ „ „ „ „	$op Z_g$ .	$\pm 0,64$	$\pm 0,91$	$\pm 44$
5	„ „ „ „ „	$P$	$\pm 0,62$	$\pm 0,88$	$\pm 43$
6	„ „ „ „ „	$E$	$\pm 1,20$	$\pm 1,70$	$\pm 83$
7	Gesamtfehler für 2 Keilmarken	$Z$ .	$\pm 1,34$	$\pm 1,61$	$\pm 78$
8	„ „ Tachymeterlatte	$Z$ .	$\pm 3,60$	$\pm 5,00$	$\pm 242$

Diese zeigt, daß kleine Fehler in den großen ganz untergehen, was durch die geom. Addition bedingt ist. Obwohl zu bezweifeln ist, ob eine solche Addition immer der Wirklichkeit entspricht, so ist doch daraus zu schließen, daß eine Fehleruntersuchung nur dann von Erfolg sein wird, wenn die Elimination der Teilfehler in der Reihenfolge ihrer Größe vorgenommen wird.

Das Beispiel hat die Anwendung der Zielfehlertheorie auf die opt. Distanzmessung gezeigt. Sie läßt sich für jede beliebige andere Messungsart anwenden und zerlegt den Zielfehler klar in seine Bestandteile.

## Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens

Von *Peter Meissl*, Wien

(Schluß)

### 3. Innere Koordinatensysteme

Zweck dieser Arbeit ist es, dem Maß für die äußere Genauigkeit eines Punkthaufens ein Maß für die innere Genauigkeit an die Seite zu stellen, ein Maß, das nur die gegenseitige Genauigkeit der Punkte mißt.

Kehren wir für einen Augenblick zum Beispiel 1 zurück. Wir haben gesehen, daß die äußere Genauigkeit des Punkthaufens für  $\alpha \rightarrow 0$  oder  $\alpha \rightarrow \pi/2$  stark absinkt. Die Genauigkeit der gegenseitigen Lage der Punkte erscheint uns — zunächst rein intuitiv — bei diesen Grenzübergängen nicht gefährdet, da diese durch die Seitenmessungen zwischen den Neupunkten gesichert erscheint.

Um ein Maß für die innere Genauigkeit zu finden, werden wir vom ursprünglichen, äußeren Koordinatensystem zu einem anderen, einem inneren System übergehen. Die Lage dieses Systems soll von der zufälligen Lage der Punkte  $P_1, \dots, P_n$  abhängig sein, soll also selbst zufällig sein. Zu einem solchen inneren System kann man auf mannigfache Art gelangen. Zum Beispiel könnte man einen der Punkte zum Ursprung des neuen Systems machen und durch einen weiteren die  $x$ -Achse hindurchlegen.

Wir bezeichnen mit  $U_i$  und  $V_i$  die Koordinaten des Punktes  $P_i$  im inneren System. Das innere System soll aus dem äußeren durch eine Drehung um den