

Paper-ID: VGI_196223



Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens

Peter Meissl ¹

¹ *Technische Hochschule Wien IV, Karlsplatz 13, Mathematisches Labor*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **50** (5, 6), S. 159–165, 186–194

1962

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Meissl_VGI_196223,  
Title = {Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens},  
Author = {Meissl, Peter},  
Journal = {{\u}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {159--165, 186--194},  
Number = {5, 6},  
Year = {1962},  
Volume = {50}  
}
```



Da nun auch für den Einstellfehler mehrere Beobachtungen notwendig sind, wird für e ebenfalls die Unsicherheit $\pm \Delta e$ auftreten. Es wird daher der Beobachtungsfehler mit freiem Auge:

$$z_n = z_g = \frac{d - e \pm \sqrt{d^2 + e^2}}{2} \quad \dots (3)$$

sein. z_n und z_g sind dann gleich, wenn die Fehler im Bogenmaße (Gesichtswinkel) gemessen werden.

Formel (3) zeigt für das Zusammenwirken von d und e nicht mehr die geom. Addition. Weiters sieht man, daß d und e einander gleich werden können und dieser Zustand ein Fehlerminimum darstellt.

Um nun die praktische Auswirkung der Formel zu zeigen, habe ich an einem Verschiebeapparat, an welchem sich Ziel und Zieler prallaxenfrei verschieben lassen, eine Parallelmarke beobachtet. Der Markenraum war in 200 Einheiten (E) geteilt. Es wurden nun 10 Einstellungen von links mit dem Ergebnis $86 E \pm 5$ und 10 Einstellungen von rechts mit dem Ergebnis $116 E \pm 4$ gemacht. Nimmt man daraus das Mittel, so erhält man als besten Wert $101 E$, während die wirkliche Mitte bei $100 E$ lag. Die wahre Mitte wurde nur um $1 E$ verfehlt. Hätte man nun auf die Einstellrichtung keine Rücksicht genommen und wären zufällig alle Beobachtungen von links oder alle durch Fadenbewegung von rechts gemacht worden, so wäre die max. Abweichung von der Mitte entweder $14 E$ bzw. $16 E$ gewesen und man hätte die Mitte einmal auf der Skala bei $86 E$ bzw. bei $116 E$ gesucht. Die mittlere Abweichung von der Mitte für eine Beobachtung ohne Rücksicht auf die Einstellrichtung ist $15 E$. Bei zwei Beobachtungen, die bewußt einmal von links und von rechts gemacht werden, ist die mittlere zu erwartende Abweichung von der Mitte $\pm 1 E$. Es ist damit gezeigt, daß durch Beachtung der Einstellrichtung jede Zielung verbessert werden kann. Es sei aber bemerkt, daß sich dieser Vorteil nur dann auswirkt, wenn der Einstellmechanismus für die Ziellanordnung genügend fein ist. (Schluß folgt)

Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens

Von *Peter Meissl*, Wien

1. Vorbemerkungen

In der folgenden Arbeit wird ausgiebig von der Matrizenrechnung Gebrauch gemacht. Matrizen werden mit Großbuchstaben bezeichnet, ihre Elemente mit den entsprechenden Kleinbuchstaben samt Zeilen- und Spaltenindex. Z. B.:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine Ausnahme bilden einzeilige oder einspaltige Matrizen, die wir mitunter als Vektoren ansprechen und mit irgendwelchen Buchstaben bezeichnen. Ihre Elemente erhalten denselben Buchstaben versehen mit einem einfachen Index. Z. B.:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Es wird angenommen, daß der Leser mit den Grundzügen der Matrizenrechnung vertraut ist. Wir geben einige wichtige Operationen mit der zugehörigen Symbolik an:

Addition: $A + B = C$. Dabei ist $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

Multiplikation mit Skalar: $k A = A \cdot k = B$. Dabei ist $k a_{ij} = b_{ij}$

Matrizenmultiplikation: $A B = C$, Dabei ist $\sum_k a_{ik} b_{kj} = c_{ij}$

Transposition: \bar{A} . Dabei ist $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$

$$\text{wichtige Regel: } \overline{A B} = \bar{B} \bar{A}$$

Inversion: A^{-1} . Dabei ist $A A^{-1} = A^{-1} A = E$. $E = (e_{ij})$

ist die Einheitsmatrix mit $e_{ii} = 1$, $e_{ij} = 0$, falls $i \neq j$.

Wichtige Regeln: $(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$,

$$(\bar{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$$

Es werden des öfteren sogenannte „zusammengesetzte Matrizen“ auftreten. Z. B. ist

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

jene Matrix, die durch Zusammenfügen der Matrizen A , B , C und D in der ange deuteten Weise entsteht. Ein anderes Beispiel wäre der aus den Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ zusammengesetzte Vektor

$$(x | y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

Wir erinnern noch an einige Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeits- und der Fehlerrechnung.

Der Vektor $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ wird als n dimensionale Zufallsvariable mit stetiger Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnet, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Z bei einem Versuch in den Bereich \mathfrak{B} des n dimensionalen euklidischen Raumes \mathfrak{G}_n gelangt, durch das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} f(Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n) dZ_1 dZ_2 dZ_3 \dots dZ_n \quad \text{kürzer} \\ \int_{\mathfrak{B}} f(Z) dZ$$

gegeben ist. Setzt man $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}_n$, so ist der Wert des Integrals gleich 1. Die Funktion $f(Z)$ wird als Dichtefunktion bezeichnet. Wichtige Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung sind der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix. Der

Erwartungswert: $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ist durch die Integrale

$$z_i = \int_{\mathfrak{G}_n} Z_i f(Z) dZ \quad i = 1, 2, \dots, n$$

bestimmt. Die Kovarianzmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1n} \\ m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_{n1}, m_{n2}, \dots, m_{nn} \end{pmatrix}$$

berechnet sich aus den Integralen

$$m_{ij} = \int_{\xi_n} (Z_i - z_i)(Z_j - z_j) f(Z) dZ \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Jede Komponente Z_i des Vektors Z kann als eine eindimensionale Zufallsvariable aufgefaßt werden. z_i ist dann ihr Erwartungswert (auch Mittel, Mittelwert) und m_{ii} ihre Varianz (auch mittlere quadratische Abweichung, mittleres Fehlerquadrat, mittlerer quadratischer Fehler). Die Größe m_{ij} wird im Falle $i \neq j$ als Kovarianz zwischen Z_i und Z_j bezeichnet (auch mittlerer gemischter Fehler). Natürlich ist $m_{ij} = m_{ji}$, also M eine symmetrische Matrix.

Wir gehen von Z vermöge einer linearen Transformation zu einer neuen m dimensionalen Zufallsvariablen $R = (R_1, R_2, \dots, R_m)$ über:

$$R_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} Z_i + a_j \quad j = 1, \dots, m. \quad \dots\dots\dots (1)$$

Ist A die Matrix der a_{ij} mit m Spalten und n -Zeilen und a der Zeilenvektor (a_1, \dots, a_m) , so lautet (1) in Matrixschreibweise

$$R = ZA + a \quad \dots\dots\dots (1a)$$

Der Zufallsvariablen R entspricht wieder eine Dichtefunktion. In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird gezeigt, wie man diese berechnet. Wichtig für das Folgende ist aber nur der Zusammenhang zwischen den Mittelwerten und Kovarianzmatrizen der Zufallsvariablen Z und R . Ist $r = (r_1, \dots, r_m)$ der Mittelwertsvektor und $Q = (q_{ij})$ die Kovarianzmatrix von R , so gilt:

$$r_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} z_i + a_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{also: } r = zA + a \quad \text{und} \quad \dots\dots\dots (2a)$$

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} a_{lj} m_{kl} \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{also: } Q = \bar{A} M A \quad \dots\dots\dots (3a)$$

\bar{A} ist dabei die zu A transponierte Matrix.

Formel (3) oder (3a) wird auch als *Fehlerfortpflanzungsgesetz* bezeichnet.

Wir weisen noch auf eine wichtige Eigenschaft der Kovarianzmatrix M hin. Sei $T = \sum_{i=1}^n h_i Z_i$ eine Linearform der Z_i . Mit $h = (h_1, \dots, h_n)$, können wir dafür schreiben $T = \bar{Z}h$. Es liegt ein Sonderfall von (1) vor, bei dem $m = 1$ zu setzen

ist. Die Kovarianzmatrix von T besteht nur aus einem Element, dem mittleren quadratischen Fehler von T

$$m_t = h M \bar{h}$$

Nun kann ein mittlerer quadratischer Fehler nie negativ werden. Es gilt also

$$h M \bar{h} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j m_{ij} \geq 0$$

für beliebiges h . Man sagt M ist positiv definitiv, wenn stets $h M \bar{h} > 0$ 1) ist. Gilt für gewisse h hingegen auch das $=$ Zeichen, so wird M als positiv semidefinit bezeichnet.

2. Die äußere Genauigkeit eines Punkthaufens in der Ebene

Wir betrachten n Punkte P_1, P_2, \dots, P_n in der Ebene. Ihre Koordinaten $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n$ seien Zufallsvariable. Genauer: Der $2n$ dimensionale Vektor

$$(X | Y) = (X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

sei eine $2n$ dimensionale Zufallsvariable. Der Mittelwert sei

$$(x | y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Die Kovarianzmatrix zerfällt deutlich in vier Blöcke:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M^{xx} & M^{xy} \\ \hline M^{yx} & M^{yy} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} m_{11}^{xx}, m_{12}^{xx}, \dots, m_{1n}^{xx}, & m_{11}^{xy}, m_{12}^{xy}, \dots, m_{1n}^{xy} \\ m_{21}^{xx}, m_{22}^{xx}, \dots, m_{2n}^{xx}, & m_{21}^{xy}, m_{22}^{xy}, \dots, m_{2n}^{xy} \\ \dots & \dots \\ m_{n1}^{xx}, m_{n2}^{xx}, \dots, m_{nn}^{xx}, & m_{n1}^{xy}, m_{n2}^{xy}, \dots, m_{nn}^{xy} \\ m_{11}^{yx}, m_{12}^{yx}, \dots, m_{1n}^{yx}, & m_{11}^{yy}, m_{12}^{yy}, \dots, m_{1n}^{yy} \\ m_{21}^{yx}, m_{22}^{yx}, \dots, m_{2n}^{yx}, & m_{21}^{yy}, m_{22}^{yy}, \dots, m_{2n}^{yy} \\ \dots & \dots \\ m_{n1}^{yx}, m_{n2}^{yx}, \dots, m_{nn}^{yx}, & m_{n1}^{yy}, m_{n2}^{yy}, \dots, m_{nn}^{yy} \end{array} \right)$$

Wir bezeichnen die Koordinaten X_i, Y_i als äußere Koordinaten der Punkte P_i weil wir ihnen ein festes, nicht von der zufälligen Lage der Punkte abhängiges System zugrundelegen. Wir nennen es das äußere Koordinatensystem. Bei einer Verschiebung des äußeren Systems um einen festen Betrag ändern sich zwar die Mittelwerte x_i, y_i um feste Beträge, nicht aber die Kovarianzmatrix M 2). Da dieser in erster Linie unsere Untersuchungen gelten, machen wir aus rechentechnischen Gründen folgende

Annahme: Der Ursprung des äußeren Systems liege im Schwerpunkt der Mittelwerte. Das heißt es gelte

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

1) Abgesehen von dem trivialen Fall $h = (0, 0, \dots, 0)$.

2) Setzt man in den Formeln (1), (2) und (3) $a_{ii} = 1, a_{ij} = 0$ für $i \neq j$, so sieht man folgendes: Wird zu einer Zufallsvariablen ein konstanter Vektor a hinzuaddiert, so bleibt die Kovarianzmatrix unverändert. Den neuen Mittelwertsvektor erhält man aus dem alten durch Addition von a .

Die Genauigkeit eines Punktes P_i ist durch die mittleren Fehlerquadrate m_{ii}^{xx} und m_{ii}^{yy} seiner Koordinaten X_i, Y_i gekennzeichnet. Will man die Genauigkeit von P_i durch eine einzige Größe kennzeichnen, so bietet sich der Ausdruck

$$m_i = m_{ii}^{xx} + m_{ii}^{yy}$$

an. Es handelt sich dabei um das Quadrat des sogenannten totalen Punktagefehlers. m_i ist bekanntlich invariant gegenüber einer Verdrehung des (äußeren) Koordinatensystems um einen festen Betrag. Sucht man nach einem Maß für die Genauigkeit des gesamten Punkthaufens P_1, P_2, \dots, P_n so wird man in naturgemäßer Verallgemeinerung auf den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n (m_{ii}^{xx} + m_{ii}^{yy}) = sp(M)$$

geführt, also auf die Spur der Matrix M . Unter der Spur einer quadratischen Matrix versteht man die Summe der Hauptdiagonalglieder.

Definition 1. Wir bezeichnen

$$t_\alpha = sp(M) \dots\dots\dots (5)$$

als den äußeren totalen quadratischen Lagefehler des Punkthaufens. t_α ist invariant gegenüber einer Verdrehung und natürlich auch einer Verschiebung des äußeren Systems um feste Beträge.

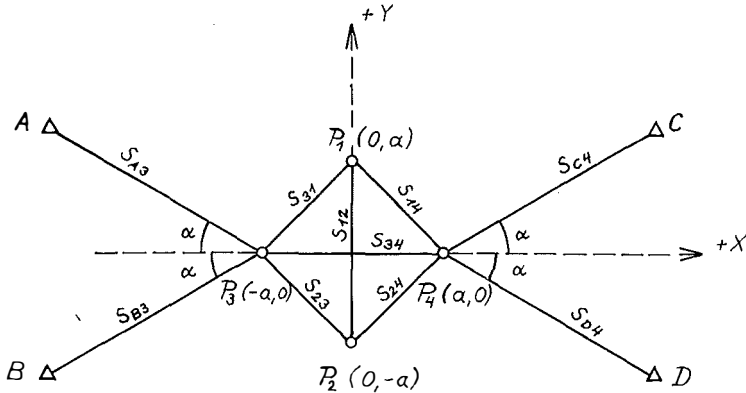


Abb. 1

Beispiel 1. Punkteinschaltung durch Streckenmessungen (vgl. Abb. 1). Die Neupunkte P_1, P_2, P_3, P_4 wurden durch Streckenmessungen an die bekannten Punkte A, B, C, D angeschlossen. Dabei wurden alle in der Abb. 1 eingezeichneten Verbindungsstrecken mit der gleichen Genauigkeit gemessen. Den mittleren Fehler dieser Streckenmessungen setzen wir gleich 1. Die 10 gemessenen Strecken bilden also eine 10dimensionale Zufallsvariable

$$S = (S_{A3}, S_{B3}, S_{C4}, S_{D4}, S_{23}, S_{31}, S_{24}, S_{14}, S_{12}, S_{34}),$$

deren Kovarianzmatrix die Einheitsmatrix E ist. Setzt man $S_{ij} = s_{ij} + \Delta S_{ij}$ und $X_i = x_i + \Delta X_i, Y_i = y_i + \Delta Y_i$, vektoriell

$$S = s + \Delta S, \quad (X | Y) = (x | y) + (\Delta X | \Delta Y),$$

wobei s der Erwartungswert von S und $(x|y)$ der Erwartungswert von $(X|Y)$ ist. (Es könnten auch irgendwelche feste Näherungswerte sein.) Die Kovarianzmatrix der Zufallsvariablen ΔS ist nach wie vor E . Wir bestimmen die Koordinaten X_i und Y_i der Neupunkte P_1 bis P_4 mittels strengen Ausgleichs und fragen nach der Kovarianzmatrix M von $(X|Y)$ oder, was dasselbe ist (vgl. Fußnote 2!), nach der Kovarianzmatrix von $(\Delta X|\Delta Y)$. Wir nehmen an, daß ΔS und $(\Delta X|\Delta Y)$ (mit großer Wahrscheinlichkeit) kleine Größen sind und erhalten in der üblichen Art und Weise die linearisierten Bestimmungsgleichungen

$$\Delta S_{ij} = \cos v_{ij} (\Delta X_j - \Delta X_i) + \sin v_{ij} (\Delta Y_j - \Delta Y_i)$$

Dabei bedeutet v_{ij} den Richtungswinkel vom Punkt i zum Punkt j . Von diesen Gleichungen gelangt man in der üblichen Art und Weise zu den Normalgleichungen. Die Koeffizientenmatrix der Normalgleichungen ergibt nach Inversion und Multiplikation mit dem Quadrat des mittleren Beobachtungsfehlers (hier = 1) die Kovarianzmatrix M der zu schätzenden Größen $(\Delta X|\Delta Y)$. (Vgl. etwa [3], Satz 8.) M ist, wie schon erwähnt, auch die Kovarianzmatrix von $(X|Y)$.

Wir führen noch folgende Abkürzungen ein

$$\alpha = \frac{1}{4 \cos^2 \alpha}, \lambda = \frac{1}{4 \sin^2 \alpha}, \mu = \frac{1}{4 (3 \cos^2 \alpha + 4)}$$

M lautet dann:

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	$1 + \alpha + \lambda$	$\alpha - \lambda$	α	α	0	0	λ	$-\lambda$
X_2	$\alpha - \lambda$	$1 + \alpha + \lambda$	α	α	0	0	$-\lambda$	λ
X_3	α	α	$\alpha + 3\mu$	$\alpha - 3\mu$	μ	$-\mu$	0	0
X_4	α	α	$\alpha - 3\mu$	$\alpha + 3\mu$	$-\mu$	μ	0	0
Y_1	0	0	μ	$-\mu$	$\frac{2}{3} + \lambda + \frac{\mu}{3}$	$\frac{1}{3} + \lambda - \frac{\mu}{3}$	λ	λ
Y_2	0	0	$-\mu$	μ	$\frac{1}{3} + \lambda - \frac{\mu}{3}$	$\frac{2}{3} + \lambda + \frac{\mu}{3}$	λ	λ
Y_3	λ	$-\lambda$	0	0	λ	λ	2λ	0
Y_4	$-\lambda$	λ	0	0	λ	λ	0	2λ

..... (6)

Der äußere totale quadratische Lagefehler des Punkthaufens P_1, P_2, P_3, P_4 ist gleich

$$t_a = sp(M) = \frac{10}{3} + 4\alpha + 8\lambda + \frac{20\mu}{3} = \frac{10}{3} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{2}{\sin^2 \alpha} + \frac{5}{3(3 \cos^2 \alpha + 4)} \dots\dots\dots (7)$$

Wir sehen, daß t_a für $\alpha \rightarrow 0$ und auch für $\alpha \rightarrow \pi/2$ über alle Schranken wächst. Dies ist, wie ein Blick auf Abb. 1 lehrt, ohne weiteres verständlich. Nähert sich nämlich α einem dieser Grenzwerte, so wird die Lage der Neupunkte immer unsicherer. Für $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi/2$ versagt dann überhaupt der lineare Ansatz, der sich auf eine Reihenentwicklung bis zur ersten Ordnung stützt. (Schluß folgt)

Literatur

- [1] *Zurmühl*: „Matrizen“. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958. 2. Aufl.
- [2] *Jordan, Eggert, Kneißl*: „Handbuch der Vermessungskunde“. 10. Aufl., Band I, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1961.
- [3] *Eberl W.*: „Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen im Rahmen der mathematischen Statistik“. ÖZfV 47 (1959), Nr. 3.
- [4] *Meissl P.*: „Die Ausgleichung bedingter Beobachtungen im Rahmen der mathematischen Statistik“. ÖZfV 48 (1960), Nr. 1.
- [5] *Linnik J. W.*: „Die Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung“. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1961.

Referat

Zur Literatur über die elektronischen Distanzmeßverfahren

Das Studium der elektronischen Distanzmeßverfahren bereitet bisher einige Schwierigkeiten, da alle diesbezüglichen Veröffentlichungen entweder als Zeitschriftenaufsätze oder schwer erreichbare Tagungsberichte erschienen und der einzelne, interessierte Geodät sich nur schwer ein zusammenfassendes Bild der Entwicklung machen konnte. Dies neben den bekannten, grundsätzlichen Schwierigkeiten, sich mit den physikalischen Prinzipien und Grundlagen der neuen Verfahren, die auf den Gebieten der Elektronik, der Funktechnik und der Meteorologie liegen, ernsthaft vertraut zu machen. Es ist daher von großer Bedeutung für die Verbreitung der neuen Verfahren und für die Information der interessierten Kollegenschaft, daß nunmehr relativ rasch hintereinander zwei Handbücher über die elektronischen Verfahren erschienen sind, und zwar von

Simo Laurila: *Electronic Surveying and Mapping* und von

A. W. Kondraschkow: *Elektrooptische Entfernungsmessung*.

Beide Werke seien, da sie eine große Lücke in der geodätischen Fachliteratur schließen helfen, im Anschluß eingehend besprochen.

Simo Laurila: *Electronic Surveying and Mapping*, Publication of the Institute of Geodesy, Photogrammetry and Cartography No. 11, The Ohio State University Press, Columbus USA. 1960; 18 × 25 cm, 249 Seiten und 126 Abbildungen, Preis: US-Dollar 6, —.

Der Autor wurde bereits durch verschiedene Veröffentlichungen über Erfahrungen mit dem Decca- und Shoran- bzw. Hiran-System bekannt und hatte durch mehrere Jahre eine Dozentur für Geodäsie mit Vorlesungen über Aerophotogrammetrie und elektronische Entfernungsmessungsverfahren an dem von Prof. *W. A. Heiskanen* geleiteten Institut für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Universität in Columbüs/Ohio inne. Er konnte außerdem sowohl in seiner finnischen Heimat als auch in den Vereinigten Staaten beim Einsatz elektronischer Distanzmeßverfahren bei Küstenvermessungen und bei aerophotogrammetrischen Arbeiten reiche und gründliche Erfahrungen sammeln.

Das Handbuch gliedert sich in drei Hauptabschnitte:

1. Grundlagen der elektronischen Meßverfahren,
2. Die elektronischen Meßverfahren,
3. Besondere Probleme und Anwendungen.

Der als allgemeine Einführung in das Verständnis der elektronischen Verfahren gedachte erste Hauptteil benützt das Beispiel einer impulsgetasteten Sende-Empfangsanlage zur Besprechung der Grundlagen und Hauptbauelemente. Behandelt werden:

der *Sender*: Das Energieproblem bei Impulstastung, der Oszillator für die Trägerwelle (Dezimeter-, Zentimeter-Wellen), Impulsmodulation und Impulsform;

der *Empfänger*: Kathodenstrahloszillograph (Braunsche Röhre), Zeitbasis- und Nullimpuls-generator und die verschiedenen Formen der Zeitachse;

verschiedene *Antennensysteme*: Der Antennengewinn durch Richtstrahlung (Bündelung) mit Reflektoren (z. B. Yagi-Antenne, Querstrahl-Antenne, Parabolspiegel), ferner der passive Reflektor: der Tripelspiegel.

Rechnet man alle gewonnenen Fehler auf 2 Zielungen um, um daraus den 100-m-Längenfehler für die opt. Distanzmessung zu erhalten, ergibt sich folgende Tabelle:

Nr.	B e s c h r e i b u n g	Bezeich- nung	für eine Zielung "	für zwei Zielungen "	100 m Fehler mm
1	für 2 Keilmarken 30°	Z_g .	$\pm 0,09$	$\pm 0,13$	± 7
2	„ Tachymeterlatte cm Teilung	Z_g .	$\pm 3,30$	$\pm 4,50$	± 226
3	„ starke Theod. u. Keilmarke	$O Z_g$.	$\pm 0,16$	$\pm 0,23$	± 11
4	„ „ „ „ „	$op Z_g$.	$\pm 0,64$	$\pm 0,91$	± 44
5	„ „ „ „ „	P	$\pm 0,62$	$\pm 0,88$	± 43
6	„ „ „ „ „	E	$\pm 1,20$	$\pm 1,70$	± 83
7	Gesamtfehler für 2 Keilmarken	Z .	$\pm 1,34$	$\pm 1,61$	± 78
8	„ „ Tachymeterlatte	Z .	$\pm 3,60$	$\pm 5,00$	± 242

Diese zeigt, daß kleine Fehler in den großen ganz untergehen, was durch die geom. Addition bedingt ist. Obwohl zu bezweifeln ist, ob eine solche Addition immer der Wirklichkeit entspricht, so ist doch daraus zu schließen, daß eine Fehleruntersuchung nur dann von Erfolg sein wird, wenn die Elimination der Teilfehler in der Reihenfolge ihrer Größe vorgenommen wird.

Das Beispiel hat die Anwendung der Zielfehlertheorie auf die opt. Distanzmessung gezeigt. Sie läßt sich für jede beliebige andere Messungsart anwenden und zerlegt den Zielfehler klar in seine Bestandteile.

Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens

Von *Peter Meissl*, Wien

(Schluß)

3. Innere Koordinatensysteme

Zweck dieser Arbeit ist es, dem Maß für die äußere Genauigkeit eines Punkthaufens ein Maß für die innere Genauigkeit an die Seite zu stellen, ein Maß, das nur die gegenseitige Genauigkeit der Punkte mißt.

Kehren wir für einen Augenblick zum Beispiel 1 zurück. Wir haben gesehen, daß die äußere Genauigkeit des Punkthaufens für $\alpha \rightarrow 0$ oder $\alpha \rightarrow \pi/2$ stark absinkt. Die Genauigkeit der gegenseitigen Lage der Punkte erscheint uns — zunächst rein intuitiv — bei diesen Grenzübergängen nicht gefährdet, da diese durch die Seitenmessungen zwischen den Neupunkten gesichert erscheint.

Um ein Maß für die innere Genauigkeit zu finden, werden wir vom ursprünglichen, äußeren Koordinatensystem zu einem anderen, einem inneren System übergehen. Die Lage dieses Systems soll von der zufälligen Lage der Punkte P_1, \dots, P_n abhängig sein, soll also selbst zufällig sein. Zu einem solchen inneren System kann man auf mannigfache Art gelangen. Zum Beispiel könnte man einen der Punkte zum Ursprung des neuen Systems machen und durch einen weiteren die x -Achse hindurchlegen.

Wir bezeichnen mit U_i und V_i die Koordinaten des Punktes P_i im inneren System. Das innere System soll aus dem äußeren durch eine Drehung um den

Winkel φ und eine Verschiebung σ und τ in den beiden Koordinaten hervorgehen. Die Größen φ , σ und τ setzen wir als Funktionen der Zufallsvariablen $(X|Y) = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ an:

$$\begin{aligned} U_i &= X_i \cos \varphi(X_1, \dots, Y_n) - Y_i \sin \varphi(X_1, \dots, Y_n) + \sigma(X_1, \dots, Y_n) \\ V_i &= X_i \sin \varphi(X_1, \dots, Y_n) + Y_i \cos \varphi(X_1, \dots, Y_n) + \tau(X_1, \dots, Y_n) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (8)$$

Formel (8) stellt die Zufallsvariable $(U|V) = (U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n)$ als eine Funktion der Zufallsvariablen $(X|Y)$ dar. Leider ist der funktionelle Zusammenhang kein linearer. Um diesem Übel abzuweichen, machen wir eine Linearapproximation. Sei

$$X_i = x_i + \Delta X_i, \quad Y_i = y_i + \Delta Y_i,$$

wobei x_i und y_i wie früher die Erwartungswerte von X_i und Y_i sein sollen. Es wird angenommen, daß die zufälligen Größen ΔX_i und ΔY_i mit großer Wahrscheinlichkeit klein sind im Vergleich zu den Punktabständen. Daher erwarten wir, daß der Übergang vom äußeren zu einem inneren System durch eine kleine Verdrehung und eine kleine Verschiebung bewerkstelligt werden kann. Wir schreiben daher³⁾:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_j \alpha_j \Delta X_j + \sum_j \beta_j \Delta Y_j \\ \sigma &= \sum_j \gamma_j \Delta X_j + \sum_j \rho_j \Delta Y_j \\ \tau &= \sum_j \epsilon_j \Delta X_j + \sum_j \zeta_j \Delta Y_j \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (9)$$

Da φ , σ und τ kleine Größen sind, werden sich die inneren Koordinaten wenig von den äußeren unterscheiden. Dies rechtfertigt den Ansatz

$$U_i = x_i + \Delta U_i \quad V_i = y_i + \Delta V_i$$

Setzt man dies alles in (8) ein, so ergibt sich in erster Näherung

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= \Delta X_i + \sum_j \Delta X_j (-y_i \alpha_j + \gamma_j) + \sum_j \Delta Y_j (-y_i \beta_j + \delta_j) \\ \Delta V_i &= \Delta Y_i + \sum_j \Delta X_j (x_i \alpha_j + \epsilon_j) + \sum_j \Delta Y_j (x_i \beta_j + \zeta_j) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (10)$$

In diesen Formeln sind die Größen α_j , β_j , γ_j , δ_j , ϵ_j , ζ_j , noch verfügbar. Es handelt sich um eine Schar linearer Transformationen von den ΔX_i , ΔY_i nach den ΔU_i , ΔV_i , die wir durch folgende Behauptung charakterisieren:

Behauptung 1. Die durch (10) gegebenen linearen Transformationen besitzen folgende Eigenschaften.

1. Es handelt sich in erster Näherung um eine orthogonale Koordinatentransformation vom System der X_i , Y_i in das System der U_i , V_i . Verdrehungswinkel φ sowie die Verschiebungen σ und τ sind dabei durch (9) als Funktionen der zufälligen Größen ΔX_i , ΔY_i gegeben.

2. φ , σ und τ sind also selbst zufällige Variable. Über ihre Erwartungswerte gilt

$$E(\varphi) = E(\sigma) = E(\tau) = 0.$$

3. Ebenso gilt $E(\Delta X_i) = E(\Delta Y_i) = E(\Delta U_i) = E(\Delta V_i) = 0$. Dies ist gleichbedeutend mit $E(X_i) = E(U_i) = x_i$, $E(Y_i) = E(V_i) = y_i$.

³⁾ Da bei allen nachfolgenden Summen der Index von 1 bis n läuft, begnügen wir uns beim Summenzeichen ab jetzt mit der Angabe des Summationsindex.

Beweis: 1. braucht nicht mehr bewiesen zu werden. Der Nachweis von 2. und 3. ergibt sich unmittelbar aus (9) und (10) in Verbindung mit (2). —

Wir geben nun die Formeln (10) in Matrixschreibweise an. Dazu führen wir folgende Vektoren bzw. Matrizen ein:

$$\begin{array}{lll}
 X = (X_1, \dots, X_n) & U = (U_1, \dots, U_n) & x = (x_1, \dots, x_n) \\
 Y = (Y_1, \dots, Y_n) & V = (V_1, \dots, V_n) & y = (y_1, \dots, y_n) \\
 \Delta X = (\Delta X_1, \dots, \Delta X_n) & \Delta U = (\Delta U_1, \dots, \Delta U_n) & \\
 \Delta Y = (\Delta Y_1, \dots, \Delta Y_n) & \Delta V = (\Delta V_1, \dots, \Delta V_n) & \\
 \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) & \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \\
 \delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) & \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) & \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \\
 e = (1, 1, \dots, 1) & 0 = (0, 0, \dots, 0) &
 \end{array}$$

Schließlich sei $e^{(i)}$ die i -te Zeile der n -reihigen Einheitsmatrix E . Die angegebenen n -dimensionalen Zeilenvektoren werden wir mitunter paarweise zu $2n$ -dimensionalen Vektoren zusammensetzen. Zum Beispiel ist $(\Delta X | \Delta Y) = (\Delta X_1, \dots, \Delta X_n, \Delta Y_1, \dots, \Delta Y_n)$.

Anstelle von (10) kann man schreiben

$$(\Delta U | \Delta V) = (\Delta X | \Delta Y) \cdot B$$

mit

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B^{xx} & B^{xy} \\ \hline B^{yx} & B^{yy} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} E - \bar{\alpha}y + \bar{\gamma}e & + \bar{\alpha}x + \bar{\varepsilon}e \\ \hline - \bar{\beta}y + \bar{\delta}e & E + \bar{\beta}x + \bar{\zeta}e \end{array} \right) \dots\dots(10a)$$

Wir interessieren uns nun für die Kovarianzmatrix der inneren Koordinaten $(U | V)$ oder (vgl. Fußnote 2!), was dasselbe ist, für die Kovarianzmatrix Q von $(\Delta U | \Delta V)$. Q schreiben wir ausführlich:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} Q^{uu} & Q^{uv} \\ \hline Q^{vu} & Q^{vv} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} q_{11}^{uu}, q_{12}^{uu}, \dots, q_{1n}^{uu} & q_{11}^{uv}, q_{12}^{uv}, \dots, q_{1n}^{uv} \\ q_{21}^{uu}, q_{22}^{uu}, \dots, q_{2n}^{uu} & q_{21}^{uv}, q_{22}^{uv}, \dots, q_{2n}^{uv} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ q_{n1}^{uu}, q_{n2}^{uu}, \dots, q_{nn}^{uu} & q_{n1}^{uv}, q_{n2}^{uv}, \dots, q_{nn}^{uv} \\ q_{11}^{vu}, q_{12}^{vu}, \dots, q_{1n}^{vu} & q_{11}^{vv}, q_{12}^{vv}, \dots, q_{1n}^{vv} \\ q_{21}^{vu}, q_{22}^{vu}, \dots, q_{2n}^{vu} & q_{21}^{vv}, q_{22}^{vv}, \dots, q_{2n}^{vv} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ q_{n1}^{vu}, q_{n2}^{vu}, \dots, q_{nn}^{vu} & q_{n1}^{vv}, q_{n2}^{vv}, \dots, q_{nn}^{vv} \end{array} \right)$$

Die Kovarianzmatrix von $(\Delta X | \Delta Y)$ ist dieselbe wie die von $(X | Y)$ also M (siehe Abschnitt 2). Q berechnet sich aus M nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (3a) zu

$$Q = \bar{B}MB \dots\dots(11)$$

Wir fragen nun nach der Spur der Matrix Q :

Behauptung 2. Die Spur der Kovarianzmatrix Q der inneren Koordinaten ($U|V$) lautet

$$sp(Q) = sp(M) + r^2 (\alpha|\beta) \overline{M(\alpha|\beta)} + n (\gamma|\delta) \overline{M(\gamma|\delta)} + n (\varepsilon|\zeta) \overline{M(\varepsilon|\zeta)} \\ - 2 (y|x) \overline{M(\alpha|\beta)} + 2 (e|0) \overline{M(\gamma|\delta)} + 2 (0|e) \overline{M(\varepsilon|\zeta)} \quad (12)$$

Dabei ist

$$r^2 = \sum_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Beweis: Wir schreiben (10) bzw. (10a) noch etwas um, und zwar in der Form

$$\Delta U_i = (\Delta X|\Delta Y) \overline{[(e^{(i)}|0) - y_i (\alpha|\beta) + (\gamma|\delta)]} = (\Delta X|\Delta Y) \overline{f^{(i)}} \\ \Delta V_i = (\Delta X|\Delta Y) \overline{[(0|e^{(i)}) + x_i (\alpha|\beta) + (\varepsilon|\zeta)]} = (\Delta X|\Delta Y) \overline{g^{(i)}}$$

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz folgt daraus

$$q_{ii}^{uu} = f^{(i)} M \overline{f^{(i)}} \\ q_{ii}^{vv} = g^{(i)} M \overline{g^{(i)}}$$

Demnach:

$$sp(Q) = \sum_i (q_{ii}^{uu} + q_{ii}^{vv}) = \sum_i \{f^{(i)} M \overline{f^{(i)}} + g^{(i)} M \overline{g^{(i)}}\}$$

Setzt man hier für die Vektoren $f^{(i)}$ und $g^{(i)}$ die entsprechenden Ausdrücke ein, so ergibt sich nach einigen einfachen Umformungen unter Beachtung von (4) schließlich (12).

4. Ein inneres Koordinatensystem mit minimaler Spur

Die Formeln (10) oder (10a) des vorigen Abschnittes stellen eine Schar von Transformationen auf ein inneres Koordinatensystem dar. Formel (12) gibt uns die Spur der Kovarianzmatrix der inneren Koordinaten. Wir verfügen nun über die noch unbestimmten Größen $\alpha_i, \beta_i, \dots, \zeta_i$ so, daß die Spur $sp(Q)$ zu einem Minimum wird.

Behauptung 3. Der durch (12) gegebene Ausdruck $sp(Q)$ wird zu einem Minimum für

$$(\alpha|\beta) = \frac{1}{r^2} (y|x), \quad (\gamma|\delta) = -\frac{1}{n} (e|0), \quad (\varepsilon|\zeta) = -\frac{1}{n} (0|e), \quad \dots \quad (13)$$

ausführlicher

$$\alpha_i = \frac{1}{r^2} y_i \quad \gamma_i = -\frac{1}{n} \quad \varepsilon_i = 0 \\ \beta_i = -\frac{1}{r^2} x_i \quad \delta_i = 0 \quad \zeta_i = -\frac{1}{n} \quad \dots \quad (13a)$$

Die minimale Spur lautet dann

$$\text{Min } sp(Q) = sp(M) - \frac{1}{r^2} (y|x) \overline{M(y|x)} - \frac{1}{n} (e|0) \overline{M(e|0)} \\ - \frac{1}{n} (0|e) \overline{M(0|e)} \quad \dots \quad (14)$$

Beweis: Es gilt die Identität:

$$\begin{aligned}
 sp(Q) = sp(M) - \frac{1}{r^2} (y | -x) M \overline{(y | -x)} - \frac{1}{n} (e | 0) M \overline{(e | 0)} - \frac{1}{n} (0 | e) M \overline{(0 | e)} \\
 + r^2 \left[(\alpha | \beta) - \frac{1}{r^2} (y | -x) \right] M \left[(\alpha | \beta) - \frac{1}{r^2} (y | -x) \right] \\
 + n \left[(\gamma | \delta) + \frac{1}{n} (e | 0) \right] M \left[(\gamma | \delta) + \frac{1}{n} (e | 0) \right] \\
 + n \left[(\varepsilon | \zeta) + \frac{1}{n} (0 | e) \right] M \left[(\varepsilon | \zeta) + \frac{1}{n} (0 | e) \right]
 \end{aligned}$$

Von der Gültigkeit dieser Identität kann man sich durch Ausmultiplizieren der letzten drei Terme und geeignete Zusammenfassungen leicht überzeugen. Vgl. (12). Man sieht, daß nur die letzten drei Terme von den Unbestimmten $(\alpha | \beta)$, $(\gamma | \delta)$ und $(\varepsilon | \zeta)$ abhängen. Es handelt sich dabei um Ausdrücke der Form hMh , also um sogenannte quadratische Formen mit der Matrix M . M ist als Kovarianzmatrix positiv definit oder positiv semidefinit. Das heißt, die quadratischen Formen sind keiner negativen Werte fähig. Somit wird das Minimum von $sp(Q)$ erreicht, wenn $h = 0$ ist. Dies führt aber gerade zu den Formeln (13) und (14).

Wir setzen jetzt noch die durch (13) gegebenen Transformationsgrößen in die Formel (10a) ein und gewinnen die Transformationsmatrix

$$B = \left(\begin{array}{c|c} E - \frac{1}{r^2} \overline{y} y - \frac{1}{n} \overline{e} e & + \frac{1}{r^2} \overline{y} x \\ \hline + \frac{1}{r^2} \overline{x} y & E - \frac{1}{r^2} \overline{x} x - \frac{1}{n} \overline{e} e \end{array} \right) \dots \dots \dots (15)$$

5. Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens. Verdrehungs- und Verschiebungsfehler.

Wir fassen zusammen: Gegeben waren die Koordinaten von n Punkten: $X_i = x_i + \Delta X_i$, $Y_i = y_i + \Delta Y_i$ (x_i, y_i Mittelwerte, also fest, $\Delta X_i, \Delta Y_i$ Zufallsvariable mit der Kovarianzmatrix M) in einem festen äußeren Koordinatensystem. Der Ursprung desselben war so gewählt, daß $\sum_i x_i = \sum_i y_i = 0$ ist. Bei der Transformation auf ein inneres System erhalten die Punkte neue Koordinaten $U_i = x_i + \Delta U_i$, $V_i = y_i + \Delta V_i$, vermöge $(\Delta U | \Delta V) = (\Delta X | \Delta Y) B$. In der Matrix B sind gemäß dem Ansatz (10a), der gewisse Eigenschaften der Transformation garantierte, die Größen $(\alpha | \beta)$, $(\gamma | \delta)$ und $(\varepsilon | \zeta)$ noch verfügbar. Die Kovarianzmatrix der neuen, inneren Koordinaten hat die Gestalt $Q = \overline{B} M B$. Wählt man die frei verfügbaren Größen gemäß (13), dann hat Q eine minimale Spur.

Definition 2. Die Größe

$$\begin{aligned}
 t_{in} = \text{Min } sp(Q) = sp(M) - \frac{1}{r^2} (y | -x) M \overline{(y | -x)} - \frac{1}{n} (e | 0) M \overline{(e | 0)} \\
 - \frac{1}{n} (0 | e) M \overline{(0 | e)}
 \end{aligned} \quad (16)$$

bezeichne den inneren totalen quadratischen Lagefehler des Punkthaufens.

Bemerkung. In die Formel für t_{in} gehen die Erwartungswerte von X_i, Y_i also x_i, y_i ein. Diese sind in der Praxis meist unbekannt. Bekannt sind jedoch meist irgendwelche Näherungswerte x_i, y_i , die man, ohne eine große Abweichung zu riskieren, an Stelle der x_i, y_i einsetzen darf.

Der Formel (16) kann man noch eine tiefere Deutung geben. Nach den Formeln (9) und (13a) erhalten wir für den Verdrehungswinkel des inneren Systems zum äußeren:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_i \alpha_i \Delta X_i + \sum_i \beta_i \Delta Y_i = \frac{1}{r^2} \sum_i y_i \Delta X_i - \sum_i x_i \Delta Y_i = \\ &= \frac{1}{r^2} (\Delta X | \Delta Y) \overline{(y | -x)} \end{aligned}$$

Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes (3a) liefert den mittleren quadratischen Fehler von φ

$$m_\varphi = \frac{1}{r^4} (y | -x) M \overline{(y | -x)} \dots\dots\dots (17)$$

Ebenso erhalten wir vermöge (9) und (13a) für die Verschiebung des inneren Systems zum äußeren

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_i \gamma_i \Delta X_i + \sum_i \delta_i \Delta Y_i = -\frac{1}{n} \sum_i \Delta X_i = -\frac{1}{n} (\Delta X | \Delta Y) \overline{(e | 0)} \\ \tau &= \sum_i \epsilon_i \Delta X_i + \sum_i \zeta_i \Delta Y_i = -\frac{1}{n} \sum_i \Delta Y_i = -\frac{1}{n} (\Delta X | \Delta Y) \overline{(0 | e)} \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die mittleren quadratischen Fehler von σ und τ

$$\begin{aligned} m_\sigma &= \frac{1}{n^2} (e | 0) M \overline{(e | 0)} \\ m_\tau &= \frac{1}{n^2} (0 | e) M \overline{(0 | e)} \end{aligned} \dots\dots\dots (17a)$$

Definition 3. m_φ wird als mittlerer quadratischer Drehfehler, $m_\sigma + m_\tau$ als mittlerer quadratischer Verschiebungsfehler des Punkthaufens P_1, \dots, P_n bezeichnet.

Formel (16) erhält jetzt folgende Gestalt:

$$t_{in} = sp(M) - r^2 m_\varphi - n(m_\sigma + m_\tau) \dots\dots\dots (16a)$$

Wir geben nun eine Zusammenfassung der wichtigsten Formeln in matrixenfremder Schreibweise. Es sind:

$x_i, y_i \dots$ die auf den gemeinsamen Schwerpunkt bezogenen Erwartungswerte (Praxis: Näherungswerte) der Koordinaten der Punkte P_1, \dots, P_n des Punkthaufens.

$r^2 = \sum_i (x_i^2 + y_i^2)$... Quadratsumme der x_i, y_i

$m_{ij}^{xx}, m_{ij}^{xy}, m_{ij}^{yy}$, ... Varianzen und Kovarianzen der Koordinaten (mittlere quadratische Fehler und mittlere gemischte Fehler).

Mittlerer quadratischer Drehfehler:

$$m_{\varphi} = \frac{1}{r^4} \sum_i \sum_j \left\{ y_i y_j m_{ij}^{xx} - 2y_i x_j m_{ij}^{xy} + x_i x_j m_{ij}^{yy} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

Mittlerer quadratischer Verschiebungsfehler:

$$m_{\sigma} + m_{\tau} = \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_j \left\{ m_{ij}^{xx} + m_{ij}^{yy} \right\} \dots\dots\dots (18a)$$

Innerer totaler quadratischer Lagefehler:

$$t_{in} = \sum_i (m_{ii}^{xx} + m_{ii}^{yy}) - r^2 m_{\varphi} - n (m_{\sigma} + m_{\tau}) \dots\dots\dots (19)$$

6. Invarianz des inneren Fehlers t_{in} gegenüber Transformationen des äußeren Systems

In die Formel (16) für t_{in} gehen die Mittelwerte x_i, y_i der äußeren Koordinaten ein. Die Definition von t_{in} erfährt erst dann ihre volle Rechtfertigung, wenn der Nachweis gelingt, daß t_{in} unabhängig von der speziellen Wahl des äußeren Systems ist.

Es ist wohl unmittelbar klar, daß t_{in} bei einer Verschiebung des äußeren Systems um einen festen Betrag unverändert bleibt. Denn dabei ändert sich weder M noch die auf den Schwerpunkt bezogenen x_i, y_i . Zu zeigen wäre die Invarianz von t_{in} bei einer Drehung des äußeren Systems um einen festen Winkel ω . Bei einer solchen Drehung gelangt man zu neuen Koordinaten X'_i, Y'_i vermöge

$$X'_i = X_i \cos \omega - Y_i \sin \omega$$

$$Y'_i = X_i \sin \omega + Y_i \cos \omega$$

in Matrizenschreibweise:

$$(X' | Y') = (X | Y) \left(\begin{array}{c|c} E \cos \omega & E \sin \omega \\ \hline -E \sin \omega & E \cos \omega \end{array} \right) = (X | Y) T$$

Gemäß der Aufspaltung $(X | Y) = (x | y) + (\Delta X | \Delta Y)$, $(X' | Y') = (x' | y') + (\Delta X' | \Delta Y')$ erhalten wir

$$(\Delta X' | \Delta Y') = (\Delta X | \Delta Y) T$$

$$(x' | y') = (x | y) T$$

Die neue Kovarianzmatrix M' ergibt sich nach (3a) zu

$$M' = \bar{T} M T$$

Der neue Verdrehungs- und der neue Verschiebungsfehler ergeben sich nach (17) und (17a) zu

$$m'_{\varphi} = \frac{1}{r'^4} (y' | -x') M' \overline{(y' | -x)'}^{\prime}$$

$$(m'_{\sigma} + m'_{\tau}) = \frac{1}{n^2} (e | 0) M' \overline{(e | 0)} + \frac{1}{n^2} (0 | e) M' \overline{(0 | e)}.$$

Dabei ist $r'^2 = \sum_i (x'^2 + y'^2) = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) = r^2$, da bei einer Verdrehung die Abstände vom Schwerpunkt erhalten bleiben.

Behauptung 4. Bei einer Drehung des äußeren Systems um einen festen Winkel sind m_φ , $(m_\sigma + m_\tau)$ und t_{in} invariant.

Auf eine Wiedergabe des Beweises wird verzichtet.

7. Ein Anwendungsbeispiel

Beispiel 2. Wir stellen uns die Aufgabe, den inneren totalen quadratischen Lagefehler des im Beispiel 1 behandelten Punkthaufens P_1, \dots, P_4 zu bestimmen. Es ist (vgl. Abb. 1) $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = a(1, -1, 0, 0)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$= a(0, 0, -1, 1)$ $r^2 = \sum_{i=1}^4 (x_i^2 + y_i^2) = 4a^2$. Die Kovarianzmatrix M ist durch (6) gegeben.

Wir berechnen zunächst den mit r^2 multiplizierten mittleren Verdrehungsfehler und erhalten nach (17):

$$\begin{aligned} r^2 m_\varphi &= \frac{1}{r^2} (y | -x) M (y | -x) = \frac{a^2}{4a^2} (1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, -1) M \overline{(1, 0, 0, 0, 0, 1, -1)} = \\ &= \frac{1}{2} + 4\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich mit Hilfe von (17a)

$$\begin{aligned} n m_\sigma &= \frac{1}{n} (e | 0) M \overline{(e | 0)} = \frac{1}{4} (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) M \overline{(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)} = \\ &= \frac{1}{2} + 4\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n m_\tau &= \frac{1}{n} (0 | e) M \overline{(0 | e)} = \frac{1}{4} (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) M \overline{(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)} = \\ &= \frac{1}{2} + 4\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Die gesuchte Größe t_{in} erhalten wir nun gemäß (16a) und (7)

$$\begin{aligned} t_{in} &= sp(M) - r^2 m_\varphi - n(m_\sigma + m_\tau) = \\ &= \frac{10}{3} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{2}{\sin^2 \alpha} + \frac{5}{3(3 \cos^2 \alpha + 4)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \\ &\quad - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{11}{6} + \frac{5}{3(3 \cos^2 \alpha + 4)} \end{aligned}$$

Man sieht, daß für $\alpha \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ der Fehler t_{in} nicht mehr jenes kritische Verhalten zeigt, wie der äußere totale quadratische Lagefehler t_a . Die kritischen Größen $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ und $\frac{2}{\sin^2 \alpha}$ gehen nur in den Verdrehungs- und den Verschiebungsfehler ein. Für $\alpha \rightarrow 0$ wird φ und τ unsicher, für $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ hingegen σ . Ein Blick auf Abb. 1 macht dieses Verhalten verständlich.

Wir wollen noch ein übrigtes tun und die Kovarianzmatrix Q der inneren Koordinaten berechnen. Nach einiger Rechenarbeit erhalten wir gemäß (11), (15) und den in Beispiel 1 eingeführten Abkürzungen:

	U_1	U_2	U_3	U_4	V_1	V_2	V_3	V_4
U_1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$
U_2	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
U_3	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + 3\mu$	$\frac{1}{8} + 3\mu$	μ	$-\mu$	0	0
U_4	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} - 3\mu$	$\frac{1}{8} + 3\mu$	$-\mu$	μ	0	0
V_1	0	0	μ	$-\mu$	$\frac{7}{24} + \frac{\mu}{3}$	$\frac{1}{24} - \frac{\mu}{3}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
V_2	0	0	$-\mu$	μ	$\frac{1}{24} - \frac{\mu}{3}$	$\frac{7}{24} + \frac{\mu}{3}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
V_3	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0
V_4	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$

Die Spur dieser Matrix ist natürlich gleich t_{in} :

$$sp(Q) = \frac{11}{6} + \frac{20\mu}{3} = \frac{11}{6} + \frac{5}{3(3 \cos^2 \alpha + 4)}$$

200 Jahre Meridianbogen Brünn—Warasdin

Von *Wilhelm Embacher*, Wien

Im Jahre 1762, also genau vor 200 Jahren, unternahm der Jesuitenpater *Joseph Liesganig* die erste Meridianbogenmessung auf alt-österreichischem Boden zwischen Brünn und Warasdin. Außer drei Azimutbestimmungen in Brünn, in Wien und in Graz führte er auch fünf Polhöhenmessungen, und zwar in Sobieschitz, Brünn, Wien, Graz und Warasdin durch. Unter großen Schwierigkeiten verband er diese Punkte mit einer Dreieckskette und legte zur Maßstabsbestimmung und Kontrolle zwei Grundlinien an, die eine bei Wr.-Neustadt, deren Länge bei der 1. Militärtriangulierung und bei der Katastervermessung übernommen wurde und die zweite im Marchfeld zwischen Seyring und Glinzendorf, die verlorengegangen ist. Lassen wir Liesganig zunächst selbst über den Beginn seiner Arbeiten berichten¹⁾.

„Wie wichtig es ist, die wahre Gestalt der Erde zu kennen, kann nur dem verborgen bleiben, der in der praktischen Philosophie gänzlich unbewandert ist, oder

¹⁾ Dimensio Graduum Meridiani Viennensis et Hungarici, Wien 1770.