Ein Überweitwinkelobjektiv als Ursprung eines räumlichen, rechtwinkeligen Koordinatensystems

Josef Kovarik [1]

[1] *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Wien VIII, Krotenthallergasse 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **51** (3), S. 72–83

1963

Für die Orientierung, für die Ablesungen am Gerät und für die Transformation wurden etwa 3 bis 4 Stunden pro Punkt benötigt. Die beschriebene Methode führt auf einfache Weise ohne Feldarbeit zum gewünschten Ergebnis, wenn die wahre Punktlage im Luftbild später richtig identifiziert werden konnte.

Nachtragsmessungen sind immer aufwendig und es sei daher hier festgehalten, daß die Punktidentifizierung eine der wichtigsten Tätigkeiten im Zuge der photogrammetrischen Bestimmung von Einschalt-Punkten (EP) ist.

Ein Überweitwinkelobjektiv als Ursprung eines räumlichen, rechtwinkeligen Koordinatensystems

Von *Josef Kovarik*, Wien

Bekanntlich wird ein photographisches Objektiv auf Grund seines Bildwinkels, also mit Hilfe des Verhältnisses seiner Brennweite zur Bildgröße, als „Tele-, Normal- oder Weitwinkel" charakterisiert.

Im folgenden soll nun die Frage behandelt werden, welchen Bildwinkel ein photogrammetrisches Weitwinkelobjektiv mindestens haben müßte, damit in das Aufnahmezentrum 0 der Ursprung eines räumlichen, rechtwinkeligen Koordinatensystems so gelegt werden könnte, daß die Schnittpunkte des Geländes mit den drei verlängert gedachten Achsen dieses Dreibeins noch zur Abbildung kommen würden, also die Raumwinkeleinheit zur Gänze im Öffnungswinkel des Objektivs untergebracht werden könnte (Abb. 1).

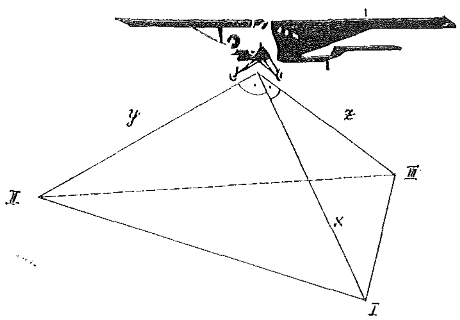

Abb. 1

Dabei sollen diese drei Raumkoordinatenachsen von der verlängert gedachten Kammerhauptachse natürlich gleiche Abstände haben, sie sollen also in der Mantelfläche eines Kegels liegen, dessen Rotationsachse in der Kammerhauptachse liegt.

Die Beantwortung dieser Frage erfolgt durch die Darstellung der Verhältnisse an jener dreiseitigen Pyramide, die von den Aufnahmezentrum 0 mit dem Geländeschnittpunkten der drei Raumkoordinatenachsen gebildet wird. Im Zuge der ganz elementar vorgenommenen Berechnungen ergibt sich die Lage der Grundrißprojektion des Aufnahmezentrums in bezug auf die Punkte I, II und III sowie der senkrechte Abstand des Raumpunktes 0 von der Ebene durch die genannten drei Punkte. Mit anderen Worten, man erhält dabei den Fußpunkt des Lotes und die Flughöhe, aber natürlich bezogen auf die Ebene durch die Punkte I, II und III (Abb. 2).

In der Abbildung seien I, II und III die Endpunkte der bis zur Erdoberfläche verlängert gedachten Achsen des Dreibeins. Im allgemeinen werden diese drei Punkte verschiedene Geländehöhen haben. Da aber durch drei Punkte immer eine Ebene gelegt werden kann, denkt man sich für alle folgenden Überlegungen die Ebene durch die Punkte I, II und III in die Zeichenebene hineingelegt.

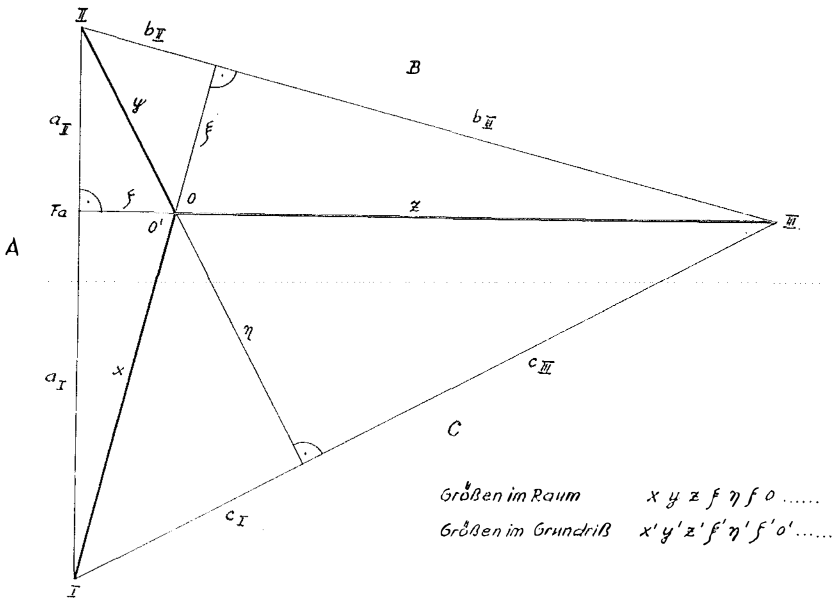

Abb. 2

Bekanntlich ist der geometrische Ort aller Punkte, die über einer gegebenen Länge ein rechtwinkeliges Dreieck bilden, ein Halbkreis über dieser Strecke. Im Raum entsteht dann durch Rotation dieses Kreises um die gegebene Strecke eine Kugel. Der Ursprung 0 muß daher auf 3 (Halb-)Kugeln liegen, die jeweils die Strecken I—II, II—III und III—I zum Durchmesser haben.

Die Schnittkurve zweier Kugeln (deren gegenseitiger Mittelpunktabstand kleiner ist als die Summe der beiden Kugelradien) ist immer ein Kreis, dessen Ebene senkrecht steht auf der Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte.

Da aber die Verbindungslinien der drei Kugelmittelpunkte in der Zeichenebene liegen, daher auch die Schnittkurven je zweier Kugeln in projizierenden Ebenen aufscheinen, liegt 0 (in der Grundrißdarstellung, Abb. 2) auf drei Geraden durch die Punkte I, II und III, die senkrecht auf die Verbindungslinien der zugehörigen Kugelmittelpunkte stehen müssen. Jede Verbindungslinie zweier Kugelmittelpunkte gibt mit ihrem gegenüberliegenden Dreieckspunkt immer eine dem Dreieck I II III ähnliche Figur, daher handelt es sich bei den Normalen auf die Verbindungslinien der Kugelmittelpunkte in der Grundrißdarstellung um die Höhen in dem Dreieck.

Der Schnittpunkt der Dreieckshöhen ist somit auch identisch mit der Grundrißprojektion des Aufnahmezentrums 0 (= 0').

Im Anschluß an die Identifizierung der Bildpunkte wären die Entfernungen zwischen den Geländepunkten I, II und III zu ermitteln.

Die den jeweiligen Höhenlagen entsprechenden, schiefen Längen seien A, B und C. Damit kann die Berechnung der Raumstrecken x, y und z vorgenommen werden, das sind jene Entfernungen, die in den drei Raumkoordinatenachsen vom Aufnahmezentrum bis zu ihrem Schnitt mit der Geländeebene auftreten.

Da $x^2 + y^2 = A^2 \quad y^2 + z^2 = B^2$ und $z^2 + x^2 = C^2$ ergibt sich

$$x = \sqrt{\frac{A^2 - B^2 + C^2}{2}} \qquad y = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - C^2}{2}} \qquad z = \sqrt{\frac{-A^2 + B^2 + C^2}{2}} \qquad \ldots.(1)$$

Dann läßt sich die Höhe des Aufnahmezentrums über der Ebene I, II, III einfach bestimmen, wenn man überlegt, daß der Rauminhalt der dreiseitigen Pyramide I II III 0 verschieden angesetzt werden kann

$$\frac{Fl \,.\, H_0}{3} = \frac{x \,.\, y}{2} \cdot \frac{z}{3}$$

daher

$$H_0 = \frac{x\,y\,z}{2\,Fl} \text{ ist,} \qquad \ldots(2)$$

wobei Fl die Fläche des Dreieckes I II III ist, die man entweder aus Koordinaten oder mit der bekannten Formel rechnet

$$Fl = \sqrt{s \,.\, (s-A) \,.\, (s-B) \,.\, (s-C)} \qquad \text{mit } s = \frac{A + B + C}{2}.$$

Im Anschluß daran ist die Lage der Grundrißprojektion von 0, also der Lotfußpunkt festzulegen, am besten in bezug auf die drei Punkte I, II, III, indem man von den Seiten und von den Dreieckshöhen mindestens zwei aufeinander senkrechte Abschnitte rechnet, zum Beispiel a_{I} und ζ', oder b_{II} und ξ', oder... Dazu geht man von der Überlegung aus, daß die Höhen immer doppelt angesetzt werden können, zum Beispiel

$$a_{\mathrm{I}} \operatorname{tg} \alpha = a_{\mathrm{II}} \operatorname{tg} \beta, \text{ sodaß } \frac{a_{\mathrm{I}}}{a_{\mathrm{II}}} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ ist.}$$

Bekanntlich können bei drei gegebenen Seitenlängen die Winkel gerechnet werden nach der Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-A)\,(s-C)}{s\,(s-B)}} \qquad \text{wobei } s = \frac{A + B + C}{2}.$$

Drückt man jetzt $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \beta$ durch dieselbe Funktion der halben Winkel aus, so erhält man nach einigen Umformungen

$$a_{\mathrm{I}} = \frac{s\,(s-B) - (s-C)\,(s-A)}{A} \text{ und}$$

$$a_{\mathrm{II}} = \frac{s\,(s-C) - (s-A)\,(s-B)}{A}.$$

Diese Formeln lassen sich aber noch weiter vereinfachen, wenn man s durch die drei Geländestrecken ersetzt. Durch Auflösung der Klammerausdrücke und Zusammenfassen erhält man schließlich

$$a_{\mathrm{I}} = \frac{x^2}{A} \text{ sowie } a_{\mathrm{II}} = \frac{y^2}{A} \qquad (a_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{II}} = A)$$

Analog kann man berechnen

$$b_{\mathrm{II}} = \frac{y^2}{B} \text{ und } b_{\mathrm{III}} = \frac{z^2}{B} \qquad (b_{\mathrm{II}} + b_{\mathrm{III}} = B) \qquad \ldots(3)$$

$$c_{\mathrm{III}} = \frac{z^2}{C} \text{ und } c_{\mathrm{I}} = \frac{x^2}{C} \qquad (c_{\mathrm{III}} + c_{\mathrm{I}} = C)$$

(Wenn man sich die Ebenen I II 0, II III 0 und III I 0 in die Zeichenebene hineingeklappt denkt, könnte man diese Ergebnisse direkt aus den rechtwinkeligen Dreiecken ableiten.)

Zur Berechnung der Abschnitte ξ', η', ζ' der Dreieckshöhen geht man dann davon aus, daß die Produkte der jeweiligen zwei Abschnitte in den Seiten A, B und C gleich sind den Quadraten der Raumstrecken ξ, η und ζ, da es sich ja bei den Dreiecken I II 0, II III 0 und III I 0 um rechtwinkelige handelt:

$$b_{\mathrm{II}}\, b_{\mathrm{III}} = \xi^2 \qquad c_{\mathrm{III}}\, c_{\mathrm{I}} = \eta^2 \qquad a_{\mathrm{I}}\, a_{\mathrm{II}} = \zeta^2$$

Daraus wird

$$\begin{aligned} \xi' &= \sqrt{b_{\mathrm{II}}\, b_{\mathrm{III}} - H_0^2} \\ \eta' &= \sqrt{c_{\mathrm{III}}\, c_{\mathrm{I}} - H_0^2} \\ \zeta' &= \sqrt{a_{\mathrm{I}}\, a_{\mathrm{II}} - H_0^2} \end{aligned} \qquad \ldots(4)$$

Um nun vorerst die am Anfang gestellte Frage nach dem erforderlichen Mindestbildwinkel zu beantworten, denkt man sich eine Senkrechtaufnahme, bei der also die Kammerhauptachse mit der Lotlinie auf die Ebene I II IIII zusammenfällt. Die Schnittpunkte der verlängert gedachten Dreibeinachsen bilden dann ein gleichseitiges Dreieck, es ist also $A = B = C$. Damit wird $x = y = z = A/\sqrt{2}$ und $H_0 = A/\sqrt{6}$. Bezeichnet man den halben Öffnungswinkel des Objektivs mit $\frac{\omega}{2}$, dann ist

$$\cos\frac{\omega}{2} = \frac{H_0}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \frac{\omega}{2} = 54^0\, 44' \; (60^g\, 81).$$

Wenn man daher ein Weitwinkelobjektiv mit einem allseits (nicht nur in den Diagonalen) nutzbaren Mindestbildwinkel von 109^0 (122^g) zur Verfügung hätte, dann könnte man in das Aufnahmezentrum 0 ein räumliches, rechtwinkeliges Koordinatensystem legen, derart, daß die Schnittpunkte der verlängert gedachten Dreibeinachsen noch zur Abbildung kämen. Um mit deren Hilfe sodann den Nadirpunkt und die Flughöhe bestimmen zu können, würde die Kenntnis der Entfernungen zwischen den drei Schnittpunkten genügen.

Im folgenden sollen nun einige Weitwinkeltypen auf ihre diesbezügliche Brauchbarkeit untersucht werden. Das um 1940 konstruierte Pleon hatte bei einem Bildformat von 18×18 cm eine Gaußsche Brennweite von 75 mm, was bei Verzeichnungsfreiheit nur ein Bildfeld von etwas über 100^0 geben würde. Um den Lichtabfall in Richtung auf die Bildränder auszugleichen, ist man aber bei diesem Objektiv von der üblichen Beziehung $l \doteq c \,.\, \mathrm{tg}\, \tau$ abgegangen (c ...Kammerkonstante, τ... Öffnungswinkel, l...Abstand von der Bildmitte) und setzte $l \approx c \,.\, \tau$. Das hatte eine von der Bildmitte zu den Rändern hin zunehmende Zusammenpressung, also eine

Verzeichnung zur Folge, so daß sich ein Bildwinkel von 150° ergeben hat. Dieses Objektiv wäre daher geeignet, ein räumliches, rechtwinkeliges Koordinatensystem im oben dargestellten Sinne aufzunehmen. Bei Vorliegen von Verzeichungsfreiheit würde sich der Kegel, auf dem die Achsen des Dreibeins liegen müssen, in einem Kreis mit etwa 106 mm Radius um den Hauptpunkt abbilden, unter Berücksichtigung der Verzeichnung ergibt sich aber ein Kreisradius von nur etwa 72 mm.

Das um 1956 gebaute Pleogon mit einer Brennweite von 153 mm bei einem Bildformat von 23 × 23 cm, ist praktisch verzeichnungsfrei und gibt für die Bilddiagonalen nur einen Öffnungswinkel von 93° (104^g), so daß also der erforderliche Mindestraumwinkel nicht vorhanden ist.

Das um 1958 gebaute Super-Aviogon, auch praktisch verzeichnungsfrei, hat bei einem Bildformat von 23 × 23 cm eine Brennweite von 88,5 mm. Für die Bildseiten ergibt sich daraus zwar nur ein Öffnungswinkel von 105° (117^g), aber für die Diagonalen wird der Grenzwert (109°, bzw. 122^g) mit über 120° $(133)^g$ überschritten. Wenn man daher, im Hinblick auf die Qualität dieses Objektives, die Bildseiten auf die Länge der Bilddiagonalen erweitern würde, könnte man mit $c \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ (etwa 125 mm Radius) jenen Kreis um den Hauptpunkt ziehen, auf dem jeweils um $\frac{2\pi}{3}$ versetzt, die Schnittpunkte des Geländes mit den Dreibeinachsen zu liegen kämen. (Da das Super-Aviogon praktisch bis in die Bildecken verzeichnungsfrei ist und nur einen mäßigen Lichtabfall aufweist, müßte es ohne weiteres möglich sein, den derzeit nur für die Diagonale genutzten Bildwinkel allseitig nutzbar zu machen, auch wenn dann die neu entstehenden Bildecken eine Qualitätseinbuße erleiden sollten.)

Nimmt man nun an, daß man eine Aufnahmekammer zur Verfügung hätte, deren Objektiv der oben gestellten Forderung entspricht, dann würden im allgemeinen die Geländepunkte I II und III in verschiedenen Höhen liegen und es würde sich die Frage erheben, wie ein solcher Fall zu behandeln ist.

Der erste Schritt wäre die Bestimmung jener Höhe, die der Grundrißprojektion von 0 in die Ebene I II III, also 0′, unter Berücksichtigung der Höhen der drei genannten Punkte, zukommt. Diese Höheninterpolationen kann man gleich in der Figur mit den schiefen Seitenlängen A, B und C vornehmen. Die Höhe des Fußpunktes F_A (siehe Abb. 2) ergibt sich aus

$$h_{F_A} = h_{\mathrm{I}} + \frac{h_{\mathrm{II}} - h_{\mathrm{I}}}{A} a_{\mathrm{I}}$$

und mit einem zweiten Interpolationsschritt erhält man ...(5)

$$h_{0'} = h_{F_A} + \frac{h_{\mathrm{III}} - h_{F_A}}{\sqrt{C^2 - a_{\mathrm{I}}^2}} \zeta'$$

(An diesen Formeln erkennt man, daß es nur auf das Verhältnis des Teilstückes einer Seite zur ganzen Länge der betreffenden Seite ankommt, also jeder Verkürzungsfaktor ohne Einfluß wäre.)

In Abb. 3 sei eine Normalebene auf die Ebene I II III durch die Verbindungslinie 0—0′ so gelegt, daß sie senkrecht auf den Schichtenlinien der Dreiecksebene steht. Diese Normalebene sei in die Zeichenebene gelegt. Dann erkennt man, daß die

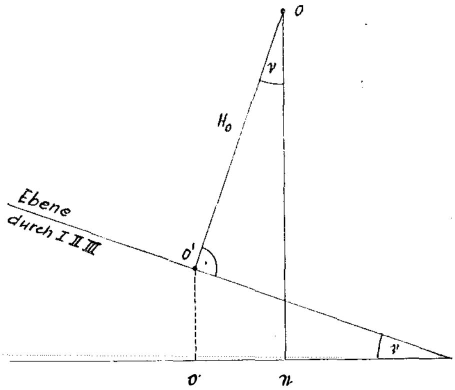

Abb. 3

Höhe des Aufnahmezentrums bei unterschiedlichen Geländehöhen der Punkte I, II, III sich zusammensetzt aus der Höhe von 0′ (durch Interpolation vorher bestimmt) und der im Anfang berechneten Höhe H_0, reduziert in die Lotlinie:

$$h_0 = h_{0'} + H_0 \cos \nu \qquad \ldots (6)$$

wobei aber ν identisch ist mit dem Gefälle der Dreiecksebene.

Diese Geländeneigung kann man aber auf Grund folgender Überlegungen ermitteln. Jede Ebene läßt sich in den räumlichen, rechtwinkeligen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ausdrücken durch die Gleichung $P\,\mathfrak{x} + Q\,\mathfrak{y} + R\,\mathfrak{z} + S = \theta$.
Die Gleichung der Ebene durch I II III hätte die Form

$$P_1\,\mathfrak{x} + Q_1\,\mathfrak{y} + R_1\,\mathfrak{z} + S_1 = \theta$$

und der Winkel φ, den zwei Ebenen miteinander einschließen, ergibt sich dann aus

$$\cos \varphi = \frac{P_1 P_2 + Q_1 Q_2 + R_1 R_2}{\sqrt{(P_1^2 + Q_1^2 + R_1^2)(P_2^2 + Q_2^2 + R_2^2)}}$$

wenn mit dem Index 2 die Koeffizienten der zweite Ebene bezeichnet werden. Wird jetzt eine Horizontalebene in einer beliebigen Höhenlage als zweite Ebene angenommen, dabei die Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ so gelegt, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die ebenen Werte der Grundrißprojektion sind und die Geländehöhen als $\mathfrak{z}$-Koordinaten eingeführt werden, dann vereinfacht sich die Gleichung der Horizontalebene auf die Formel $\mathfrak{z} + \text{const} = \theta$, so daß $P_2 = Q_2 = \theta$ und $R_2 = 1$ wird.

Damit wird dann $\cos \nu = \dfrac{R_1}{\sqrt{P_1^2 + Q_1^2 + R_1^2}}$

Denkt man sich jetzt das Dreieck I II III so in dieses räumliche Koordinatensystem gelegt, daß der Ursprung mit dem Punkt I (= tiefster Punkt) zusammenfällt und die

Seite A (I—II) in die $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{z}$-Ebene fällt, dann haben die Punkte I, II und III folgende Koordinaten:

$$\mathfrak{x}_I = \theta \qquad \mathfrak{y}_I = \theta \qquad \mathfrak{z}_I = \theta$$

$$\mathfrak{x}_{II} = \overline{A} \qquad \mathfrak{y}_{II} = \theta \qquad \mathfrak{z}_{II} = h_{II} - h_I = \overline{h}_{II}$$

$$\mathfrak{x}_{III} = \mathfrak{a}_I = \qquad \mathfrak{y}_{III} = \sqrt{\overline{C}^2 - a_1^2} = \qquad \mathfrak{z}_{III} = h_{III} - h_I = \overline{h}_{III}$$

$$= \frac{\overline{A}^2 - \overline{B}^2 + \overline{C}^2}{2\overline{A}} \qquad = \sqrt{\overline{C}^2 - \left(\frac{\overline{A}^2 - \overline{B}^2 + \overline{C}^2}{2\overline{A}}\right)^2}$$

Dividiert man die Gleichung der I-II-III-Ebene durch den Koeffizienten von $\mathfrak{x}$, dann nimmt sie die Form an

$$\mathfrak{x} + Q'_1\mathfrak{y} + R'_1\mathfrak{z} + S'_1 = \theta$$

Für die Punkte I bis III hat man sodann die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\theta + \theta + \theta + S'_1 = \theta \\ &\overline{A} + \theta + R'_1\,\overline{h}_{II} + S'_1 = \theta \\ &\mathfrak{a}_I + Q'_1\sqrt{\overline{C}^2 - \mathfrak{a}_I^2} + R'_1\,\overline{h}_{III} + S'_1 = \theta \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Koeffizienten

$$S'_1 = \theta \qquad R'_1 = -\frac{\overline{A}}{\overline{h}_{II}} \text{ und } Q'_1 = \frac{\overline{A}\,\overline{h}_{III} - \mathfrak{a}_I\,\overline{h}_{II}}{\overline{h}_{II}\sqrt{\overline{C}^2 - \mathfrak{a}_I^2}}$$

so daß die Gleichung der Ebene I II III (mit I als Ursprung) lautet

$$\mathfrak{x} + \frac{\overline{A}\,\overline{h}_{III} - \mathfrak{a}_I\,\overline{h}_{II}}{\overline{h}_{II}\sqrt{\overline{C}^2 - \mathfrak{a}_I^2}}\,\mathfrak{y} - \frac{\overline{A}}{\overline{h}_{II}}\,\mathfrak{z} = \theta$$

bzw. $$\overline{h}_{II}\sqrt{\overline{C}^2 - \mathfrak{a}_I^2}\,\mathfrak{x} + (\overline{A}\,\overline{h}_{III} - \mathfrak{a}_I\,\overline{h}_{II})\,\mathfrak{y} - \overline{A}\sqrt{\overline{C}^2 - \mathfrak{a}_I^2}\,\mathfrak{z} = \theta$$

Setzt man jetzt die Koeffizienten dieser Gleichung in

$$\cos\nu = \frac{R_1}{\sqrt{P_1^2 + Q_1^2 + R_1^2}} \text{ ein, dann ergibt sich}$$

$$\cos\nu = \frac{-\overline{A}\sqrt{\overline{C}^2 - \mathfrak{a}_I^2}}{\sqrt{\overline{h}_{II}^2(\overline{C}^2 - \mathfrak{a}_I^2) + (\overline{A}\,\overline{h}_{III} - \mathfrak{a}_I\,\overline{h}_{II})^2 + \overline{A}^2(\overline{C}^2 - \mathfrak{a}_I^2)}}$$

Führt man für $\mathfrak{a}_I = \dfrac{\overline{A}^2 - \overline{B}^2 + \overline{C}^2}{2\overline{A}}$ ein und ersetzt sodann die Projektionen von A, B, C in die Horizontalebene, also $\overline{A}$, $\overline{B}$ und $\overline{C}$ durch die ursprünglich gegebenen schiefen Längen (in der Ebene I II III) mit Hilfe der Beziehungen

$$A^2 = \overline{A}^2 + \overline{h}_{II}^2 \qquad B^2 = \overline{B}^2 + (\overline{h}_{III} - \overline{h}_{II})^2 \qquad C^2 = \overline{C}^2 + \overline{h}_{III}^2$$

dann erhält man

$$\cos\nu = -\frac{\sqrt{A^2C^2 - x^4 + 2x^2\,.\,\overline{h}_{II}\overline{h}_{III} - A^2\overline{h}_{III}^2 - C^2\overline{h}_{II}^2}}{\sqrt{A^2C^2 - x^4}}$$

Da $A^2C^2 - x^4 = 4\,Fl^2$ ergibt sich

$$\cos\nu = (-)\sqrt{1 - \frac{\bar{h}_{\mathrm{III}}{}^2}{z^2 + a_{\mathrm{I}}\,a_{\mathrm{II}}} - \frac{\bar{h}_{\mathrm{II}}{}^2}{y^2 + c_{\mathrm{I}}c_{\mathrm{III}}} + \left(\frac{x}{Fl}\right)^2 \frac{\bar{h}_{\mathrm{II}}\bar{h}_{\mathrm{III}}}{2}}$$

oder in einer für die numerische Berechnung handlicheren Form

$$\cos\nu = (-)\sqrt{1 - \frac{\bar{h}_{\mathrm{III}}{}^2}{z^2 + a_{\mathrm{I}}a_{\mathrm{II}}} - \frac{\bar{h}_{\mathrm{II}}{}^2}{y^2 + c_{\mathrm{I}}c_{\mathrm{III}}} + \frac{2a_{\mathrm{I}}}{A\,(z^2 + a_{\mathrm{I}}a_{\mathrm{II}})}\,\bar{h}_{\mathrm{II}}\,\bar{h}_{\mathrm{III}}} \qquad (\ldots 7)$$

(Das Minus-Zeichen vor der Wurzel ergibt sich aus dem Drehsinn und ist hier ohne Bedeutung, da als Neigungswinkel des Geländes immer jener Winkel ausgewiesen wird, der kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist.)

Da die einzelnen Glieder unter der Wurzel von (7) in ähnlicher Form bei der weiteren Berechnung Verwendung finden, führt man vorteilhafterweise ein: für den Quotienten $\bar{h}_{\mathrm{III}}{}^2$ durch das Quadrat der Höhe im Dreieck I II III von III auf A

$$\left(\frac{\bar{h}_{\mathrm{III}}}{\sqrt{z^2 + a_{\mathrm{I}}a_{\mathrm{II}}}}\right)^2 = U_1$$

für das Quadrat des Quotienten $\bar{h}_{\mathrm{II}}$ durch die Höhe auf die Seite C

$$\left(\frac{\bar{h}_{\mathrm{II}}}{\sqrt{y^2 + c_{\mathrm{I}}c_{\mathrm{III}}}}\right)^2 = U_2 \qquad \ldots(8)$$

und für

$$\frac{\bar{h}_{\mathrm{II}}\,\bar{h}_{\mathrm{III}}}{A\,(z^2 + a_{\mathrm{I}}a_{\mathrm{II}})} = U_3$$

so daß

$$\cos\nu = (-)\sqrt{1 - U_1 - U_2 + 2\,a_{\mathrm{I}}\,U_3} \qquad \ldots(7')$$

Mit der so ermittelten Neigung der Dreiecksebene I II III, die gleich ist der Nadirdistanz ν, kann nach Formel (6) die absolute Höhe h_0 des Aufnahmezentrums berechnet werden.

Schließlich wäre noch die Frage zu klären, welche Lage der Nadirpunkt einnimmt, da ja nur dann, wenn I, II und III dieselben Höhen haben, die Grundrißprojektion von 0 auf I II III, also 0′, auch in der Lotlinie durch 0 liegt.

In Abb. 3 erkennt man, daß die Verschiebung von 0′ in den Nadirpunkt in der Ebene I II III die Größe $H_0 \,.\, \mathrm{tg}\,\nu$ hätte. Da diese Verschiebung senkrecht auf die Richtung der Schichtenlinien der Ebene I II III erfolgt, im vorhergehenden Teil aber die Aufstellung der Gleichung dieser Ebene im System $\mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z}$ vorgenommen worden ist, wäre der Richtungswinkel der Schichtenlinien in der I-II-III-Ebene in bezug auf die Seite I-II als Ausgangsrichtung ein anderer. Daher führt man jetzt vorteilhafterweise die Punkte I, II, III mit 0′ in das $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-$\mathfrak{z}$-System über. Überlegt man, daß es sich stets um ein und dieselbe Ebene handelt, die nur zuerst senkrecht und dann schräg betrachtet wird, kann man ohne Berechnung des Einflusses der Drehung auskommen. Es ist ja nur der dem Punkt 0′ in der Ebene I II III entsprechende Punkt in dem Dreieck des $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-$\mathfrak{z}$-Systems zu bestimmen. Da bekanntlich jedes Dreieck in ein anderes mit Hilfe der aus der Zuordnung sich ergebenden affinen Beziehungen übergeführt werden kann, liegt also folgende Aufgabe vor:

Die Punkte I, II, III und 0′ mit ihren Koordinaten in der I-II-III-Ebene

$$\mathrm{I}\,(\theta,\theta) \quad \mathrm{II}\,(A,\theta) \quad \mathrm{III}\,(a_{\mathrm{I}}, z' + \zeta') \quad \mathrm{O}'\,(a_{\mathrm{I}}, \mathfrak{q}')$$

sind überzuführen in das $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-System mit

$$\mathrm{I}\,(\theta,\theta) \quad \mathrm{II}\,(\overline{A},\theta) \quad \mathrm{III}\,(\mathfrak{a}_{\mathrm{I}}, \sqrt{C^2 - \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}{}^2}) \qquad \mathfrak{O}\,(?, ?)$$

wobei die $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-Koordinaten des Punktes 0′, der jetzt in diesem System mit $\mathfrak{O}$ bezeichnet werden soll, zu rechnen sind.

Die Formeln für eine affine Transformation in das $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-System würden lauten

$$\mathfrak{x} = A'_1\, x + B'_1\, y + C'_1 \qquad \mathfrak{y} = A'_2\, x + B'_2\, y + C'_2$$

Mit Hilfe der Punkte I bis III lassen sich der Reihe nach die Koeffizienten bestimmen

$$C'_1 = \theta \quad C'_2 = \theta \quad A'_1 = \frac{\overline{A}}{A} \quad A'_2 = \theta$$

$$\mathrm{B}'_1 = \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{I}} - \dfrac{\overline{A}}{A}\, a_{\mathrm{I}}}{z' + \zeta'}$$ und $$B'_2 = \frac{\sqrt{C^2 - \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}{}^2}}{z' + \zeta'}$$ so daß die Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{O}$ sich ergeben mit

$$\mathfrak{x}_0 = \frac{\overline{A}}{A}\, a_{\mathrm{I}} + \frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{I}} - \dfrac{\overline{A}}{A}\, a_{\mathrm{I}}}{z' + \zeta'}\, \zeta' \qquad \mathfrak{y}_0 = \frac{\sqrt{C^2 - \mathfrak{a}_{\mathrm{I}}{}^2}}{z' + \zeta'}\, \zeta'$$

Führt man in diese beiden Gleichungen die schon früher gerechneten Größen und die in (8) festgelegten Abkürzungen ein, dann erhält man

$$\mathfrak{x}_0 = \upsilon\, a_{\mathrm{I}} \left(1 - \frac{z^2}{C^2}\, U_2 - a_{\mathrm{II}}\, U_3\right)$$

wobei das Verhältnis $\dfrac{A}{\overline{A}} = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 - \overline{h}_{\mathrm{II}}{}^2}} = \upsilon$ gesetzt wird. . . .(9)

Auf demselben Wege erhält man $\mathfrak{y}_o = \upsilon\, \zeta' \cos \nu$

Da die Verschiebung der Flächennormalen 0-0′ in die Lotlinie durch 0 in einer Ebene senkrecht auf die Schichtenlinien der I-II-III-Ebene erfolgt, wäre, wie schon früher gesagt wurde, der Betrag dieser Verschiebung in der geneigten Ebene $H_0 . \mathrm{tg}\, \nu$. Nach der Projektion von 0′ in die Horizontalebene hat der Fußpunkt der Lotlinie ($\mathfrak{N}$) von $\mathfrak{O}$ den Abstand $H_o \sin \nu$. Aus der Formel (7) erkennt man, daß

$$\sin^2 \nu = \frac{\overline{h}_{\mathrm{I.I}}{}^2}{z^2 + a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}}} + \frac{\overline{h}_{\mathrm{II}}{}^2}{y^2 + c_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{III}}} - \frac{2\, a_{\mathrm{I}}\, \overline{h}_{\mathrm{II}}\, \overline{h}_{\mathrm{III}}}{A\,(z^2 + a_{\mathrm{I}} a_{\mathrm{II}})}$$ ist.

Die Verschiebung $\mathfrak{O}$—$\mathfrak{N}$ ergibt sich daher (mit den Abkürzungen (8))

$$\mathfrak{O} - \mathfrak{N} = H_0 \,.\, \sqrt{U_1 + U_2 - 2 a_{\mathrm{I}} . U_3} \qquad \ldots(10)$$

$$\text{bzw. } \mathfrak{O} - \mathfrak{N} = H_0 \sqrt{1 - \cos^2 \nu}$$

Diese Größe muß nun noch in die beiden Koordinatenkomponenten des $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-Systems zerlegt werden:

$$\triangle \mathfrak{x} = (\mathfrak{O}-\mathfrak{N}) \cos \rho \text{ und } \triangle \mathfrak{y} = (\mathfrak{O}-\mathfrak{N}) \sin \rho$$

wobei ρ der Richtungswinkel der Verschiebung im $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-System bedeutet und gleich ist der Normalen auf den Richtungswinkel φ der Schichtenlinien.

Die Gleichung der Ebene I II III im $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-$\mathfrak{z}$-System lautet (siehe Seite 78)

$$\bar{h}_{II} \,.\, \sqrt{C^2 - a_I^2} \,.\, \mathfrak{x} + (\bar{A}\,\bar{h}_{II} - \mathfrak{a}_I\,\bar{h}_{II}) \,.\, \mathfrak{y} - \bar{A}\,\sqrt{C^2 - \mathfrak{a}_I^2} \,.\, \mathfrak{z} = \theta$$

Setzt man $\mathfrak{z}$ gleich einer Konstanten, am besten $\mathfrak{z} = \theta$, dann erhält man die Gleichung jener Geraden, für die das gewählte $\mathfrak{z}$ konstant ist, also die Gleichung der betreffenden Schichtenlinie.

$$\mathfrak{z} = \theta \ldots \bar{h}_{II} \sqrt{C^2 - \mathfrak{a}_I^2} \,.\, \mathfrak{x} + (\bar{A}\,\bar{h}_{III} - \mathfrak{a}_I\,\bar{h}_{II}) \,.\, \mathfrak{y} = \theta$$

$$\text{oder } \mathfrak{y} = - \frac{\bar{h}_{II} \sqrt{C^2 - \mathfrak{a}_I^2}}{\bar{A}\,\bar{h}_{III} - \mathfrak{a}_I \bar{h}_{II}} \,.\, \mathfrak{x}$$

Darin ist der Koeffizient von $\mathfrak{x}$ die sogenannte „Steigung", also die Tangens-Funktion des Richtungswinkels der Schichtenlinien

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\bar{h}_{II} \sqrt{C^2 - \mathfrak{a}_I^2}}{\bar{A}\,\bar{h}_{III} - \mathfrak{a}_I \bar{h}_{II}}$$

Diese Formel kann man auch wieder umformen und wenn man festhält, daß die Geländeneigung immer kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, daher der Cosinus immer positiv, erhält man den Richtungswinkel der Schichten aus

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{h_{II}}{h_{III} - h_{F_A}} \, \frac{\sqrt{z^2 + a_I a_{II}}}{A} \cos \nu$$

wobei unter h_{F_A} die im Zuge der Höhenbestimmung von 0′ (siehe Seite 76, Formel (5)) zu rechnende Höhe des Fußpunktes F_A zu verstehen ist.

Da der Richtungswinkel ρ der Verschiebung $\mathfrak{O}-\mathfrak{N}$ im $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-System gleich ist $\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right)$, ist $\operatorname{tg} \rho = - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$

daher

$$\operatorname{tg} \rho = + \frac{h_{III} - h_{F_A}}{h_{II} \cos \nu} \, \frac{A}{\sqrt{z^2 + a_I a_{II}}} \qquad \ldots (11)$$

Hat man das $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-$\mathfrak{z}$-System entsprechend den Voraussetzungen von Seite 78 angeordnet, also mit dem tiefsten Punkt (= I) als Ursprung und der Seite A (I-II) in der $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{z}$-Ebene, dann erhält man die Koordinaten des Nadirpunktes $\mathfrak{N}$ in der horizontalen Ebene $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$ mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_n &= a_I\, \upsilon \left(1 - \frac{z^2}{C^2} U_2 - a_{II}\, U_3\right) - H_0 \sqrt{1 - \cos^2 \nu} \,.\, \cos \rho \\ \mathfrak{y}_n &= \zeta'\, \upsilon \cos \nu - H_0 \sqrt{1 - \cos^2 \nu} \,.\, \sin \rho \end{aligned} \qquad \ldots (12)$$

(Da voraussetzungsgemäß der tiefste Punkt die Bezeichnung I bekommen hat, erfolgt auch die Verschiebung $\mathfrak{O}-\mathfrak{N}$ immer in Richtung auf diesen Punkt.)

Waren die Punkte I, II und III ursprünglich in einem Landeskoordinatensystem gegeben, dann kann es unter Umständen noch erforderlich sein, den Nadirpunkt in dieses Ausgangssystem zu transformieren.

Wenn es sich bei dem im Bild erfaßten Gelände um ein Gebiet handelte, von dem schon genügend genaue Karten vorliegen, könnte man die Entfernung zwischen den drei Punkten mit deren Hilfe ermitteln. Andernfalls müßte man, da die Punkte I, II und III im allgemeinen nicht mit im Bild identifizierbaren Geländepunkten zusammenfallen werden, so vorgehen, daß man immer zwei, den jeweiligen Punkten nächstgelegene identifizierbare Bildpunkte einmißt und in der unmittelbarsten Umgebung davon Streckenmessungen zwischen im Bild identifizierbaren Geländepunkten vornimmt. Damit wäre man in der Lage, den jeweils örtlich gültigen Maßstab zu bestimmen und die Lage des Soll-Schnittpunktes in bezug auf die benachbarten eingemessenen Punkte festzulegen.

Auf diese Art und Weise sollen die Schnittpunkte der verlängert gedachten Dreibeinachsen mit dem Gelände in einem schon vorhandenen Netz bestimmt worden sein (entsprechend den früher festgelegten Bezeichnungen):

I (Pkt mit geringster Höhe, also tiefster Punkt)

$y = +\ 12.340 \qquad x = 5{,}341.643 \qquad h = 625$ m

II

$+\ 14.135 \qquad 5{,}351.726 \qquad 3660$ m

III

$+\ 24.665 \qquad 5{,}339.870 \qquad 1285$ m

Aus den Koordinaten- und Höhendifferenzen rechnet man zunächst die Raumstrecken A, B und C. Nach Berücksichtigung der Korrekturen wegen Projektionsverzerrung und Höhe über dem Meer erhält man für die schiefen Längen in den betreffenden Höhenlagen

$$A = 10.685 \text{ m}$$
$$B = 16.040 \text{ m}$$
$$C = 12.471 \text{ m}$$

Als nächstes rechnet man die Entfernungen der Geländepunkte I, II und III vom Aufnahmezentrum 0

$$x = 2.493 \text{ m}$$
$$y = 10.390{,}_5 \text{ m}$$
$$z = 12.219{,}_5 \text{ m}$$

und die Fläche des Dreieckes I-II-III, $Fl = 66{,}555.537$ km². Damit kann der Normalabstand des Aufnahmezentrums 0 von der Ebene I-II-III gerechnet werden

$$H_0 = 2377{,}_7 \text{ m}$$

Für die weiteren Berechnungen werden noch benötigt

$$a_{\mathrm{I}} = 581{,}_5 \qquad a_{\mathrm{II}} = 10.103{,}_7$$
$$c_{\mathrm{I}} = 498{,}_3 \qquad c_{\mathrm{III}} = 11.972{,}_8$$
$$\zeta' = 471{,}_6$$

Mit einem ersten Interpolationsschritt erhält man die Höhe des Fußpunktes F_A

$$h_{F_A} = 790{,}_2$$

und mit einem zweiten Schritt die Höhe von 0′

$$h_0' = 808{,}_9$$

Dann ermittelt man die Konstanten

$$U_1 = \left(\frac{660}{12\,457{,}_6}\right)^2 = 0{,}0028\,069$$

$$U_2 = \left(\frac{3035}{10\,673{,}_7}\right)^2 = 0{,}0808\,518$$

$$U_3 = \frac{3035\,.\,660}{10\,685{,}_3\,.\,12\,457{,}_6{}^2} = 0{,}0000.012{,}_1$$

und damit

$$\cos \nu = \sqrt{1 - U_1 - U_2 + 2a_I\,U_3} = 0{,}9579{,}_9$$

$$\text{also } \nu = 18^g\,52 \qquad \text{und } \sin \nu = 0{,}28679{,}_6$$

Aus (11) rechnet man

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{1285 - 790{,}_2}{3035\,.\,\cos \nu} \cdot \frac{10\,685{,}_3}{12\,457{,}_6} = +\,0{,}14597$$

womit man erhält $\sin \rho = 0{,}1444{,}_4$ und
$\cos \rho = 0{,}9895{,}_1$

Das Verhältnis $\dfrac{A}{\bar{A}} = \upsilon = 1{,}0429\,56{,}_7$

und die lokalen Koordinaten des Nadirpunktes $\mathfrak{N}$ im $\mathfrak{x}$-$\mathfrak{y}$-System

$$\underline{\mathfrak{y}_n} = 471{,}_6\,.\,1{,}0429\,5_7\,.\,\cos \nu - 2377{,}_7 \sin \nu\,.\,\sin \rho = \underline{372{,}_7}$$

$$\underline{\mathfrak{x}_n} = 581{,}_5\,.\,1{,}0429\,5{,}_7\,.\,0{,}9101\,7{,}_4 - 2377{,}_7 \sin \nu\,.\,\cos \rho = -\,\underline{122{,}_7}$$

Die absolute Höhe des Aufnahmezentrums 0 rechnet man nach (6) mit

$$\underline{h_0} = 808{,}_9 + 2377{,}_7 \cos \nu = \underline{3086{,}_7}\text{ m.}$$

Überlegungen bezüglich der erreichbaren Genauigkeit und weitere Bemerkungen zu den vorstehenden grundsätzlichen Ausführungen folgen in einer weiteren Arbeit.

Über äußere Bildflugbedingungen

Von *Herbert Muzik*, Wien

Das Luftbild hat in den letzten Jahren in Österreich eine stetig steigende Anwendung gefunden. Der Kreis der Interessenten erweitert sich von Jahr zu Jahr, eine immer größere Zahl von Bildflugprojekten (dzt. etwa 70 jährlich) für die verschiedensten Verwendungszwecke werden durch das Vermessungsflugzeug des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, welches nun bereits über 5 Jahre in Betrieb steht, durchgeführt.

Es erscheint aus diesem Grunde angezeigt, einmal aus der Bildflugpraxis einige Fakten herauszustellen, welche von allgemeinem Interesse sind und zur Förderung des Verständnisses für die Bildflugarbeit beitragen könnten.