

Paper-ID: VGI_196417



Eine Methode zur Verringerung des Refraktionseinflusses im Nivellement

Gerhard Stolzka ¹

¹ *Technische Hochschule, Wien IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **52** (5), S. 137–153

1964

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Stolzka_VGI_196417,  
Title = {Eine Methode zur Verringerung des Refraktionseinflusses im  
Nivellement},  
Author = {Stolzka, Gerhard},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {137--153},  
Number = {5},  
Year = {1964},  
Volume = {52}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 5

Baden bei Wien, Ende Oktober 1964

52. Jg.

Eine Methode zur Verringerung des Refraktionseinflusses im Nivellement

Von *Gerhard Stoltzka*, Wien

Einleitung

Die über Empfehlung der Internationalen Assoziation für Geodäsie in den letzten Jahren durchgeführten Arbeiten über die „Nivellitische Refraktion“ zeigen grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Erfassung dieses systematischen Fehlers:

a) verhältnismäßig exakt, aber mit großem Aufwand aus gleichzeitig mit dem Nivellement gemessenen vertikalen Temperaturdifferenzen und

b) schätzungsweise bei der Auswertung mit Hilfe aus umfangreichem statistischen Material errechneten „lokalen Refraktionskoeffizienten“.

Für das zweite Verfahren sind Tabellen veröffentlicht²⁾, die die bodennahe Lichtstrahlkrümmung in der jedem Geodäten von trigonometrischen Höhenmessungen her vertrauten Form in Einheiten der Erdkrümmung angeben.

Beschränkt man eine Untersuchung z. B. auf mittlere nördliche Breiten, so kommen zur Ausführung von Präzisionsnivellements vorwiegend die Monate April bis September, täglich von 8 bis 18 Uhr, in Frage.

Aus dieser zeitlichen Einschränkung, zusätzlich zu den sonst üblichen Postulaten, ergeben sich einige wesentliche Vereinfachungen für die Erfassung des Refraktionseinflusses. Vor allem die Möglichkeit, in einer als Exponentialfunktion angenommenen Temperatur-Höhenfunktion den Exponenten mit hinreichender Genauigkeit konstant zu setzen.

Damit kann bei Nivellements in gleichmäßig geneigtem Gelände, für beliebige meßbare Höhendifferenzen eine Standpunktlage gefunden werden, in der sich der Refraktionseinfluß aufhebt.

Dieser grundlegende Gedanke einer exzentrischen Meßanordnung wird, um alle proportional zur Zielweite wirkenden Fehler mitauszuschalten, auf einen „Doppelstandpunkt“ erweitert.

Mit der im folgenden behandelten Methode der „exzentrischen Meßanordnung bezogen auf einen Doppelstandpunkt“ kann man den Einfluß der Nivellitischen Refraktion verringern, ohne dafür die wesentlichen Vorteile des Nivellements aus der Mitte aufzugeben.

1. Die Ursachen der Nivellitischen Refraktion

Wie schon in der Einleitung angedeutet, sei nur der Zeitraum von April bis September, täglich von 8 bis 18 Uhr, betrachtet. In der beim Nivellement benützten bodennahen Luftschicht bis 3 m Höhe baut sich während der Sommermonate, ca. 1–2 Stunden nach Sonnenaufgang bis 1–2 Stunden vor Sonnenuntergang, eine gleichartige, vertikale, nach oben hin abnehmende Temperaturschichtung auf. Hervorgerufen wird diese Erscheinung durch die Wärmeabgabe des von der Sonnenstrahlung aufgeheizten Erdbodens. Die Wärmeabgabe erfolgt hauptsächlich durch einen Massenaustausch, wobei die Luft der bodennächsten „Unterschicht“, durch Wärmeleitung erhitzt, sich ausdehnt und turbulent über die „Zwischenschicht“ in die „bodennahe Oberschicht“ strömt. Während ihres Weges mischt sich die aufsteigende mit der umgebenden Luft und kühlt ab. Bei einer derartigen Temperaturänderung mit der Höhe spricht man von einem negativen Temperaturgradienten $\frac{\Delta t}{\Delta h}$.

Der geschilderte Vorgang tritt mit verschiedener Intensität auf, die von der Sonnenhöhe, der Bewölkung oder sonstigen Beschattung und dem Wärmeaufnahmevermögen des Bodens abhängt. Letzteres wird nach der „Reflexzahl“ (auch „Albedo“ genannt) beurteilt, welche je nach Farbe und Bedeckung des Bodens variiert. Die bisher besprochenen Erscheinungen stellen den sogenannten Einstrahlungstypus dar.

Mit der vertikalen Temperaturabnahme der Luft ist eine Dichteschichtung verbunden. Sie bewirkt die in der geodätischen Praxis bekannten vertikalen Refraktionserscheinungen. Eine bodenparallele Luftschichtung angenommen, wird sich beim Nivellement aus der Mitte im horizontalen Gelände kein bzw. bei verschiedener Bodenbedeckung oder Beschattung im Vor- und Rückblick nur ein unregelmäßiger Refraktionseinfluß bemerkbar machen.

Betrachtet man jedoch bei angenommen gleichmäßig geneigtem Gelände den bergseitigen Visurstrahl, so wird dieser beim Eintritt in die nach unten progressiv enger und wärmer werdenden, daher optisch dünneren Schichten vom Lot, d. h. aufwärts gebrochen, und zwar über die gleiche Distanz hinweg stärker als der talseitige Visurstrahl. Dieser führt durch breiter und kälter werdende, also optisch dichtere Schichten, wird zum Lot und demnach auch aufwärts gebrochen. Infolge dieser unsymmetrischen Strahlenbrechung entsteht ein systematischer Differenzbetrag $R_r - R_b$, der die Größenordnung von einigen Zehntel-Millimeter erreichen kann und alle gemessenen Höhenunterschiede verkleinert.

2. Die mathematische Behandlung der Nivellitischen Refraktion

Unter der Voraussetzung gleichmäßiger Geländeneigung und bodenparalleler Lufttemperaturschichtung, sei kurz die Ableitung der Bestimmungsformel für die Nivellitische Refraktion wiedergegeben.

Die verwendete Bezeichnungsweise ist für ein Nivellement aus der Mitte aus Abbildung 1 ersichtlich.

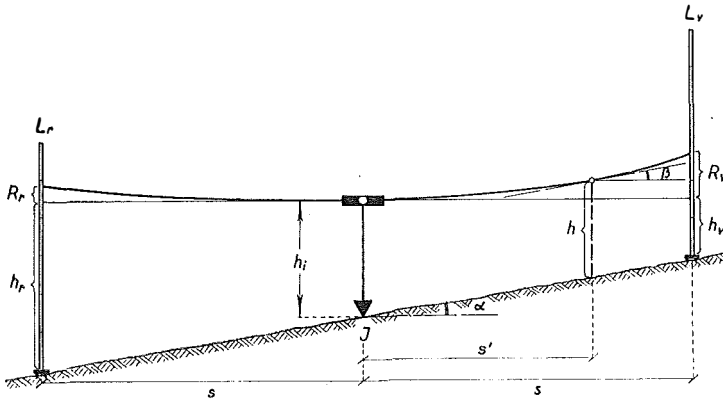


Abb. 1

Nach Snellius ist

$$n \cdot \cos \alpha = \text{const} \quad \dots (1)$$

wenn α den Neigungswinkel des Geländes und damit auch den der isothermischen Flächen zu einer horizontalen Ebene und n den Brechungskoeffizienten der Luft darstellt. Bedingt durch die Ablenkung der im Instrumentenstandpunkt horizontalen Zielstrahlen unter den betrachteten Verhältnissen, und zwar aufwärts vom und abwärts zum Lot, werden die Visuren in einer Entfernung s' einen Neigungswinkel β annehmen. Die Änderung von α bezüglich eines veränderlichen Brechungskoeffizienten erhält man aus der Differentialgleichung

$$d\alpha = \frac{\cot \alpha}{n} dn \quad \dots (2)$$

und daraus mit

$$\beta = - \int d\alpha$$

$$\beta = - \int_{n_i}^n \frac{\cot \alpha}{n} dn \quad \dots (3)$$

Da $\alpha = \text{const}$ und n näherungsweise gleich 1 gesetzt werden kann, ergibt sich

$$\beta = - \cot \alpha (n - n_i) = - \cot \alpha \cdot \Delta n \quad \dots (4)$$

Wie Kukkamäki auch experimentell nachwies, ist die Änderung des Brechungskoeffizienten dn wesentlich eine Funktion der relativen Temperaturänderung und in geringem Ausmaß der absoluten Temperatur und des Luftdruckes.

Allgemein also

$$dn = f(t, B) \cdot dt$$

und näherungsweise

$$\Delta n = f(t, B) \Delta t \quad \dots (5)$$

Hier sei angeführt, daß ein Temperaturunterschied von 15° C bzw. ein Luftdruckunterschied von 75 mm Hg den Refraktionseinfluß nur um 10% verändern.

Als Interpolationsformel für die Temperatur nach der Höhe wurde

$$t = a + b \cdot h^c \quad \dots (6)$$

gewählt, wobei: t die Temperatur,
 h die Höhe über dem Boden und
 a, b, c ... Konstanten darstellen.

Eine differentielle Änderung dt ergibt sich daraus beim Übergang auf endliche Größen zwischen t_i , der Temperatur am Standpunkt in Instrumentenhöhe h_i , und t , der Temperatur in beliebiger Zielweite s und Höhe h über dem Boden, mit

$$t = b \cdot (h^c - h_i^c) \quad \dots (7)$$

Den Refraktionseinfluß R über eine Entfernung s erhält man aus dem Integral

$$R = \int_0^s \beta \cdot ds \quad \dots (8)$$

Die Gleichungen (7) in (5), (5) in (4) und letztere weiter in (3) eingesetzt, wird

$$R = -\cot \alpha \cdot f(t, B) \cdot b \cdot \int_0^s (h^c - h_i^c) \cdot ds \quad \dots (9)$$

Für die Ableitung ausreichend genau kann man

$$h = h_i \mp s \cdot \tan \alpha \quad \dots (10)$$

substituieren und erhält durch Differentiation

$$dh = \mp \tan \alpha \cdot ds \quad \text{und daraus} \quad ds = \mp \cot \alpha \cdot dh$$

somit

$$R_{v,r} = \pm \cot^2 \alpha \cdot f(t, B) \cdot b \cdot \int_{h_i}^{h_{v,r}} (h^c - h_i^c) \cdot dh \quad \dots (11)$$

Die Auswertung des Integrals mit den neuen Grenzen führt auf

$$R_{v,r} = \pm \cot^2 \alpha \cdot f(t, B) \cdot b \left[\frac{h^c + 1}{c + 1} - h_i^c \cdot h \right]_{h_i}^{h_{v,r}}$$

und zur engültigen Form nach Kukkamäki:

$$R_{v,r} = \pm \cot^2 \alpha \cdot f(t, B) \cdot b \left[\frac{h_{v,r}^{c+1}}{c+1} - h_i^c \cdot h_{v,r} + \frac{c}{c+1} \cdot h_i^{c+1} \right] \quad \dots (12)$$

3. Betrachtungen zur Ermittlung des Refraktionseinflusses nach der Formel von Kukkamäki

Zur Erfassung des Refraktionseinflusses einer Visur braucht man:

a) Die durchschnittliche Geländeneigung α , die sich ausreichend genau aus einem näherungsweise ermittelten Höhenunterschied zu einer tachymetrisch gemessenen Distanz errechnen läßt;

b) die Temperatur t und den Luftdruck B , welche in ihrem Einfluß $f(t, B)$ einen Wert $< 10^{-6}$ ergeben und wie schon früher erwähnt, den Absolutbetrag von R nur unbedeutend bei einer beträchtlichen eigenen Änderung beeinflussen;

c) die Instrumentenhöhe h_i und die Lattenlesung vor h_v und rück h_r , sowie
 d) die Konstanten b und c der verwendeten Temperatur-Höhenfunktion $t = b(h_2^c - h_1^c)$, welche aus drei in verschiedenen Höhen laufend mitgemessenen Temperaturen des betrachteten Bereiches berechnet werden können.

Einleitend wurde dargelegt, daß in den untersten Luftschichten die Wärmeübertragung im wesentlichen durch einen turbulenten Massenaustausch vor sich geht. Die Turbulenz wird nun gerade unter den Umständen, bei denen durch bedeutende Temperaturunterschiede nach der Höhe der Refraktionseinfluß am stärksten auftritt, so groß, daß man nurmehr statistisch von einer kontinuierlichen Luftschichtung sprechen kann. Aus diesem Grund mißt man im Sinne einer Vereinfachung ohne nachweisbaren Genauigkeitsverlust, parallel zum Nivellement pro Standpunkt nur eine Temperaturdifferenz. Der Exponent c der Temperatur-Höhenfunktion ist nämlich erfahrungsgemäß über einen längeren Zeitraum bei gleichbleibenden Witterungsverhältnissen konstant und beeinflusst bei einer Änderung, wie in einer folgenden Arbeit noch nachgewiesen wird, im Gegensatz zum Parameter b nur gering den Refraktionseinfluß. So kann c z. B. bei laufenden Messungen von Δt aus Stundenmittelwerten errechnet oder auch aus den Tabellen von Best mit den Interpolationsformeln von Kukkamäki für beliebige Breiten ermittelt werden.

Bei der vorliegenden Arbeit soll nun c konstant gehalten werden. Einen günstigen Mittelwert vermittelt der Auszug für die c -Werte von Best im betrachteten Beobachtungszeitraum. Die Gültigkeit dieser Tabelle 1 bei einer Übertragung der c -Werte von $\varphi = 52^\circ$ in andere europäische Breiten um $\pm 5^\circ$ bleibt erhalten, da sich keine Änderung der Größenordnung für einen Monatstagesdurchschnitt ergibt. Der Mittelwert $c = -0,2$ für den betrachteten Zeitraum schwankt zwischen 0 und 0,4. Bei der beabsichtigten Meßanordnung ändert dies aber kaum etwas am Refraktionseinfluß, wie ebenfalls in der folgenden Ahhandlung nachgewiesen wird.

Tabelle 1
 c -Werte nach den Beobachtungen von Best

Zeit	April	Mai	Juni	Juli	August	September
8 Uhr	- 0,27	- 0,19	- 0,35	- 0,43	- 0,24	- 0,38
9 Uhr	- 0,18	- 0,21	- 0,31	- 0,42	- 0,20	- 0,27
10 Uhr	- 0,13	- 0,18	- 0,25	- 0,37	- 0,22	- 0,22
11 Uhr	- 0,10	- 0,16	- 0,25	- 0,35	- 0,18	- 0,22
12 Uhr	- 0,10	- 0,13	- 0,21	- 0,30	- 0,19	- 0,20
13 Uhr	- 0,09	- 0,12	- 0,20	- 0,28	- 0,14	- 0,17
14 Uhr	- 0,11	- 0,11	- 0,20	- 0,24	- 0,16	- 0,11
15 Uhr	- 0,03	- 0,13	- 0,15	- 0,19	- 0,10	- 0,16
16 Uhr	+ 0,05	- 0,02	- 0,13	- 0,19	+ 0,02	- 0,10
17 Uhr	- 0,03	- 0,04	- 0,12	- 0,26	- 0,08	(- 0,36)
Summe	- 0,98	- 1,29	- 2,17	- 3,03	- 1,49	- 2,19
Mittel	- 0,10	- 0,13	- 0,22	- 0,30	- 0,15	- 0,22

$$\text{Gesamtmittel: } -\frac{1,12}{6} = -0,19 \approx \underline{\underline{-0,2}}$$

Die Vereinfachung der Berechnungsformel für R läßt sich noch durch die Verwendung gleicher Instrumentenhöhen fortsetzen. Mit einem auf entsprechende Länge gebundenen Senkel wird die Konstanz von h_i leicht erreicht.

4. Die Ausschaltung der Refraktion durch „exzentrische Beobachtung“

a) Auf einem Standpunkt

Wie in Abbildung 1 übertrieben dargestellt, ist die Brechung eines bodennahen Zielstrahles stärker als die eines bodenferneren. Die dadurch bei konstanter Geländeneigung und Nivellieren aus der Mitte auftretende Höhendifferenz ΔR kann berechnet oder, bei Ausschaltung aller sonstigen Fehlermöglichkeiten, durch eine bergseitige Verschiebung d des Instrumentenstandpunktes eliminiert werden.

Der Ansatz für eine Verschiebungstrecke d würde dabei lauten:

$$\Delta R = R_v - R_r = 0 \quad \dots (13)$$

und eingesetzt:

$$\left(\frac{h_v^{c+1}}{c+1} - h_v h_i^c + \frac{c}{c+1} \cdot h_i^{c+1} \right) - \left(\frac{h_r^{c+1}}{c+1} - h_r \cdot h_i^c + \frac{c}{c+1} \cdot h_i^{c+1} \right) = 0$$

Der Faktor $\cot^2 \alpha \cdot f(t, B) \cdot b$ fällt weg, wenn man die klimatischen Verhältnisse während der Beobachtungszeit konstant setzt.

Zusammengefaßt ergibt sich

$$\frac{1}{c+1} \cdot (h_v^{c+1} - h_r^{c+1}) - h_i^c (h_v - h_r) = 0$$

und nach der Substitution

$$h_v = h_i - (s - d) \cdot \tan \alpha \quad \text{und} \\ h_r = h_i + (s + d) \cdot \tan \alpha \quad \text{wird daraus}$$

$$\Delta R = \frac{1}{c+1} \cdot \{ [h_i - (s - d) \tan \alpha]^{c+1} - [h_i + (s + d) \tan \alpha]^{c+1} \} - h_i^c \cdot \Delta h = 0 \quad \dots (14)$$

Nach einigen weiteren Umformungen läßt sich d durch Reihenentwicklung von Gleichung (14) ermitteln und nimmt für $\Delta h_{max} = 3$ m, bei $c = -0,2$ und $h_i = 1,5$ m einen Wert bis $\frac{1}{5}$ s an.

Diese einfach scheinende Möglichkeit der Elimination von R bei exzentrischer Beobachtung, scheidert an der Erfassungsmöglichkeit aller proportional zur Distanz wirkenden Fehler. Betrachtet man nur einen Zielachsenfehler als wahrscheinlich größten Einfluß, so könnte dieser, bei einer angenommenen zeitproportionalen Änderung, periodisch festgestellt und nachträglich mit den gemessenen Distanzen berücksichtigt werden. Die Erfahrung zeigt aber hauptsächlich sprunghafte Änderungen des Zielachsenfehlers bei Erschütterungen während des Instrumentenaufstellens und dem Transport. Außerdem beinhaltet dieser den bisher noch wenig beachteten und

nachträglich nicht feststellbaren, distanzproportionalen Fehler, der durch Wärmespannungen im Instrument hervorgerufen wird.

Letztere Überlegungen lassen erkennen, daß nur ein Verfahren, das auch alle distanzproportionalen Fehler neben dem Refraktionseinfluß beseitigt, Sinn hat.

b) Die exzentrische Beobachtung angewandt auf einen Doppelstandpunkt

Um einen proportional der Distanz wirkenden Fehler wegen einer zu langen Vor- und zu kurzen Rückvisur in einem Nivellementstandpunkt zu eliminieren, muß in einem folgenden Standpunkt dieselbe Längendifferenz durch eine kürzere Vor- und eine entsprechend längere Rückvisur gebildet werden.

Sind s_1 und s_2 die Visurlängen zweier einander folgender Standpunkte beim Nivellement aus der Mitte, d_i auftretende Längendifferenzbeträge und δ die Summe aller proportional der Distanz wirkenden Fehler pro Längeneinheit, so ergibt sich die Bedingung:

$$(s_1 + d_1) \cdot \delta - (s_1 - d_1) \cdot \delta + (s_2 - d_2) \cdot \delta - (s_2 + d_2) \cdot \delta = 0$$

somit $d_1 = d_2$

Diese Bedingung läßt sich mit der im vorangehenden Abschnitt aufgestellten Gleichung für die Ausschaltung der Refraktion verbinden, wenn der Ansatz, wie es für die Elimination der proportional der Distanz wirkenden Fehler notwendig ist, auf die Betrachtung von zwei Standpunkten, künftig Doppelstandpunkt genannt, erweitert wird.

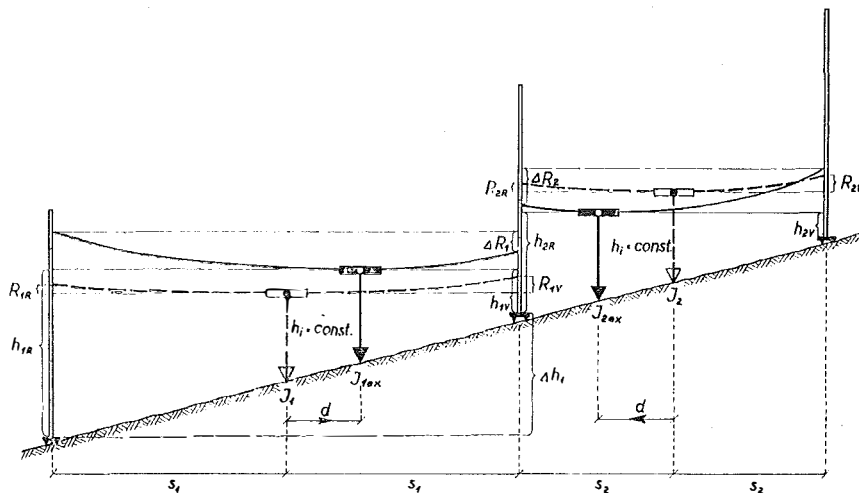


Abb. 2

Die Überlegung dazu ist folgende:

Im ersten Standpunkt wird zur Elimination des Refraktionsfehlers das Instrument aus der Mitte um einen Betrag d aufwärts versetzt. Diese exzentrische Aufstellung läßt z. B. einen vorhandenen Neigungsfehler wirksam werden, der nur durch eine gleich große, abwärts angenommene Exzenterstrecke im nächsten Standpunkt ausgeglichen werden kann. Vorausgesetzt ist dabei eine Konstanz des Neigungsfehlers für die Beobachtungsdauer auf den zwei Standpunkten. Durch die talseitige

Ausrückung beim zweiten Standpunkt wird der Neigungsfehler kompensiert, aber ein neuer, durch die „verkehrte“ Ausrückung vergrößerter Refraktionsfehler entsteht.

Vor der Beseitigung des letzteren Fehlers stellt sich die Frage nach der Länge der Visur im 2. Standpunkt. Bei gleichgeneigtem Gelände soll eine talseitige Ausrückung d möglich sein, ohne bergwärts die Visur im Boden münden zu lassen. Wenn im ersten Standpunkt mit der Visurlänge s_1 , aus der Mitte gerechnet, die zu messende Höhendifferenz voll ausgenützt wird, ist die gestellte Bedingung mit der Annahme

$$s_1 = s_2 + d \quad \dots (15)$$

sicher erfüllt.

Gleichung (15) zeigt

1. die Abhängigkeit von s_1 und s_2 und
2. daß $s_2 \leq s_1$ sein muß.

Der gewählte Zusammenhang ergibt sich schon aus der Anschauung als optimale Lösung.

Die Zunahme des Refraktionsfehlers mit dem Quadrat der Distanz, wie aus dem $\cot^2 \alpha = \left(\frac{2s}{\Delta h}\right)^2$ von Gleichung (12) ersichtlich, im Vergleich zum linearen Anstieg eines Neigungsfehlers birgt die Lösung für die gleichzeitige Ausschaltung beider Fehler. Eine bergseitige Ausrückung d , die den Refraktionsfehler im 1. Standpunkt um ein bestimmtes Maß überkompensiert, kann, bedingt durch die geringere Größe des Refraktionseinflusses wegen der kürzeren Zielweite im 2. Standpunkt, durch eine gleichlange talseitige Ausrückung d ausgeglichen werden.

Der Ansatz lautet dann

$$\Delta R_1 + \Delta R_2 = 0 \quad \dots (16)$$

In diese Bedingung wird Gleichung (14) eingesetzt und es folgt daraus

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c+1} \{ [h_i - (s_1 - d) \cdot \tan \alpha]^{c+1} - [h_i + (s_1 + d) \cdot \tan \alpha]^{c+1} \} - h_i^c (h_{1v} - h_{1r}) + \\ & + \frac{1}{c+1} \{ [h_i - (s_2 + d) \tan \alpha]^{c+1} - [h_i + (s_2 - d) \tan \alpha]^{c+1} \} - h_i^c (h_{2v} - \\ & \quad - h_{2r}) = 0 \end{aligned}$$

Substituiert man für

$$h_r - h_v = 2s \cdot \tan \alpha$$

und faßt die entsprechenden Glieder beider Zeilen zusammen, so wird

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c+1} \{ [h_i - (s_1 - d) \cdot \tan \alpha]^{c+1} - [h_i + (s_1 + d) \cdot \tan \alpha]^{c+1} + [h_i - (s_2 + d) \cdot \\ & \quad \cdot \tan \alpha]^{c+1} - [h_i + (s_2 - d) \cdot \tan \alpha]^{c+1} + h_i^c \cdot \tan \alpha \cdot (2s_1 + 2s_2) \} = 0 \end{aligned}$$

Weitere Vereinfachungen ergeben sich durch die Einführung von $\tan \alpha = \frac{\Delta h_1}{2s_1}$

und Multiplikation der Gleichung mit $\frac{c+1}{h_i^{c+1}}$:

$$\left[1 - \frac{(s_1 - d) \cdot \Delta h_1}{2s_1 \cdot h_i}\right]^{c+1} - \left[1 + \frac{(s_1 + d) \cdot \Delta h_1}{2s_1 \cdot h_i}\right]^{c+1} + \left[1 - \frac{(s_2 + d) \cdot \Delta h_1}{2s_1 \cdot h_i}\right]^{c+1} - \\ - \left[1 + \frac{(s_2 - d) \cdot \Delta h_1}{2s_1 \cdot h_i}\right]^{c+1} + \frac{c+1}{h_i} \cdot \frac{\Delta h_1}{2s_1} (2s_1 + 2s_2) = 0$$

Von den zwei hier noch aufscheinenden Unbekannten d und s_2 soll mit Gleichung (15) die Ausrückung d eliminiert werden. Es bleibt

$$\left[1 - \frac{s_2 \cdot \Delta h_1}{2s_1 \cdot h_i}\right]^{c+1} - \left[1 + \frac{(2s_1 - s_2) \cdot \Delta h_1}{2s_1 \cdot h_i}\right]^{c+1} + \left[1 - \frac{s_1 \cdot \Delta h_1}{2s_1 \cdot h_i}\right]^{c+1} - \\ - \left[1 + \frac{(2s_2 - s_1) \cdot \Delta h_1}{2s_1 \cdot h_i}\right]^{c+1} + \frac{c+1}{h_i} \cdot \frac{\Delta h_1}{2s_1} (2s_1 + 2s_2) = 0$$

und bei Einführung einer neuen Unbekannten, dem Verhältnis der Zielweiten $\frac{s_2}{s_1} = x$

sowie

$$h_i = \text{const} = 3/2 m:$$

$$\left[1 + \frac{\Delta h_1}{3} \cdot x\right]^{c+1} - \left[1 + \frac{\Delta h_1}{3} (2 - x)\right]^{c+1} + \left[1 - \frac{\Delta h_1}{3}\right]^{c+1} - \\ - \left[1 + \frac{\Delta h_1}{3} (2x - 1)\right]^{c+1} + (c+1) \frac{2\Delta h_1}{3} (1+x) = 0 \quad \dots (17)$$

eine als endgültig zu betrachtende Form, die zur Auflösung nach x als Binomialreihe entwickelt werden kann.

5. Konvergenzbereich- und Genauigkeitsabschätzung für die Binomialreihenentwicklung

Den Konvergenzbereich der Reihenentwicklung einer Summenfunktion gibt das Glied mit dem kleinsten Konvergenzradius an. Für Gleichung (17) wird das, weil $0 < x < 1$ ist, das Glied mit der größten Unbekannten, nämlich

$$\left[1 + \frac{\Delta h_1}{2h_i} (2 - x)\right]^{c+1} \text{ sein.}$$

Eine Binomialreihe $(1 \pm X)^m$ ist immer konvergent wenn $|X| < 1$, hier also

$$\left|(2 - x) \frac{\Delta h_1}{2h_i}\right| < 1.$$

Somit muß $\Delta h_1 < \frac{2h_i}{2-x}$ und für $h_i = 3/2$ demnach $\Delta h_1 < \frac{3}{2-x}$ im Bereich $0 < x < 1$ sein.

Aus praktischen Gründen wird man den Bereich für x wohl nie $< 1/2$ werden lassen. Wie aus dem Zusammenhang

$s_1 = s_2 + d$ hervorgeht, würde nämlich mit

$$\frac{s_2}{s_1} < \frac{1}{2} \rightarrow s_2 < \frac{s_1}{2} \rightarrow d > \frac{s_1}{2}$$

maximalen Zielweite $s_1 = 40$ m eine Unsicherheit von ± 4 cm. Ein Maß für den Einfluß einer Änderung Δx auf den Funktionswert $\mathfrak{F}(x_0)$ und umgekehrt erhält man durch partielle Differentiation der Gleichung (17) nach x an einer Stelle x_0 :

$$\mathfrak{F}'(x_0) = (c + 1) \left\{ \left[1 - \frac{\Delta h_1}{3} \cdot x_0 \right]^c \cdot \left(-\frac{\Delta h_1}{3} \right) + \left[1 + \frac{\Delta h_1}{3} (2 - x_0) \right]^c \cdot \frac{\Delta h_1}{3} - \left[1 + \frac{\Delta h_1}{3} (2x_0 - 1) \right]^c \cdot \frac{2\Delta h_1}{3} + \frac{2\Delta h_1}{3} \right\} \cdot dx$$

zusammengefaßt und für $dx \rightarrow \Delta x$ wird

$$\mathfrak{F}'(x_0) = \frac{(c + 1) \cdot \Delta h_1}{3} \cdot \left\{ - \left[1 - \frac{\Delta h_1}{3} \cdot \Delta x_0 \right]^c + \left[1 + \frac{\Delta h_1}{3} (2 - x_0) \right]^c - \left[1 + \frac{\Delta h_1}{3} (2x_0 - 1) \right]^c \cdot 2 + 2 \right\} \cdot \Delta x \quad \dots (19)$$

Den größten Wert wird diese Ableitung für die maximal zulässige Höhendifferenz und Zielweite haben, da der Refraktionseinfluß mit dem Quadrat der Zielweite und näherungsweise proportional der Höhe zunimmt.

Um $\mathfrak{F}'(x_0)$ anschaulich zu machen, muß der früher wegen der konstant angenommenen Geländeneigung und Witterungsverhältnisse weggekürzte Faktor

$$\cot^2 \alpha \cdot f(t, B) \cdot b$$

wieder eingeführt werden und ergibt, multipliziert mit $\mathfrak{F}'(x_0)$ einen Restfehler des auszuschaltenden Refraktionseinflusses.

Die Untersuchung wird nach dem Voranstehenden für $x_0 = \frac{1}{2} \rightarrow \Delta h_1 \approx 1,8$ m und $s_1 = 40$ m durchgeführt. Da die äußerste Grenze einer guten Pointierungsmöglichkeit der Lattenlesungen im Präzisionsnivellement bei 60 m Zielweite angenommen werden kann und die Rückvisur im 1. Standpunkt für $s_1 = 40$ m bei $x = \frac{1}{2}$ diesen Wert erreicht, sollte s_1 niemals > 40 m gewählt werden.

Mit den bisherigen Annahmen kann $\mathfrak{F}'(x_0)$ und $\cot^2 \alpha = \frac{2 s_1}{(\Delta h_1)}$ gerechnet werden; $f(t, B)$ ist ausreichend genau mit 10^{-6} eingeführt. Übrig bleibt der Faktor b aus der Temperatur-Höhenfunktion

$$t = a + b \cdot h^c$$

Die Abnahme der Temperatur mit der Höhe wird von b vermittelt und ist während der Messung eines Doppelstandpunktes konstant angenommen. Als eine mittlere, wahrscheinliche Temperaturschichtung, die auch in der Folgearbeit für die allgemeine Fehlerbetrachtung benützt wird, hat Reißmann für seine Fehlerabschätzungen den Messungen von Kukkamäki folgende Werte entnommen:

Höhe über dem Boden	$\Delta t^\circ \text{C}$
0,33 m	
1,00 m - 0,35°
3,00 m - 0,28°

Diese Verteilung führt auf die Parameterwerte

$$c = -0,2 \quad \text{wie vorausgesetzt und} \\ b = +3,5.$$

Damit wird unter Verwendung von Gleichung (19)

$$\mathfrak{F}'(x_0) = 0,092 \cdot \Delta x$$

$$\text{und bei } \Delta x = 10^{-3} \quad \rightarrow \quad \mathfrak{F}'(x_0) = 9,2 \cdot 10^{-5};$$

Daraus resultiert ein mittlerer Refraktionsrestfehler, zur Veranschaulichung in Längeneinheiten multipliziert mit

$$\cot^2 \alpha \cdot f(t, B) \cdot b = \left(\frac{2s_1}{\Delta h_1} \right)^2 \cdot f(t, B) \cdot b = \frac{80^2}{1,8^2} \cdot 10^{-6} \cdot 3,5 = 7 \cdot 10^{-3}$$

von

$$\mathfrak{R}_{\Delta R} = 9,2 \cdot 7 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 64 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 0,00064 \text{ mm}$$

Diese Größenordnung liegt beträchtlich unter der anderer zu erwartender Fehlereinwirkungen (z. B. der Justierungsrestfehler und der Pointierungsfehler) und kann daher vernachlässigt werden.

Die Genauigkeit der Reihenapproximation muß also, auch noch bei $x_0 = \frac{1}{2}$, für die Summe der aus Gleichung (18) errechneten Restglieder

$$\sum \mathfrak{R}_n < 10^{-4}$$

sein. Diese ergibt sich, wegen der schlechten Konvergenz des Gliedes

$$\left[1 + \frac{\Delta h_1}{3}(2 - x) \right]^{c+1}$$

aus der Gleichung (17), erst bei $n = 15$, wenn $\Theta = 0$ in die

Restgliedsabschätzung eingeführt wird. Die Restfehler der beiden anderen Glieder sind bei einer Entwicklung bis zur 15. Ordnung $< 10^{-8}$ und fallen daher nicht ins Gewicht.

Es wird für

$$\Delta h = 1,8 \text{ m, also } x_0 = 0,512 \text{ und } c = -0,2:$$

$$\mathfrak{R}_{n=15} = \binom{m}{n} X^n (1 + \Theta \cdot X)^{m-n} = \binom{c+1}{15} \cdot \left[\frac{\Delta h}{3}(2 - x_0) \right]^{15} = \\ = \binom{0,8}{15} \cdot [0,6 \cdot 1,488]^{15} \approx 10^{-4}$$

6. Die Potenzreihenentwicklung für die Lösungsfunktion (Gleichung [17]) bis zur 15. Ordnung

Zur Auflösung nach der Unbekannten x müssen drei Glieder der Gleichung (17), die Exponentialfunktionen mit festem gebrochenen Exponenten sind, in eine Potenzreihe entwickelt werden. Absichtlich wird auch das einzige konstante Glied wegen einer Kürzungsmöglichkeit und zur Vereinheitlichung des formalen Aufbaues des Resultatpolynoms mitentwickelt. Wie schon bei der Aufstellung von Gleichung (17) dargelegt, läßt sich die Potenzreihenentwicklung nach einigen erfolgten Umformungen als Binomialreihe darstellen.

Allgemein hat sie die Form

$$\alpha^{e+1} - \beta^{e+1} + \gamma^{e+1} - \delta^{e+1} + (c+1) \frac{2\Delta h}{3} (1+x) = 0$$

wobei die Glieder α , β , γ und δ alle die Form

$(1 \pm X)^m$ haben und in die Binomialreihe

$$\sum_{n=d}^{15} \binom{m}{n} X^n + \mathfrak{R}_n = 0 \quad \text{entwickelt werden sollen.}$$

Zur besseren Übersicht seien die Ableitungsstufen der Glieder α bis δ untereinander geschrieben.

$$(c+1) \frac{2\Delta h}{3} (1+x) + \left\{ \begin{array}{l} + \left[1 - \frac{\Delta h}{3} x \right]^{e+1} \\ - \left[1 + \frac{\Delta h}{3} (2-x) \right]^{e+1} \\ + \left[1 - \frac{\Delta h}{3} \right]^{e+1} \\ - \left[1 + \frac{\Delta h}{3} (2x-1) \right]^{e+1} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + 1 - (c+1) \frac{\Delta h}{3} \cdot x \quad + \frac{c(c+1)}{2} \cdot \frac{\Delta h^2}{3^2} \cdot x^2 - \\ - 1 - (c+1) \frac{\Delta h}{3} \cdot (2-x) - \frac{c(c+1)}{2} \cdot \frac{\Delta h^2}{3^2} \cdot (2-x)^2 - \\ + 1 - (c+1) \frac{\Delta h}{3} \quad + \frac{c(c+1)}{2} \cdot \frac{\Delta h^2}{3^2} - \\ - 1 - (c+1) \cdot \underbrace{\frac{\Delta h}{3} (2x+1)}_{A^*} - \underbrace{\frac{c(c+1)}{2} \cdot \frac{\Delta h^2}{3^2}}_{B^*} \cdot (2x-1)^2 - \end{array} \right.$$

$$- \left. \begin{array}{l} \frac{c(c+1)(c-1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta h^3}{3^3} \cdot x^3 \quad + \dots + O^* \cdot x^{14} \quad - P^* \cdot x^{15} \\ \frac{c(c+1)(c-1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta h^3}{3^3} \cdot (2-x)^3 - \dots - O^* \cdot (2-x)^{14} - P^* \cdot (2-x)^{15} \\ \frac{c(c+1)(c-1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta h^3}{3^3} \cdot \quad + \dots + O^* \quad - P^* \\ \frac{c(c+1)(c-1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta h^3}{3^3} \cdot (2x-1)^3 - \dots - O^* \cdot (2x-1)^{14} - P^* \cdot (2x-1)^{15} \end{array} \right\} +$$

$$\underbrace{\quad}_{C^*}$$

$$+ (c+1) \frac{2\Delta h}{3} (1+x) = 0$$

Die Koeffizienten der einzelnen Ableitungsstufen sind für jedes Glied gleich und fortlaufend mit A^* , B^* ... bis P^* bezeichnet. Summiert man alle vier Glieder

Tabelle 2

KOEFFIZIENTENSPIEGEL

für die Potenzreihe von Gleichung (17) bis zur 15. Ordnung

$$F(x) = g_0(\Delta h) + g_1(\Delta h)x + g_2(\Delta h)x^2 + g_3(\Delta h)x^3 + g_4(\Delta h)x^4 + g_5(\Delta h)x^5 + g_6(\Delta h)x^6 + g_7(\Delta h)x^7 + g_8(\Delta h)x^8 + g_9(\Delta h)x^9 + g_{10}(\Delta h)x^{10} + g_{11}(\Delta h)x^{11} + g_{12}(\Delta h)x^{12} + g_{13}(\Delta h)x^{13} + g_{14}(\Delta h)x^{14} + g_{15}(\Delta h)x^{15}$$

	$g_0(\Delta h)$	$g_1(\Delta h)$	$g_2(\Delta h)$	$g_3(\Delta h)$	$g_4(\Delta h)$	$g_5 h(\Delta)$	$g_6(\Delta h)$	$g_7(\Delta h)$
.	+ 2,000000	- 4,000000	+ 2,000000
Δh	- 0,533333	+ 0,400000	+ 0,400000	- 0,533333
Δh^2	+ 0,195556	- 0,488889	+ 0,586667	- 0,488889	+ 0,195556	.	.	.
Δh^3	- 0,083437	+ 0,182519	- 0,104296	+ 0,104296	+ 0,182519	- 0,083437	.	.
Δh^4	+ 0,038937	- 0,124113	+ 0,182519	- 0,194686	+ 0,182519	- 0,124113	+ 0,038937	.
Δh^5	- 0,019340	+ 0,065573	- 0,088841	+ 0,042305	+ 0,042305	- 0,088841	+ 0,065573	- 0,019340
Δh^6	+ 0,009963	- 0,040475	+ 0,074100	- 0,087176	+ 0,087176	- 0,087176	+ 0,074100	- 0,040475
Δh^7	- 0,005314	+ 0,023724	- 0,046328	+ 0,048819	- 0,020922	- 0,020922	+ 0,048819	- 0,046328
Δh^8	+ 0,002905	- 0,014581	+ 0,033189	- 0,046295	+ 0,047656	- 0,045750	+ 0,047656	- 0,046295
Δh^9	- 0,001626	+ 0,008925	- 0,022096	+ 0,032361	- 0,029229	+ 0,011692	+ 0,011692	- 0,029229
Δh^{10}	+ 0,000918	- 0,005512	+ 0,015203	- 0,025634	+ 0,030169	- 0,028376	+ 0,028376	- 0,028376
Δh^{11}	- 0,000527	+ 0,003425	- 0,010259	+ 0,018698	- 0,022820	+ 0,018551	- 0,007067	- 0,007067
Δh^{12}	+ 0,000306	- 0,002144	+ 0,006974	- 0,013988	+ 0,019459	- 0,020357	+ 0,017962	- 0,016422
Δh^{13}	- 0,000180	+ 0,001347	- 0,004714	+ 0,010198	- 0,015208	+ 0,016333	- 0,012294	+ 0,004516

Tabelle 2

K O E F F I Z I E N T E N S P I E G E L

für die Potenzreihe von Gleichung (17) bis zur 15. Ordnung

$$F(x) = g_0(\Delta h) + g_1(\Delta h)x + g_2(\Delta h)x^2 + g_3(\Delta h)x^3 + g_4(\Delta h)x^4 + g_5(\Delta h)x^5 + g_6(\Delta h)x^6 + g_7(\Delta h)x^7 + g_8(\Delta h)x^8 + g_9(\Delta h)x^9 + g_{10}(\Delta h)x^{10} + g_{11}(\Delta h)x^{11} + g_{12}(\Delta h)x^{12} + g_{13}(\Delta h)x^{13} + g_{14}(\Delta h)x^{14} + g_{15}(\Delta h)x^{15}$$

	$g_8(\Delta h)$	$g_9(\Delta h)$	$g_{10}(\Delta h)$	$g_{11}(\Delta h)$	$g_{12}(\Delta h)$	$g_{13}(\Delta h)$	$g_{14}(\Delta h)$	$g_{15}(\Delta h)$
.
Δh
Δh^2
Δh^3
Δh^4
Δh^5
Δh^6	+ 0,009963
Δh^7	+ 0,023724	- 0,005314
Δh^8	+ 0,033189	- 0,014581	+ 0,002905
Δh^9	+ 0,032361	- 0,022096	+ 0,008925	- 0,001626
Δh^{10}	+ 0,030169	- 0,025634	+ 0,015203	- 0,005512	+ 0,000918	.	.	.
Δh^{11}	+ 0,018551	- 0,022820	+ 0,018698	- 0,010259	+ 0,003425	- 0,000527	.	.
Δh^{12}	+ 0,017962	- 0,020357	+ 0,019459	- 0,013988	+ 0,006974	- 0,002144	+ 0,000306	.
Δh^{13}	+ 0,004516	- 0,012294	+ 0,016333	- 0,015208	+ 0,010198	- 0,004714	+ 0,001347	- 0,000180

wie sie untereinander stehen, so ergeben sich verschiedene Kürzungsmöglichkeiten wie oben eingetragen:

die Summe der Absolutglieder ± 1 fällt weg und

$$- A^* (x + 2 - x + 1 + 2x - 1) = - 2 A^* (1 + x) = - (c + 1) \frac{2\Delta h}{3} (1 + x)$$

kürzt sich gegen das letzte Glied der Gleichung.

Weiter können alle Koeffizienten C^* , D^* ... bis P^* durch B^* dividiert werden und sollen fernerhin C , D ... P ohne Stern benannt sein.

Demnach lautet das Entwicklungspolynom:

$$\begin{aligned} & \{x^2 - (2-x)^2 + 1 - (2x-1)^2\} - \\ & - C \{x^3 - (2-x)^3 + 1 + (2x-1)^3\} + \\ & + D \{x^4 - (2-x)^4 + 1 - (2x-1)^4\} - \\ & - E \{x^5 + (2-x)^5 + 1 + (2x-1)^5\} + \\ & \dots\dots\dots \\ & + O \{x^{14} - (2-x)^{14} + 1 - (2x-1)^{14}\} - \\ & - P \{x^{15} + (2-x)^{15} + 1 + (2x-1)^{15}\} = 0 \end{aligned}$$

Nach Berechnung und Ordnung der geschwungenen Klammerausdrücke und deren Multiplikation mit den numerisch ermittelten Koeffizienten C , D ... P , ergeben sich bei neuerlicher Ordnung nach Potenzen in x für die Koeffizienten von x Polynome in Δh .

Endgültig ist die Gleichung in der Tabelle 2 so zusammengestellt, daß die Koeffizienten von x in Spalten erscheinen, deren Zeilen die Koeffizienten der Polynome in Δh , geordnet nach Potenzen angeben.

Die Auswertung der umfangreichen Gleichung erfolgte im Bereich $\Delta h = 2$ cm bis $\Delta h = 180$ cm für alle cm-Werte nach dem Horner'schen Schema mit Hilfe der Elektronenrechenanlage am Mathematischen Labor der Technischen Hochschule Wien.

Als Ergebnis sind die Verhältniszahlen $\frac{s_2}{s_1} = x$ in Tabelle 3 zusammengestellt.

Bei der Anwendung des beschriebenen Verfahrens ist noch auf die Elimination von zwei systematischen Fehlern zu achten, die beim Nivellement aus der Mitte wegfallen.

a) Der Einfluß der Erdkrümmung

kann nachträglich aus den bekannten Längen s_1 , s_2 und d sowie dem Zusammenhang $s_1 = s_2 + d$ aus

$$\Delta h_{Erd} = \frac{-(s_1 + d)^2 + (s_1 - d)^2 - (s_2 - d)^2 + (s_2 + d)^2}{2R} = - \frac{2d^2}{R}$$

errechnet werden.

b) Die Veränderlichkeit der Zielachse beim Umfokussieren ist für jedes verwendende Nivellierinstrument durch Testmessungen festzustellen.

Tabelle 3

x -Werte von $\Delta h = 2$ cm bis 180 cm für $c = -0,2$

Δh cm	$x = \frac{s_2}{s_1}$	Δh cm	$x = \frac{s_2}{s_1}$	Δh cm	$x = \frac{s_2}{s_1}$
		16	0,864	40	0,786
2	0,950	17	0,860	50	0,761
3	0,939	18	0,856	60	0,738
4	0,930	19	0,852	70	0,716
5	0,922	20	0,848	80	0,695
6	0,915	21	0,844	90	0,675
7	0,908	22	0,841	100	0,656
8	0,902	23	0,837	110	0,638
9	0,897	24	0,834	120	0,619
10	0,891	25	0,831	130	0,601
11	0,886	26	0,827	140	0,583
12	0,881	27	0,824	150	0,565
13	0,877	28	0,821	160	0,548
14	0,872	29	0,818	170	0,530
15	0,868	30	0,815	180	0,512

Literatur:

- [1] *Behrendt*: Ein Beitrag zur Refraktion im Nivellement. Dissertation München 1958.
 [2] *Brocks*: Die Lichtstrahlkrümmung in Bodennähe. Deutsche Hydrographische Zeitschrift 1950.
 [3] *Geiger*: Das Klima der bodennahen Luftschichten. Braunschweig 1950.
 [4] *Jordan-Eggert-Kneißl*: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III, Stuttgart 1956.
 [5] *Kneißl*: Nachweis systematischer Fehler beim Feinnivellement. — Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Neue Folge, Heft 68, 1955.
 [6] *Krötzel*: Probleme der Ziellinienstabilisierung durch ein astasiertes Pendel. „Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie“, Jg. 1963, Heft 2, 3 und 4.
 [7] *Kukkamäki*: Über die Nivellitische Refraktion. Veröff. d. Finn. Geod. Inst. Nr. 25, Helsinki 1938.
 [8] *Kukkamäki*: Formeln und Tabellen zur Berechnung der Nivellitischen Refraktion. Veröff. d. Finn. Geod. Inst. Nr. 27, Helsinki 1939.
 [9] *Reißmann*: Untersuchungen zur Ausschaltung des Einflusses der Vertikalrefraktion beim Präzisionsnivellement. VEB. Verlag Technik, Berlin 1954.

Das Grundsteuergesetz 1955 und Bewertungsgesetz 1955

Von *Leopold Krepper*

(Schluß)

II. Das Grundvermögen

Zum Grundvermögen zählt jener Grund und Boden, einschließlich Gebäude, der nicht zum land- und forstwirtschaftlichen Vermögen und nicht zu den Betriebsgrundstücken (siehe Kapitel „Betriebsvermögen“) gehört. Allerdings sind dem Grundvermögen jene land- und forstwirtschaftlichen Grundstückflächen zuzurechnen, von denen angenommen werden kann, daß sie in absehbarer Zeit als Bauland, Industrie-