

Paper-ID: VGI\_196414



## Über die Verformungsfehler eines Systems von endlich vielen Punkten

Peter Meissl <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Technische Hochschule, Wien IV, Karlsplatz 13, Mathematisches Labor*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **52** (4), S. 105–109

1964

BibT<sub>E</sub>X:

```
@ARTICLE{Meissl_VGI_196414,  
Title = {{\U}ber die Verformungsfehler eines Systems von endlich vielen  
Punkten},  
Author = {Meissl, Peter},  
Journal = {{\O}sterreichische Zeitschrift f{{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {105--109},  
Number = {4},  
Year = {1964},  
Volume = {52}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom  
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,  
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und  
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

---

Nr. 4

Baden bei Wien, Ende August 1964

52. Jg.

---

## Über die Verformungsfehler eines Systems von endlich vielen Punkten

Von *Peter Meissl*, Wien

### 1. Einleitung

Es wird ein System von endlich vielen Punkten im ein-, zwei- oder dreidimensionalen Raum untersucht. Die Koordinaten der Punkte sind zufälligen Fehlern unterworfen. Die Matrix der mittleren quadratischen und mittleren gemischten Fehler wird mit  $M$  bezeichnet.  $M$  wird im folgenden auch Fehler- oder Kovarianzmatrix genannt. Als Maß für die Genauigkeit der Koordinaten diene die Summe der mittleren Fehlerquadrate, also die Spur  $sp(M)$  der Fehlermatrix  $M$  (Summe der Glieder in der Hauptdiagonale).

Wir stellen uns die Aufgabe, aus  $M$  solche Fehlereinflüsse abzuspalten, die auf eine zufällige Verformung des Punktsystems zurückgeführt werden können. Dabei wird von vornherein festgelegt, um welche Verformungen es sich handeln soll. Beispielsweise könnte man verlangen, den Einfluß einer gemeinsamen zufälligen Verdrehung und Verschiebung der Punkte zu eliminieren. Fragestellungen dieser Art wurden in [6] und [7] behandelt. Es lassen sich jedoch zahlreiche andere Beispiele angeben. Man denke etwa an einen gestreckten Polygonzug. Hier kann man fragen, welcher Anteil der Fehler auf eine Verbiegung des Zuges längs einer quadratischen Parabel oder einer Sinuskurve zurückgeführt werden kann. Dabei wird der mittlere Fehler der Amplitude des Sinus von besonderem Interesse sein, da er ein Maß für den zufälligen Durchhang des Polygonzuges darstellt. Etwas allgemeiner wäre eine Untersuchung der zufälligen Verbiegungen längs eines (trigonometrischen) Polynoms. Ein Beispiel dieser Art wird in Abschnitt 4 behandelt. Schließlich sei als Anwendungsmöglichkeit noch die Analyse der Verformungen photogrammetrischer Streifen erwähnt. In diesem Fall ist es ja für Zwecke der Ausgleichung besonders interessant zu wissen, welche Verformungen mit größter Wahrscheinlichkeit auftreten.

Nach Elimination der Verformungseinflüsse bleibt eine Matrix  $\mathbf{Q}$  von Restfehlern. Falls diese Restfehler, für die als einheitliches Maß  $sp(\mathbf{Q})$  verwendet werden kann, noch groß sind, wird man zu der Annahme geführt, daß die eliminierten Fehlereinflüsse die ursprünglichen Ungenauigkeiten der Koordinaten noch nicht zufriedenstellend erklären. Man wird dann nach weiteren Fehlereinflüssen suchen. In vielen Fällen wird es gelingen, die ursprünglichen Koordinatenfehler durch die Fehler einiger weniger Verformungsparameter hinreichend gut zu approximieren. Dadurch lassen sich manche Fehleruntersuchungen bedeutend rationeller gestalten<sup>1)</sup>.

## 2. Das wahrscheinlichkeitstheoretische Modell

Sei  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$  ein zufälliger Vektor. Seine Kovarianzmatrix sei  $\mathbf{M} = (m_{ij})$ . Der Rang von  $\mathbf{M}$  sei beliebig.  $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_m)$  sei eine lineare Vektorfunktion von  $\mathbf{U}$ , also ebenfalls ein zufälliger Vektor. Es gelte  $m < n$ . Wir schreiben

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \mathbf{B} \quad \dots (1)$$

Dabei sei  $\mathbf{B} = (b_{it})$  eine zunächst unbestimmte  $n \times m$  Matrix.

Wir wollen  $\mathbf{U}$  durch  $\mathbf{V} \mathbf{A}$  approximieren, wobei  $\mathbf{A} = (a_{sj})$  eine bekannte  $m \times n$  Matrix vom Rang  $m$  ist:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{A} + \mathbf{W} \quad \dots (2)$$

$\mathbf{W}$  ist bei dieser Approximation der zufällige Restvektor  $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_n)$ . Setzt man für  $\mathbf{V}$  ein, so folgt

$$\mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{B} \mathbf{A} + \mathbf{W} \quad \dots (3)$$

Daraus folgt für  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} (\mathbf{E} - \mathbf{B} \mathbf{A}) \quad \dots (3a)$$

$\mathbf{E}$  bezeichnet die Einheitsmatrix. Die Kovarianzmatrix von  $\mathbf{W}$  ist nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz<sup>2)</sup>

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{B}}) \mathbf{M} (\mathbf{E} - \mathbf{B} \mathbf{A}) \quad \dots (4)$$

Um die Approximation möglichst gut zu machen, wird über die noch unbestimmte Matrix  $\mathbf{B}$  so verfügt, daß  $sp(\mathbf{Q})$  zu einem Minimum wird.

*Satz 1.  $sp(\mathbf{Q})$  wird zu einem Minimum für*

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{A}} (\mathbf{A} \bar{\mathbf{A}})^{-1} \quad \dots (5)$$

*Die minimale Spur von  $\mathbf{Q}$  lautet*

$$sp(\mathbf{Q}) = sp(\mathbf{M}) - sp\{(\mathbf{A} \bar{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} \bar{\mathbf{A}}\} \quad \dots (6)$$

*Für  $\mathbf{Q} = (q_{ij})$  ergibt sich:*

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}} (\mathbf{A} \bar{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{M} (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}} (\mathbf{A} \bar{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{A}) \quad \dots (7)$$

*Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{R} = (r_{st})$  des Vektors  $\mathbf{V}$  lautet:*

$$\mathbf{R} = (\mathbf{A} \bar{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} \bar{\mathbf{A}} (\mathbf{A} \bar{\mathbf{A}})^{-1} \quad \dots (8)$$

<sup>1)</sup> Herrn W. Meissl danke ich für Anregungen und für die Durchsicht des Manuskriptes.

<sup>2)</sup> Ein Querstrich über einem Symbol bedeutet Transposition.

*Bemerkung.* Die Aussage dieses Satzes ist wohl zu unterscheiden von dem beim strengen Ausgleich benützten Konzept der Schätzungen  $\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{B}$  mit kleinster Varianz. Hier lautet  $\mathbf{B}$  bekanntlich  $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{A}} (\mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{A}})^{-1}$ , wobei  $\mathbf{M}$  den Rang  $n$  besitzen muß. Beim Satz 1 hingegen wird die Summe der Varianzen der Restgrößen  $W_i$  minimiert.  $\mathbf{M}$  kann beliebigen Rang haben. Im Falle  $\mathbf{M} = \mathbf{E}$  besteht allerdings kein Unterschied zur Theorie der besten Schätzungen. (Vgl. [3], [5].)

*Beweis von Satz 1.* Wir benützen für die Dauer des Beweises das Einsteinsche Summationsübereinkommen. Die Indizes  $i, j, k, l$  laufen von 1 bis  $n$ . Die Indizes  $s, t, u, v$  laufen von 1 bis  $m$ . Kommt in einem Ausdruck ein Index zweimal vor, so ist über ihn zu summieren (vgl. auch [5]). Aus (4) wird:  $q_{ik} = (\delta_{ik} - a_{si} b_{ks}) m_{kl} (\delta_{jt} - a_{tj} b_{lt})$ . Dabei ist  $\delta_{ij}$  das Kroneckersymbol. Demnach ist

$$sp(\mathbf{Q}) = q_{ii} = (\delta_{ik} - a_{si} b_{ks}) m_{kl} (\delta_{il} - a_{ti} b_{lt}) = m_{ii} - 2 m_{ij} a_{sj} b_{js} + \dots \quad (9)$$

Sei nun  $\mathbf{G} = (g_{st})$  und  $\mathbf{G}^{-1} = (g^{st})$ . Dabei sei  $\mathbf{G} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{A}}$ , also  $g_{st} = a_{sj} a_{tj}$ . Wir formen  $sp(\mathbf{Q})$  weiter um, wobei wir statt  $m_{ij}$  auch  $sp(\mathbf{M})$  schreiben können:

$$sp(\mathbf{Q}) = sp(\mathbf{M}) - g^{st} a_{sj} m_{jk} a_{tk} + a_{si} (b_{js} - g^{st} a_{tj}) m_{jk} (b_{ku} - g^{uv} a_{vk}) a_{ui} \dots \quad (10)$$

Die Übereinstimmung von (9) und (10) ergibt sich durch Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke in (10) unter Beachtung der Definition von  $\mathbf{G}$ .

Die zwei ersten Terme nach dem  $=$  Zeichen in (10) sind frei von den zu bestimmenden Größen  $b_{it}$ . Der dritte Term kann, als Summe über  $i$  aufgefaßt, in der Form  $\zeta^{(i)} \mathbf{M} \zeta^{(i)}$  geschrieben werden, wobei  $\zeta^{(i)}$  ein  $n$  dimensionaler Zeilenvektor ist. Wegen des definiten Verhaltens der Kovarianzmatrix  $\mathbf{M}$  ist  $\zeta^{(i)} \mathbf{M} \zeta^{(i)} \geq 0$ . Ein Minimum wird daher für  $\zeta^{(i)} = 0$  erreicht. Dies gelingt durch  $b_{js} = g^{st} a_{tj}$ , was gleichbedeutend mit (5) ist. Aus (10) wird dann unmittelbar (6). (7) ergibt sich aus (4) und (5). (8) folgt aus (1) und (5) nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz. Damit ist Satz 1 bewiesen.

### 3. Aufspaltung der Koordinatenfehler

Wir wenden nun die in Abschnitt 2 gewonnenen Ergebnisse auf die Koordinatenfehler eines Systems von  $n$  Punkten  $P_1, \dots, P_n$  an. Die Rolle von  $\mathbf{U}$  in Abschnitt 2 spielen die Koordinatenfehler. Im zweidimensionalen Fall wäre  $\mathbf{U} = (\Delta \mathbf{X} \mid \Delta \mathbf{Y}) = (\Delta X_1, \dots, \Delta X_n \mid \Delta Y_1, \dots, \Delta Y_n)$ . Die Komponenten  $V_s$  von  $\mathbf{V}$  sind  $m$  Verformungsparameter. Die Matrix  $\mathbf{A}$  gibt den Einfluß der Verformungen auf die Koordinaten an. Genauer gesagt, das Matrizenprodukt  $\mathbf{V} \mathbf{A}$  ergibt die Koordinatenänderungen bei einer gewissen Verformung  $\mathbf{V}$  an. Die Verformungsparameter  $V_s$  werden als lineare Funktionen der ursprünglichen Koordinatenfehler  $(\Delta \mathbf{X} \mid \Delta \mathbf{Y})$  angesetzt:  $\mathbf{V} = (\Delta \mathbf{X} \mid \Delta \mathbf{Y}) \mathbf{B}$ . Subtrahiert man von den  $(\Delta \mathbf{X} \mid \Delta \mathbf{Y})$  die Koordinatenänderungen  $\mathbf{V} \mathbf{A} = (\Delta \mathbf{X} \mid \Delta \mathbf{Y}) \mathbf{B} \mathbf{A}$ , so bleiben Restfehler  $\mathbf{W} = (\Delta \hat{\mathbf{X}} \mid \Delta \hat{\mathbf{Y}}) = (\Delta \hat{X}_1, \dots, \Delta \hat{X}_n \mid \Delta \hat{Y}_1, \dots, \Delta \hat{Y}_n)$ . Somit  $(\Delta \hat{\mathbf{X}} \mid \Delta \hat{\mathbf{Y}}) = (\Delta \mathbf{X} \mid \Delta \mathbf{Y}) (\mathbf{E} - \mathbf{B} \mathbf{A})$ .  $\mathbf{M}$  ist die Fehlermatrix der ursprünglichen Koordinatenfehler  $(\Delta \mathbf{X} \mid \Delta \mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{Q}$  die der Restfehler  $(\Delta \hat{\mathbf{X}} \mid \Delta \hat{\mathbf{Y}})$ . Maß für die jeweiligen Genauigkeiten sind  $sp(\mathbf{M})$  und  $sp(\mathbf{Q})$ .

Wählt man  $\mathbf{B}$  entsprechend Satz 1 zu  $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{A}} (\mathbf{A} \bar{\mathbf{A}})^{-1}$ , so wird  $sp(\mathbf{Q})$  zu einem Minimum, die Genauigkeit der Restgrößen also maximal.  $\mathbf{R}$  ist die Fehlermatrix

der Verformungsparameter. Die neue Fehlermatrix  $\mathbf{Q}$  enthält diese Verformungsfehler nicht mehr. Ersetzt man nämlich in (8)  $\mathbf{M}$  durch  $\mathbf{Q}$  gemäß (7), so folgt  $\mathbf{R} = \mathbf{O}$  (Nullmatrix).

Wir illustrieren diese Technik der Fehleraufspaltung zunächst an dem Modell in [6]. Aus der Fehlermatrix der Koordinatenfehler  $\Delta X_i, \Delta Y_i$  soll der Einfluß einer gemeinsamen Verdrehung um den kleinen Winkel  $\varphi$  und einer gemeinsamen kleinen Verschiebung  $\sigma$  und  $\tau$  in  $x$  und  $y$  Richtung eliminiert werden. Hier ist  $\mathbf{V} = (\varphi, \sigma, \tau)$ . Der Einfluß der Verformung  $\varphi$  ist zunächst nichtlinear. Da  $\Delta X_i, \Delta Y_i, \varphi, \sigma, \tau$  mit großer Wahrscheinlichkeit kleine Größen sind, kann man linearisieren und erhält:

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta X}_i &= \Delta X_i + \varphi y_i - \sigma \\ \widehat{\Delta Y}_i &= \Delta Y_i - \varphi x_i - \tau\end{aligned}$$

In diesen Formeln sind  $x_i, y_i$  feste Näherungswerte für die Koordinaten. Die weitere Rechnung ist — in etwas anderer Bezeichnungsweise — in [6] wiedergegeben.

Wir beenden diesen Abschnitt mit dem wichtigen Hinweis, daß die Formeln (5) bis (8) besonders einfach werden, wenn die Zeilen der Matrix  $\mathbf{A}$  orthogonal sind. In diesem Fall sind  $(\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}})$  und  $(\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}})^{-1}$  Diagonalmatrizen. Das sukzessive Eliminieren von Verformungseinflüssen vollzieht sich dann besonders elegant, wie am nachfolgenden Beispiel dargelegt werden soll.

#### 4. Ein Anwendungsbeispiel

Ein Nivellement führe vom Punkt  $P_0$  über  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  nach  $P_n$ . Die Höhen von  $P_0$  und  $P_n$  seien bekannt. Die Fehlermatrix der Fehler  $\delta H_i$  der gemessenen Höhenunterschiede von  $P_{i-1}$  nach  $P_i$  sei  $m^2 \mathbf{E}$ . Da  $m^2$  in der Folge nur als Proportionalitätsfaktor auftritt, setzen wir  $m^2 = 1$ . Die Fehler  $\Delta H_i$  der ausgeglichenen Höhen  $H_i$  der einzelnen Punkte ergeben sich zu  $\Delta H_i = \sum_{j=1}^i (\delta H_j - n^{-1} \sum_{k=1}^n \delta H_k)$ .

In Matrixschreibweise:  $\Delta \mathbf{H} = \delta \mathbf{H} (\mathbf{E} - n^{-1} \bar{\mathbf{e}} \mathbf{e}) \mathbf{D}$ . Dabei ist  $\Delta \mathbf{H} = (\Delta H_1, \dots, \Delta H_n)$ ,  $\delta \mathbf{H} = (\delta H_1, \dots, \delta H_n)$ ,  $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)$  und  $\mathbf{D} = (d_{ij})$  folgende Dreiecksmatrix  $d_{ij} = 1$  für  $i \leq j$ ,  $d_{ij} = 0$  für  $i > j$ . Die Fehlermatrix von  $\Delta \mathbf{H}$  ist demnach  $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{D}} (\mathbf{E} - n^{-1} \bar{\mathbf{e}} \mathbf{e}) (\mathbf{E} - n^{-1} \bar{\mathbf{e}} \mathbf{e}) \mathbf{D}$ . Man erhält

$$sp(\mathbf{M}) = \frac{n^2 - 1}{6}$$

Bei diesem Beispiel liegt der Fall eines eindimensionalen Punktsystems mit den Koordinaten  $H_i$  vor.

Wir fragen nach den Verformungen längs eines trigonometrischen Polynoms und setzen entsprechend (3) an

$$\Delta H_i = \sum_{s=1}^m V_s \sin \frac{is\pi}{n} + \Delta \widehat{H}_i \quad i = 1, \dots, n, \quad m < n.$$

Die Matrix  $\mathbf{A} = (a_{sj})$  hat die Gestalt  $a_{sj} = \sin \frac{js\pi}{n}$ . Die Zeilen von  $\mathbf{A}$  sind orthogonal.

Es ist nämlich  $\sum_{j=1}^n a_{sj} a_{tj} = \sum_{j=1}^n \sin \frac{js\pi}{n} \sin \frac{jt\pi}{n} = \delta_{st} \frac{n}{2}$ . Somit ist  $(\overline{\mathbf{A}\mathbf{A}})^{-1} = \frac{2}{n} \mathbf{E}$ .

Nach (5) ist  $\mathbf{B} = \frac{2}{n} \overline{\mathbf{A}}$ . Daraus kann man nach (7)  $\mathbf{Q} = (\mathbf{E} - \frac{2}{n} \overline{\mathbf{A}\mathbf{A}}) \mathbf{M} (\mathbf{E} - \frac{2}{n} \overline{\mathbf{A}\mathbf{A}})$

berechnen und nach (8)  $\mathbf{R} = \frac{4}{n^2} \mathbf{A} \mathbf{M} \overline{\mathbf{A}}$ .

Wir beschränken uns auf die Wiedergabe folgender Größen. Die mittleren quadratischen Verformungsfehler, also die mittleren quadratischen Fehler (Varianzen) der  $V_s$  lauten:

$$r_{ss} = \left[ 2n \sin^2 \frac{s\pi}{2n} \right]^{-1} \quad \dots (11)$$

Die Spur der Matrix der Restfehler lautet

$$sp(\mathbf{Q}) = \frac{n^2 - 1}{6} - \sum_{s=1}^m \left[ 4 \sin^2 \frac{s\pi}{2n} \right]^{-1} \quad \dots (12)$$

Man sieht, daß in (11)  $m$ , die Anzahl der Glieder des trigonometrischen Polynoms nicht vorkommt. Der mittlere Fehler  $r_{ss}$  des Verformungsparameters  $V_s$  ist unabhängig von der Anzahl berücksichtigter Verformungseinflüsse. Dieser Umstand ist der Orthogonalität der Zeilen von  $\mathbf{A}$  zuzuschreiben. Formel (12) gibt an, welcher Anteil der ursprünglichen Ungenauigkeit  $sp(\mathbf{M})$  von den Verformungsfehlern  $V_1, \dots, V_m$  geschluckt wird. Es ist interessant, diesen Anteil ins Verhältnis zu  $sp(\mathbf{M})$  zu setzen und mit  $n$  zur Grenze überzugehen. Es ergibt sich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{sp(\mathbf{M}) - sp(\mathbf{Q})}{sp(\mathbf{M})} = 6 \sum_{s=1}^m (s\pi)^{-2} \quad \dots (13)$$

Dieser Ausdruck wird für  $m = 1$  zu 0,61, für  $m = 2$  zu 0,76. Mehr als 75% der ursprünglichen Ungenauigkeit werden also bereits von den ersten zwei Verformungen geschluckt, falls  $n$  genügend groß ist. Zur besseren Verdeutlichung geben wir Zahlenwerte für  $n = 10$  an:

Es ist  $sp(\mathbf{M}) = 16,5$ . Für  $sp(\mathbf{Q})$  erhält man für  $m = 1, 2, \dots, 9$  der Reihe nach folgende Werte: 6,284; 3,666; 2,453; 1,729; 1,229; 0,847; 0,532; 0,256; 0,000. Die mittleren Fehler  $r_{ss}$  der Verformungsparameter  $V_s$  lauten der Reihe nach: 2,043; 0,524; 0,243; 0,145; 0,100; 0,076; 0,063; 0,055; 0,051.

#### Literatur

- [1] Zurmühl, Matrizen. Springer 1958. 2. Aufl.
- [2] Jordan, Eggert, Kneißl, Handbuch der Vermessungskunde. Band I.
- [3] Linnik, Die Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung. VEB Dt. Verl. d. Wiss., 1961.
- [4] Anderson, Introduction to multivariate statistical analysis. John Wiley 1958.
- [5] Eberl, Die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen im Rahmen der mathematischen Statistik. ÖZfV 47 (1959), 3.
- [6] Meissl, Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens. ÖZfV 50 (1962), 5 und 6.
- [7] Meissl, Über die innere Genauigkeit dreidimensionaler Punkthaufen. Manuskript. Erscheint in der Zeitschrift für Vermessungswesen.