

Paper-ID: VGI_196501



Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg

Wilhelm Embacher ¹

¹ *Technische Hochschule, Wien IV, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **53** (1, 2), S. 1–13, 45–53

1965

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Embacher_VGI_196501,  
  Title = {Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg},  
  Author = {Embacher, Wilhelm},  
  Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
  Pages = {1--13, 45--53},  
  Number = {1, 2},  
  Year = {1965},  
  Volume = {53}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 1

Baden bei Wien, Ende Februar 1965

53. Jg.

Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg*)

Von *Wilhelm Embacher*, Wien

(Diese Arbeit wurde im Rahmen des Institutes für Höhere Geodäsie und Sphärische Astronomie unter dem Lehrkanzelvorstand o. Prof. *Dr. phil. Dr. techn. h. c. Karl Ledersteger* durchgeführt.)

Für den einzelnen anziehenden Massenpunkt gilt

$$V = \frac{m}{r} \quad \dots (1)$$

Die Niveauflächen $r = \text{const}$ sind konzentrische Kugeln, die Kraftlinien sind die Kugelradien, wenn man vollkommene Gleichartigkeit des Raumes voraussetzt.

Die Gleichung der Schar der Niveauflächen des irdischen Schwerfeldes lautet

$$W(x y z) = \text{const.} \quad \dots (2)$$

Die Schwerkraft steht überall senkrecht zur Niveaufläche. Sie hat in jedem Punkt eine bestimmte Größe und Richtung. Die orthogonalen Trajektorien der Schar der Niveauflächen bezeichnet man als Lotlinien. Die Tangente an die Lotlinie in einem Punkt ergibt die Lotrichtung.

Bekanntlich sind die Niveauflächen der Erde nicht parallel, denn es gilt

$$g dh = \text{const.} \quad \dots (3)$$

Ersetzen wir die Niveauflächen durch Rotations-Niveausphäroide, so sehen wir, daß diese gegen den Pol konvergieren (Abb. 1).

Daher sind die theoretischen Lotlinien gegen den Äquator konvex gekrümmte Kurven. Wir erhalten für die theoretische (normale) Lotkrümmungsreduktion

$$\Delta\bar{\varphi}'' = - 0''000171 \sin 2\varphi H_m \quad \dots (4)$$

*) Vortrag gehalten am 22. 11. 1963 von *Dr. W. Embacher* im „Außeninstitut der Technischen Hochschule in Wien im Rahmen des naturwissenschaftlichen Kolloquiums“ mit dem Österreichischen Verein für Vermessungswesen.

Sie erreicht erst für eine Höhe von 5841 m eine Bogensekunde.

Zurückkommend zum Geoid wissen wir, daß dieses aus analytischen Flächenstücken besteht, d. h. daß es gegenüber dem Rotationssphäroid Hebungen und Senkungen aufweist. Als orthogonale Trajektorien der Niveaulächen haben also die Lotlinien außer der normalen Krümmung im Meridian weitere Abweichungen vom theoretischen Verlauf, die wir zum Unterschied von der normalen Lotkrümmung als Lotkrümmung bezeichnen. So schrieb z. B. *Baesclin* vor einigen Jahren in einem Bericht:

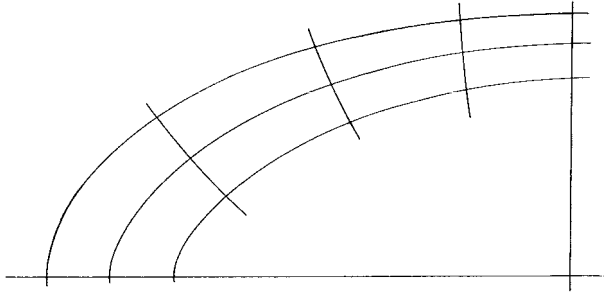


Abb. 1

„Bei näherer Prüfung der Methoden, welche zur Verfeinerung der geodätischen Berechnungen unter Berücksichtigung der Geoidgestalt gemacht worden sind, bin ich zu dem Schluß gelangt, daß mindestens für gebirgige Gebiete keine wirkliche Genauigkeitserhöhung erreicht wird, wegen der Vernachlässigung der Lotlinienkrümmung. Was im jetzigen Moment zur Erhöhung der Genauigkeit von Triangulationen getan werden kann, das ist die Berücksichtigung der Geoidundulationen, um die Basen auf das Berechnungsellipsoid zu reduzieren.“

„Meines Wissens gibt es zur Zeit keine Methode, um die Krümmung der Lotlinien hypothesenfrei zu bestimmen. Ihre Berechnung aus den sichtbaren Massen ist sehr mühsam und liefert nur hypothetische Näherungswerte, weil wir über die Verteilung der Dichte in der Erdkruste sehr schlecht orientiert sind.“

E. Hunziker [1] faßt die Lotkrümmung als Differenz der Lotabweichung im Oberflächenpunkt und im zugehörigen Geoidpunkt auf. Beide Größen werden aus den „sichtbaren Massen“ gerechnet, wobei unter „sichtbarer Masse“ die Erdkruste zwischen der sichtbaren Erdoberfläche und dem Geoid gemeint ist. Die Massen innerhalb einer Horizontalabstand von 2 km werden mit verschiedenen angenommenen Dichten zur Berechnung der Lotabweichungen herangezogen.

F. Gaßmann [2] zeigt zunächst, daß der normale Vertikalgradient bei der Dichtebestimmung auf verfälschte Resultate führen kann. Seine Dichtebestimmung ist ebenfalls auf die Reduktion der sichtbaren Massen aufgebaut. Nur denkt er sich diese aus zwei Teilen bestehend. Der eine Teil ist der homogene Gesteinskörper unmittelbar unter der Meßfläche bis zum Geoid. *Gaßmann* nimmt an, daß das Freiluftfeld im Bereich der Meßfläche einen glatten Verlauf hat, so daß sich seine Vertikalkomponente durch ein harmonisches Polynom $\pi(x, y, z)$ in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z approximieren läßt. Aus überschüssigen Beobachtungen werden die Unbekannten, d. s. die Dichte und die Koeffizienten des Polynoms, durch vermittelnden Ausgleich bestimmt. Der so erhaltene vertikale Freiluftgradient wird

zur Bestimmung des Lotlinienverlaufes bis zum Meeresniveau extrapoliert. So lauten z. B. die Ausdrücke für die Krümmungsanteile der Lotabweichungen in der Tiefe z :

$$\begin{aligned} \text{arc } \psi'(z) &= \left\{ s'(z) - s'(o) + B_0 z + \frac{1}{2} C_1 z^2 + \dots \right\} / \bar{g} \\ \text{arc } \psi''(z) &= \left\{ s''(z) - s''(o) + B_2 z + \frac{1}{2} C_4 z^2 + \dots \right\} / \bar{g} \end{aligned} \quad \dots (5)$$

$s'(z)$, $s''(z)$ und $s'(o)$, $s''(o)$ sind die x - und y -Komponenten der Einflüsse der sichtbaren Massen auf einen Punkt der Lotlinie in der Tiefe z und auf den Oberflächenpunkt. B_0 , C_1 , B_2 , C_4 ... sind die aus dem Meßbereich bestimmten Koeffizienten des Polynoms $\pi(x, y, z)$.

K. Ledersteger [3] führt die Differenz der Meereshöhen zweier Punkte derselben Niveaufläche auf die Differenz der Durchschnittswerte der Schwere in den Lotlinien zurück.

$$\begin{aligned} \bar{g}_k \cdot H_k &= \bar{g}_i H_i, \\ H_k - H_i &\sim - \frac{\bar{g}_k - \bar{g}_i}{\gamma_{45}} \cdot H_i = \varepsilon \Delta s. \end{aligned} \quad \dots (6)$$

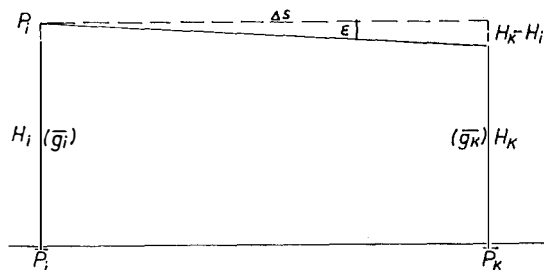


Abb. 2

$$\varepsilon'' = \frac{\rho''}{\gamma_{45}} (\bar{g}_k - \bar{g}_i) \frac{H_i}{\Delta s}. \quad \dots (7)$$

Die Differenz $(\bar{g}_k - \bar{g}_i)$ wird bei *Ledersteger* folgendermaßen gefunden:

Wird die im Oberflächenpunkt P_2 gemessene Schwerebeschleunigung wie in freier Luft auf den Punkt P_{2u} reduziert, so erhält man (Abb. 3)

$$g'_{2u} = g_2 + 0,3086 (H_2 - h_u) \quad \dots (8)$$

σ sei die mittlere Dichte, dann ist

$$g''_{2u} = g_2 + 0,3086 (H_2 - h_u) - 0,0838 (H_2 - h_u), \quad \dots (9)$$

die in freier Luft und mit der doppelten Plattenanziehung auf den Punkt P_{2u} reduzierte Schwerebeschleunigung.

Sind T_2 bzw. T_{2u} die auf den Oberflächenpunkt P_2 und auf den Punkt P_{2u} in der Lotlinie von P_2 wirkenden Topographie-Einflüsse mit der Dichte eins, so ist g'''_{2u} die Schwerebeschleunigung in P_{2u} , wenn g_2 mit Berücksichtigung der Geländeform nach P_{2u} reduziert wird.

$$\begin{aligned} g'''_{2u} &= g_2 + 0,3086 (H + u - h_u) - 0,0838 \sigma (H + n - h_u) + \\ &\quad + \sigma T_2 - \sigma T_{2u}. \end{aligned} \quad \dots (10)$$

Zur Bestimmung des Durchschnittswertes der Schwere muß die Schwerebeschleunigung in Funktion des Geoidabstandes oder des Abstandes von einer Bezugsniveaufläche, hier mit H bezeichnet, untersucht werden. *K. Ledersteger* [3] weist darauf hin, daß durch Einführung der Integrationsgrenzen von O bis H und nicht von O bis $(H + n)$ eine Abweichung in der Definition des Durchschnittswertes der Schwere vorliegt.

$$\bar{g}_2 = \frac{1}{H} \int_0^H g''_{2u} dh_u. \quad \dots (11)$$

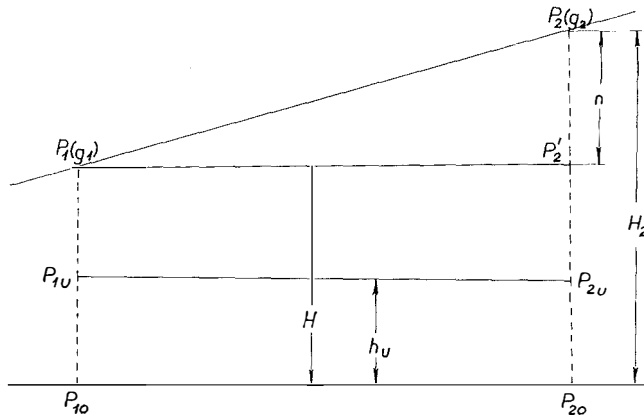


Abb. 3

Auf diese Art, durch Ausführung der Integrale, erhält man die Differenz $(\bar{g}_2 - \bar{g}_1)$ und damit den horizontalen Gradienten des Durchschnittswertes der Schwere in der Lotlinie wie folgt:

$$\begin{aligned} (\bar{g}_2 - \bar{g}_1) &= (g_2 - g_1) + 0,3086 n - 0,0838 \sigma n + \sigma (T_2 - T_1) - \\ &- \frac{\sigma}{H} \left(\int_0^H T_{2u} dh_u - \int_0^H T_{1u} dh_u \right) \quad \dots (12) \end{aligned}$$

Hier begann nun meine Arbeit: Mit Hilfe schon bekannter Reihen drückte ich die beiden Integrale durch einfach zu berechnende Ausdrücke aus und es gelang mir, zu beweisen, daß der horizontale Gradient des Durchschnittswertes der Schwere in benachbarten Lotlinien dem horizontalen Gradienten in halber Seehöhe des Bezugspunktes innerhalb der Gravimetermeßgenauigkeit gleichzusetzen ist.

Der nächste Schritt war nun der, diese Überlegungen durch praktische Messungen zu unterstützen. Im Laufe der Sommermonate 1961 und 62 wurden auf dem Buschberg, einem Punkt der Triangulierung 1. Ordnung, ca. 8 km nordwestlich von Mistelbach, umfangreiche Schweremessungen mit einem Gravimeter der Firma Askania GS 11 durchgeführt. Es wurden dabei etwa 100 Meßpunkte abgesteckt und nivelliert und ein Gelände von ca. 120 ha tachymetrisch erfaßt, um die topographischen Einflüsse auf jeden Punkt im Umkreis von ca. 600 m berechnen zu

können. Wie aus den obigen Formeln ersichtlich ist, mußte der erste Schritt eine genaue Erfassung der Bodendichte sein.

Aus Gravimetermessungsdifferenzen wird mit Hilfe der verfeinerten *Bouguer*-Reduktion eine Fehlergleichung zur Bestimmung der Bodendichte aufgestellt. (Abb. 3)

$$g'_2 = g_2 + 0,3086n - \sigma \cdot 0,0419n + \sigma T_2. \quad \dots (13)$$

σ ist die mittlere Dichte für den Bereich der zur Berechnung der topographischen Reduktion für den Punkt P_2 verwendet wurde, T_2 ist der Topographieeinfluß mit der Dichte eins auf den Punkt P_2 . Für den Punkt P_1 , der sich als tiefster Punkt im Bezugsniveau befinden soll, lautet die reduzierte Schwere

$$g'_1 = g_1 + \sigma T_1 \quad \dots (14)$$

Bezeichnet man den auf 1 m Entfernung reduzierten *Bouguer'schen* Horizontalgradienten mit Δg_{21} und ist s die Punktentfernung, so ist

$$(g'_2 - g'_1) = s_{21} (\Delta g_{21}) = (g_2 - g_1) + 0,3086n - \sigma \cdot 0,0419n + \sigma_{21} (T_2 - T_1) \quad \dots (15)$$

In $(g_2 - g_1)$ ist bereits die Differenz der *Bessel'schen* Reduktion berücksichtigt.

Je nach Vernachlässigung von Unbekannten kann dieser Ansatz in schon bestehende Methoden (*Nettleton, F. Steiner, Parasnis, K. Jung*) übergeführt werden. Auf Grund zahlreicher Gravimetermessungen am Buschberg wurde aus den verschiedenen Ansätzen die Bodendichte berechnet und verglichen [4].

Die Gravimetermessungen erfolgten in den Punkten 1, 2 . . . n der verschiedenen Profile im Hin- und Rückweg, der Gang wurde proportional der Zeit ermittelt. Nachdem der Einfluß der Erdzeiten und der Gang ausgeschaltet worden waren, erfolgte der Ausgleich wie bei einem Höhennetz nach Schleifen. Der mittlere Fehler der Schleifen schwankte zwischen $10 \text{ mgal} \cdot 10^{-3}$ und $15 \text{ mgal} \cdot 10^{-3}$. Die Ermittlung der Topographieeinflüsse wurde in Form von Differenzen: Topographieeinfluß auf den Oberflächenpunkt — Topographieeinfluß auf einen Punkt in der Lotlinie mit Hilfe einer rasch konvergierenden Reihe durchgeführt. Anschließend erfolgte die Berechnung des horizontalen Gradienten in halber Seehöhe sowie die Berechnung des Gradienten, bezogen auf den tiefsten Punkt des Meßfeldes.

Der Ansatz von *K. Ledersteger* [3] und die Erweiterung durch meine Arbeit [5] ermöglichen eine Projektion von Oberflächenpunkten auf das Geoid mit Hilfe sehr flacher Kreisbögen, deren Halbmesser von der hypothetischen mittleren Schwere abgeleitet sind.

Nach *Bruns* [6] gelten die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} g \left(\frac{\cos \alpha}{R} - \frac{\cos \alpha'}{R'} \right) &= -4\pi (k_o - k'_o) \sin \delta \cos \delta \\ g \left(\frac{\sin \alpha}{R} - \frac{\sin \alpha'}{R'} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (16)$$

wobei α und α' Richtungswinkel der Krümmungsradien R und R' beim Durchgang der Lotlinie durch Massen mit der Dichte k_o und k'_o und mit dem Verwerfungswinkel δ sind.

Damit ist die Frage nach dem exakten Verlauf der Lotlinie unter der physischen Erdoberfläche ohne Hypothesen auf das Gebiet der Lagerstättenforschung zurückgeführt. Sollte es einmal möglich sein, genaue Angaben über Dichteänderungen entlang der Lotlinie machen zu können, so ist auch der Verlauf der Lotlinie geklärt.

Aus den bekannten Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{g \cos \alpha}{R} &= W_{xz}, & \frac{g \sin \alpha}{R} &= W_{yz}, \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= W_{xz}, & \frac{\partial g}{\partial y} &= W_{yz}, & \frac{\partial g}{\partial z} &= W_{zz} \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

und

$$\frac{g^2}{R^2} = W_{xz}^2 + W_{yz}^2$$

kann der Horizontalgradient G

$$G = \sqrt{W_{xz}^2 + W_{yz}^2} \dots (18)$$

berechnet werden. g ist die Schwerebeschleunigung, R der Krümmungsradius der Lotlinie im Messungspunkt, W_{xz} , W_{yz} und W_{zz} die entsprechenden Ableitungen von W und α das Azimut der Schmiegeebene. Wie später gezeigt wird, kann G in jedem Geländepunkt gravimetrisch bestimmt werden. Der Krümmungsradius R der Lotlinie im Messungspunkt ist daher

$$R = \frac{g}{G}. \dots (18a)$$

Um ein Bild über den theoretischen Verlauf des Horizontalgradienten zu erhalten, bedienen wir uns einer Formel von *K. Mader* [7] über das unendlich ausgedehnte rechtwinkelige Prisma. Es soll sich in der x -Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken, in der y -Richtung von y_1 bis ∞ und in der z -Richtung von z_1 bis z_2 reichen. Man findet

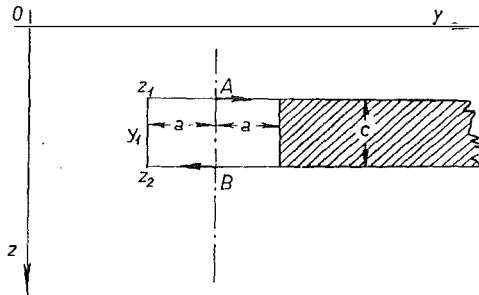


Abb. 4

$$\frac{1}{k^2 \sigma} V_{yz} = \ln \frac{y_1^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_1^2} \dots (19)$$

Obwohl die Formel nur für das Außenpotential gilt, kann damit für jeden Punkt einer Platte, z. B. auch für die Gerade AB , der Horizontalgradient berechnet werden, wenn man bedenkt, daß sich die Wirkung des in der x -Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgedehnten und in der y -Richtung $2a$ breiten Prismas aus Symmetriegründen in der Geraden AB , aufhebt. Man braucht also nur mehr die Wirkung des schraffierten

Restprismas zu berechnen. Wählt man den Punkt A als Aufpunkt, so ist z_1 Null, man erhält für den Horizontalgradienten einen bestimmten positiven Wert. Nimmt man hingegen den Punkt B als Aufpunkt, so wird z_2 Null und man erhält für den Horizontalgradienten wohl dieselbe Größe, doch hat er das entgegengesetzte Vorzeichen.

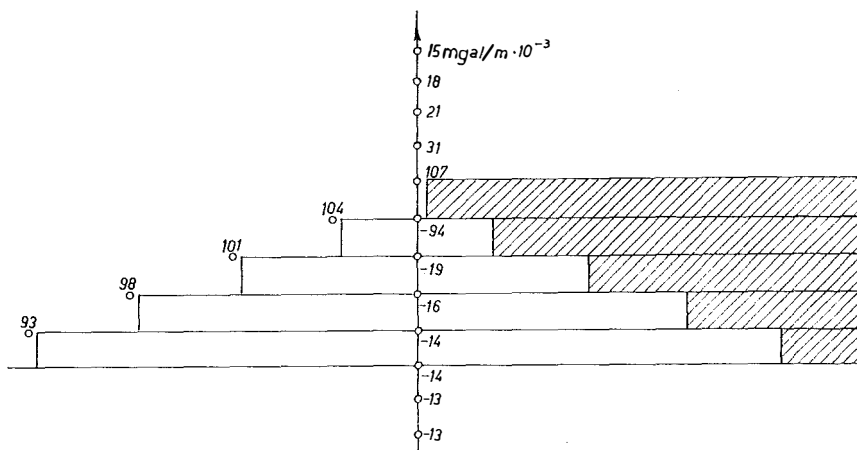


Abb. 5

Ein kleiner, geneigter Vermessungsbereich läßt sich durch ein Treppenmodell, bestehend aus vielen unendlich ausgedehnten viersierseitigen Platten, gut approximieren. An diesen soll der theoretische Verlauf des Horizontalgradienten unterhalb und oberhalb der Platten untersucht werden. Um eine durchschnittliche Steigerung wie beim Buschberg von etwa 22° zu erhalten, seien die Stufen mit 100 m Länge und 40 m Höhe gewählt. Von den fünf wie oben beschrieben aufeinandergelegten Platten wurde nach der oben genannten Formel der Horizontalgradient in der Vertikalen des Punktes I in den Aufpunkten e' bis k ermittelt. Wir sehen, daß dieser innerhalb und außerhalb des Modells eine um 180° verschiedene Richtung hat.

Ausgehend von einer Formel von *Helmert* [8] erhalten wir für die vertikale Komponente der Anziehungskraft:

$$P = 2k^2\sigma \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r' \sin \varphi d\varphi. \quad \dots (20)$$

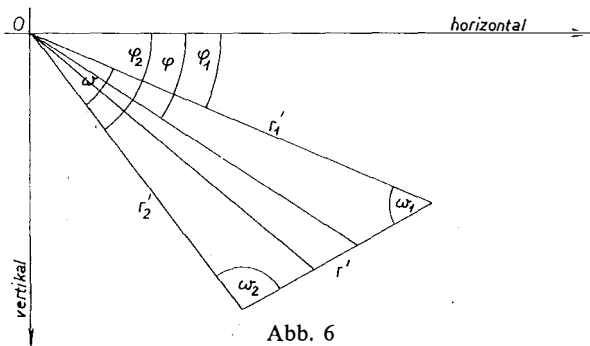


Abb. 6

Daraus wurden zur Berechnung der Vertikalkomponente der Anziehungskräfte P_0 und P'_0 folgende Formeln entwickelt.

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 2 k^2 \sigma \left[(w_0 + w_0') \cos \delta \sin \delta + \sin^2 \delta \ln \frac{r'_3}{r_1} \right] \\ P'_0 &= - 2 k^2 \sigma \left[(\varepsilon_0 + \varepsilon_0') \cos \delta \sin \delta - \sin^2 \delta \ln \frac{r'_3}{r'_1} \right] \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

deren Prinzipskizzen hier angeführt seien.

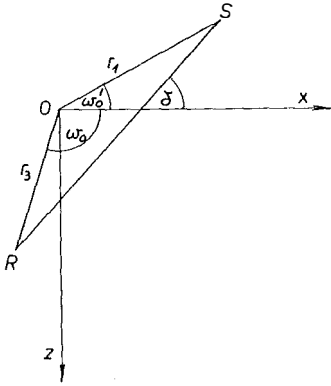


Abb. 7

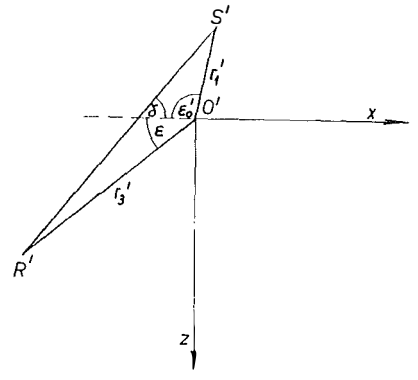


Abb. 8

Damit wurden zahlreiche Modelle in unten angeführter Form berechnet. (siehe Modell I bis IV.)

Aus den berechneten Modellen erkannte man folgende charakteristische Eigenschaften der Gradienten:

1. Sowohl die Horizontal-, wie auch die Vertikalgradienten sind nicht nur von der Hangneigung, sondern auch vom Geländequerschnitt abhängig.

2. Der äußere Vertikalgradient geht zwischen R und S durch Null. Die Höhe der Nullstelle ist abermals von der Hangneigung und vom Geländequerschnitt abhängig.

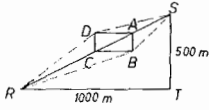
3. Die Differenzen der äußeren und inneren Gradienten bestätigen empirisch die Formeln von *Bruns* [6]

$$\left. \begin{aligned} V_i - V_a &= - 4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta, \\ H_i - H_a &= - 4\pi k^2 \sigma \cos \delta \sin \delta. \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

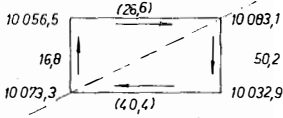
4. Die Horizontalgradienten haben stets entgegengesetztes Vorzeichen und sind etwa vom gleichen Absolutbetrag. Immer ist der äußere Horizontalgradient zum Hang gerichtet.

H. Bodemüller [9] hat mit Hilfe von Turmmessungen zahlreiche äußere Vertikalgradienten ermittelt. Die Übereinstimmung oben angeführter theoretischer Modelle mit diesen praktischen Messungen ist unverkennbar. In Talböden verkleinert der negative Störgradient den Freiluftgradienten, während der positive Störgradient am Hang oben den Freiluftgradienten vergrößert.

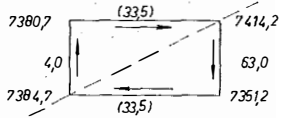
MODELL I



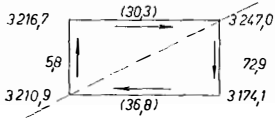
$h=375\text{ m}$



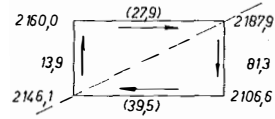
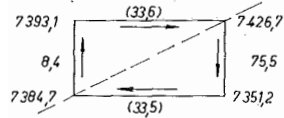
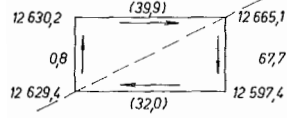
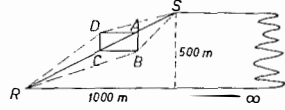
$h=250\text{ m}$



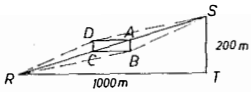
$h=125\text{ m}$



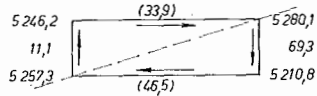
MODELL II



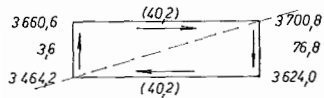
MODELL III



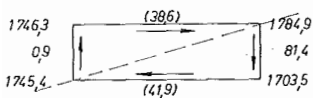
$h=150\text{ m}$



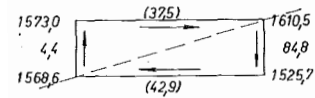
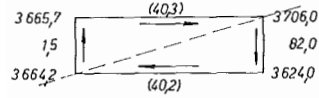
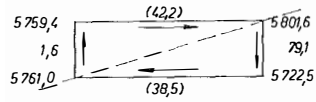
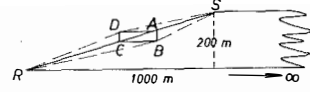
$h=100\text{ m}$



$h=50\text{ m}$



MODELL IV



Die mit dem Gravimeter in der Fallinie des Geländes gemessenen Schweredifferenzen Δg lassen sich wie folgt aus den Gradienten darstellen (n sei der Höhenunterschied der Meßpunkte und $s = n \cdot \cot \delta$ deren Horizontalabstand):

$$\left. \begin{aligned} \Delta g &= -n V_a + s H_a, \\ \Delta g &= -n V_i + s H_i. \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

Zusammen mit den *Brun'schen* Formeln (22) liegen also drei unabhängige Gleichungen mit 5 Unbekannten vor. Die Auflösung ist daher grundsätzlich nur möglich, wenn der äußere Vertikalgradient V_a und die Bodendichte an der Oberfläche gemessen werden und der Geländewinkel δ sowie die Stellung der Tangentialebene bekannt sind. Hingegen ist die Lösung von den sonstigen topographischen Verhältnissen unabhängig.

Nimmt man mit großer Berechtigung an, daß die Dichte innerhalb einer beschränkten Umgebung der Station P_0 konstant ist und bildet die Schweredifferenzen zwischen P_0 und den Punkten P_i rings um P_0 in möglichst äquidistanten Azimuten α , so nehmen die Gleichungen (23) die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \Delta g + n V_a - s (H_a)_x \cos \alpha - s (H_a)_y \sin \alpha &= 0 \\ \Delta g + n V_i - s (H_i)_x \cos \alpha - s (H_i)_y \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

Es folgt:

$$\Delta g + n \left(\frac{V_a + V_i}{2} \right) - s \left(\frac{H_a + H_i}{2} \right)_x \cos \alpha - s \left(\frac{H_a + H_i}{2} \right)_y \sin \alpha = 0 \dots (25)$$

Die zwei Unbekannten $\left(\frac{V_a + V_i}{2} \right)$ und $\left(\frac{H_a + H_i}{2} \right)$ bezogen auf den Ausgangspunkt P_0 erhält man aus zwei Messungsdifferenzen oder bei Überbestimmung durch die Ausgleichung.

Wird V_a gemessen, so liefert Gleichung (23) unmittelbar H_a und man erhält aus den ausgeglichenen Gradientenmittelwerten die inneren Gradienten V_i und H_i und schließlich aus den *Brun'schen* Formeln (22) zweimal unabhängig die Bodendichte σ , womit demnach eine willkommene Kontrolle vorliegt.

Es ergab sich also die Notwendigkeit, den äußeren Vertikalgradienten zu messen.

Schon im Jahre 1952 unternahm ich einen theoretischen Versuch, mit Hilfe des von mir vorgeschlagenen Elektronengravimeters den Vertikalgradienten zu messen [10]. Leider blieb es nur beim Vorschlag, denn die Ausführung, wenn eine solche überhaupt möglich gewesen wäre, wäre viel zu teuer gekommen.

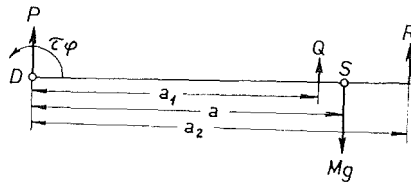


Abb. 9

Dafür war mein zweiter Versuch, den äußeren Vertikalgradienten in einem Punkt zu messen, wesentlich einfacher. Mit Hilfe der schematischen Darstellung

in Abb. 9 will ich kurz das Meßprinzip des Gravimeters GS 11 erläutern: Die Änderung der Nullage des Hebelarmes wird registriert, u. zw. durch die Längenänderung einer Meßfeder. S sei der Gesamtschwerpunkt und M die Gesamtmasse. Im Drehpunkt D wirkt das Drehmoment der Hauptfeder $\tau\varphi$ und die Federkraft P , (die zu dem Punkt gerichtet ist, in dem der Drehpunkt eines gewichtslosen Gehänges sitzen würde). Im Schwerpunkt S greift die Schwerkraft Mg an mit M als Gesamtmasse des Gehänges und mit g als Schwerebeschleunigung. In der Entfernung a_1 von D greift die Meßfeder mit der Kraft Q an; die Kraft R der Meßbereichsfeder wirkt im Abstand a_2 von D nach oben. Im Gleichgewichtsfall ist die Summe der resultierenden Kräfte

$$Mg - P - Q - R = 0 \quad \dots (26a)$$

und die Summe der Drehmomente

$$-\tau\varphi + Mga - Qa_1 - Ra_2 = 0. \quad \dots (26b)$$

Wird das Instrument um einen kleinen Winkel α gekippt, so geht die Gleichung (26b) über in

$$g \cos \alpha = \frac{\tau\varphi + \bar{Q}a_1 + Ra_2}{Ma} \quad \dots (27)$$

Ändert sich die Schwerkraft innerhalb des Gravimetersystems linear, so liefert die Taylor-Entwicklung in Richtung der positiven z -Achse:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial z} &= g + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_0 z, \\ \text{in Richtung der positiven } x\text{-Achse} \\ \frac{\partial W}{\partial x} &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}\right)_0 z, \\ \text{und in Richtung der positiven } y\text{-Achse} \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y}\right)_0 z. \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

Wird das Instrument bei ein spielendem Galvanometer um einen kleinen Winkel α einmal nach unten (Stellung 1), das zweitemal nach oben (Stellung 2) gekippt, so ist der Winkel, den der Hebelarm zwischen diesen Stellungen und der Nullage einnimmt, ebenfalls α .

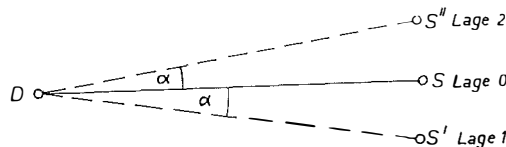


Abb. 10

In der Nullage repräsentiert der Balken DS die x -Achse. Die erste Gleichung der Formelgruppe (28)

geht daher für den Punkt über in

$$\frac{\partial W}{\partial z} = g + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right)_0 a. \quad \dots (28a)$$

$$\begin{array}{ll} \text{In Lage 1 ist } x' = a \cdot \cos \alpha & \text{und in Lage 2 ist } x'' = a \cdot \cos \alpha \\ y' = 0 & y'' = 0 \\ z' = a \cdot \sin \alpha & z'' = -a \cdot \sin \alpha \end{array}$$

Die Ableitung der Kräftefunktion nach z ist daher

$$\text{in Lage 1: } \frac{\partial W}{\partial z} = g + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right)_0 a \cos \alpha + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) a \sin \alpha, \quad \dots (28b)$$

$$\text{in Lage 2: } \frac{\partial W}{\partial z} = g + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right)_0 a \cos \alpha - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) a \sin \alpha. \quad \dots (28c)$$

Wird das Drehmoment um den Pol in der Lage 0, 1 und 2 gebildet und werden die entsprechenden Lesungen L_0 , L_1 und L_2 eingeführt, so erhält man für W_{zz} schließlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{L_1 - L_2}{1000 a \sin 2\alpha}, \quad \dots (29)$$

aus der Differenz der weiter entwickelten Gleichung (28b) und (28c).

Werden die Messungen in Funktion der Gravimeterkipfung festgehalten, entstehen zwei parabelähnliche Äste, welche zum Scheitelpunkt nicht symmetrisch sind. Die Unsymmetrie der Parabeläste ist ein Maß für die Größe W_{zz} . Rechnerisch erhält man diese Größe durch approximieren der Parabeläste durch je ein Ausgleichspolynom.

Das Resultat gab einen mittleren Fehler von 0,043 mgal/m. Ein Fehler, der zweifellos für die Erfassung des Vertikalgradienten zu groß ist.

Vielleicht könnte man durch einen zweckentsprechenden Umbau oder Neubau eines Gravimeters eine wesentliche Erhöhung der Genauigkeit erzielen.

Da zur Bestimmung sämtlicher Gradienten neben dem Vertikalgradienten V_a auch die Messungsdifferenzen Δg notwendig sind, wurde wieder das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg mit den vielen bekannten Schweredifferenzen benützt. Bekanntlich hat *H. Bodemüller* [9] mit Turmmessungen gute Erfolge erzielt und für den Mittelwert des Freiluftgradienten $\frac{\delta g}{\delta n}$ brauchbare Resultate erhalten. Auf dem

Buschberg sind aber weder Türme, noch Triangulierungshochstände vorhanden. Der Bau eines Hochstandes kostet etwa zwischen 15.000 S bis 30.000 S. Es mußte daher eine andere, billigere Lösung für die Messung von V_a gefunden werden.

Es wurde ein „transportabler Hochstand“ verwendet, welcher im B. A. f. E. u. V. vor vielen Jahren versuchsweise für Triangulierungszwecke diente. Genau so wie beim festen Hochstand, sind Instrumentträger und die Plattform für den Beobachter nicht in Berührung. Durch ein festes Holzstativ wird das Beobachtungsgerät in einer Höhe von 2 m bis 3 m über dem Boden gehalten. Auf dem Stativteller wurde eine feste Messingplatte befestigt, auf der das Gravimeterstativ einrastet.

Die Masse der verbindenden Eisenteile ist sehr gering und weit vom Gerät entfernt, so daß keine nennenswerte magnetische Einwirkung zu befürchten ist. Außerdem ist das verwendete Askania-Gravimeter GS 11 gegen magnetische Einflüsse durch einen Abschirmtopf, der aus einem Spezialmetall hergestellt ist, wirkungsvoll gesichert. Abb. 11 zeigt den transportablen Hochstand bei der Messung des Vertikalgradienten auf dem Punkt 34 des Buschberg-Hauptfeldes. Da selbst der leiseste Wind genaue Messungen unmöglich macht, wurde auf der Plattform ein Windschutzzelt aufgestellt. Für die Abschirmung gegen Wind bei den Bodenmessungen waren Zeltplanen vorgesehen. Trotz der großen Sorgfalt, welche für die Messungen aufgewendet wurde, waren die Resultate der ersten Tage nicht brauchbar; die Grundplatte aus Messing war zu schwach und mußte daher versteift werden. Langsam wurden Erfahrungen gewonnen.

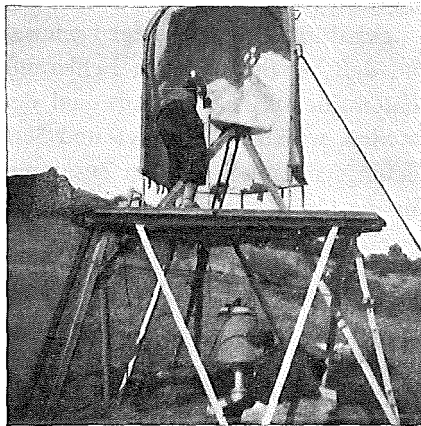


Abb. 11

Aufbau und Abbau des Hochstandes dauert mit 4 Mann etwa einen halben Tag. Die Messung selbst war höchstens noch bei Windstärke eins bis zwei möglich. Ein großes Zelt über den ganzen Hochstand würde die Arbeit windunabhängiger gestalten. Nun seien die Resultate der Messungen auf den Punkten N_7 , 34, 56 und T. P. Exzenter angeführt:

Punkt	V_a (10^{-3} mgal/m)	Mittl. Fehler 10^{-3} mgal/m	Anzahl der Messg. Diff.
N 7 (Nordfeld)	319	± 25	4
34	319	± 4	6
58 (Hauptfeld I)	316	± 4	4
T. P. Exzenter	351	± 3	8

Beim Punkt N 7 war das Gerät noch etwas unruhig. Es ließ sich kein Gang erkennen. Bei den anderen Messungen wurde der Gang ausgeschaltet. Es war geplant, den Gradienten auf dem Berggipfel T. P. Buschberg SE. zu messen. Bei aufgestelltem Hochstand wurde tagelang auf Windstille gewartet. Schließlich mußten die Messungen im Windschatten auf dem um ca. 10 m tieferen T. P. Exzenter durchgeführt werden.

(Fortsetzung folgt.)

Das folgende Beispiel zeigt die zahlenmäßige Größe der Differenzen. Es sei:

$$\begin{aligned} t_1 &= + 140 \text{ C}, & t_2 &= + 80 \text{ C}, \\ t_1' &= + 120 \text{ C}, & t_2' &= + 60 \text{ C}, \\ p_1 &= 710 \text{ Torr}, & p_2 &= 640 \text{ Torr}. \end{aligned}$$

Die „mittleren“ Dampfdruckwerte ergeben sich daraus mit

$$e_m = 7,96 \text{ Torr}, e_m' = 7,81 \text{ Torr}, e_m'' = 7,86 \text{ Torr}, e_m''' = 7,70 \text{ Torr}$$

und die Differenz mit

$$\Delta e_m' = -0,15 \text{ Torr}, \Delta e_m'' = -0,10 \text{ Torr} \text{ und } \Delta e_m''' = -0,26 \text{ Torr}.$$

Zum Vergleich ergeben die Formeln (14) und (15)

$$\Delta e_m' = -0,15 \text{ Torr} \text{ und } \Delta e_m'' = -0,10 \text{ Torr}.$$

Welche Annahme im allgemeinen die beste ist, wollen wir hier nicht diskutieren. Der Hauptzweck war, zu zeigen, wie kompliziert und mehrdeutig die Berechnung des mittleren Brechungsverhältnisses ist.

Literatur:

[1] *Mitter, J.*: Über die Bestimmbarkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwellen bei elektronischen Entfernungsmessungen. Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN), 69 (1962), Heft 5, S. 153–154.

[2] *Bakkeld, S.*: Preliminary Studies of some Tellurometer Problems. Geographical Survey of Norways Publication No. 13, Oslo 1962.

[3] *Mitter, J.*: Zur Bestimmung des atmosphärischen Dampfdruckes mittels Psychrometern – Über die Psychrometerformel und ihre Auswertung. AVN, 70 (1963), Heft 3, S. 83–90.

[4] *Sprung, A.*: Über die Bestimmung der Luftfeuchtigkeit mit Hilfe des Assmannschen Aspirationspsychrometers. Das Wetter, 5 (1888), S. 105.

[5] Aspirations-Psychrometer-Tafeln. Herausgegeben vom Deutschen Wetterdienst, 3., erweiter. Aufl., Braunschweig 1955.

Die Lotkrümmung und das Gravimeterversuchsfeld am Buschberg

Von *Wilhelm Embacher*, Wien

(Schluß)

Ich will die Ergebnisse der Messungen und der daraus berechneten äußeren und inneren Gradienten kurz zusammenstellen: (Gradienten in 10^{-3} mgal/m)

Punkt	H_a	H_i	V_a	V_i
Hauptfeld	15,3	7,8	316,0	168,0
Hauptfeld II	18,3	15,0	318,0	157,8
Feld 34	30,8	28,5	319,0	157,4
Nordfeld	12,5	5,9	318,7	164,8

Die Differenzen der Horizontalgradienten sind zur Dichtebestimmung nicht geeignet, da sie sich zu rasch ändern und zu klein sind. Die Differenz der Vertikalgradienten ergab mit den Bruns'schen Formeln (22) verhältnismäßig gute Dichtewerte, welche auf dem Buschberg zwischen 2,0 und 2,3 liegen.

Es kann gesagt werden, daß die Messung und Berechnung sämtlicher Gradienten bei großer Sorgfalt und geschickter Anlage heute möglich ist.

Bekanntlich versteht man unter der Krümmung k einer Raumkurve den Reziprokwert des Krümmungsradius R in einem bestimmten Punkt, also $k = \frac{1}{R}$. Im folgenden soll jedoch unter der Lotlinienkrümmung der Richtungsunterschied der Tangenten in zwei Punkten der Lotlinie in der Projektion auf eine zwischen ihnen liegende und zu beiden parallele Ebene verstanden sein.

Diese Lotlinienkrümmung setzt sich auch bei homogenem Untergrund aus zwei Komponenten zusammen: Da die Niveauflächen der Normalerde Rotationsfiguren sind, stellen deren Lotlinien ebene Kurven in den Meridianebenen dar, die gegen den Äquator schwach konvex gekrümmt sind. Die Komponente der Lotlinienkrümmung, die dadurch entsteht, heißt die „Normale Lotlinienkrümmung“ $\Delta\bar{\varphi}$. Sie beträgt

$$\Delta\bar{\varphi}'' = 0''000171 \sin 2\varphi \cdot H_m. \quad \dots (30)$$

Die zweite Komponente der Lotlinienkrümmung $\Delta\tau$ entsteht durch die Anziehung der Störmassen. Gelingt es, diese Komponente zu messen oder zu errechnen, so könnte man die gesamte Lotlinienkrümmung bestimmen. Die Lotlinie ist im allgemeinen eine Raumkurve. Nehmen wir aber zur Erhöhung der Anschaulichkeit den speziellen Fall an, daß die Lotlinienkrümmung $\Delta\tau$, welche durch die Anziehung der Störmassen entsteht, in der Nord-Süd-Richtung verläuft, dann könnte man $\Delta\tau$ zur Normalkrümmung $\Delta\bar{\varphi}$ addieren. Wir erhalten dann für die gesamte Lotlinienkrümmung $(\Delta\tau + \Delta\bar{\varphi})$ (siehe Abb. 12).

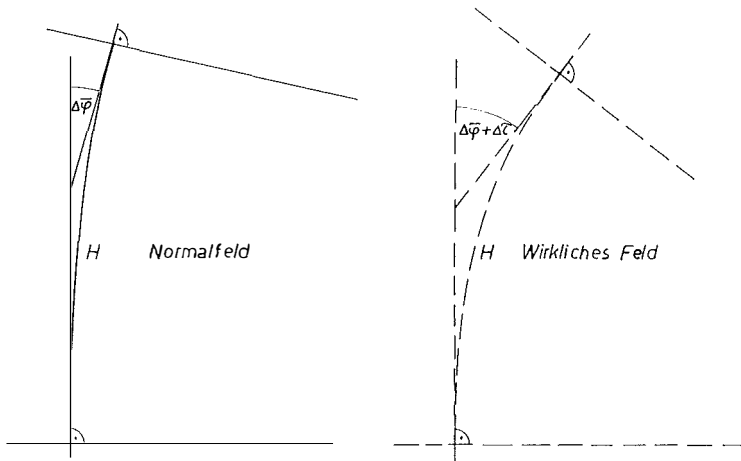


Abb. 12

Genau so werden wir im allgemeinen Fall, wenn $\Delta\tau$ und $\Delta\bar{\varphi}$ nicht in einer Ebene liegen, vorgehen: Die Krümmungen getrennt berechnen, Messungen auf Grund dieser Krümmungen reduzieren und dann die Reduktionen vektorieil addieren.

Die Krümmung in einem Punkt ist proportional dem Horizontalgradienten in diesem Punkt:

$$\frac{1}{R} = k = \frac{G}{g} \quad \dots (31)$$

Nachdem wir wissen, daß die Größe des Horizontalgradienten entlang der Lotlinie zwischen Null und ca. $100 \cdot 10^{-3}$ mgal/m schwankt, während sich die Schwerebeschleunigung erst bei einem Höhenunterschied von ca. 3000 m um 1 gal ändert, setzen wir für die folgenden Berechnungen $g = \text{const}$. Aus den Messungen auf dem Gravimeterversuchsfeld am Buschberg und den anschließenden Berechnungen haben wir erkannt, daß sich sowohl der äußere, als auch der innere mittlere Horizontalgradient für ein begrenztes Feld eindeutig bestimmen lassen. Beide sind etwa von gleicher Größenordnung, entgegengesetzt gerichtet und zeigen zur Trennungsfläche. Auf Grund der Höhenlage des Schwerpunktes des Gravimeters entsprechen sie dem Gradienten in einer Höhe von 50 cm über bzw. unter der Trennungsfläche.

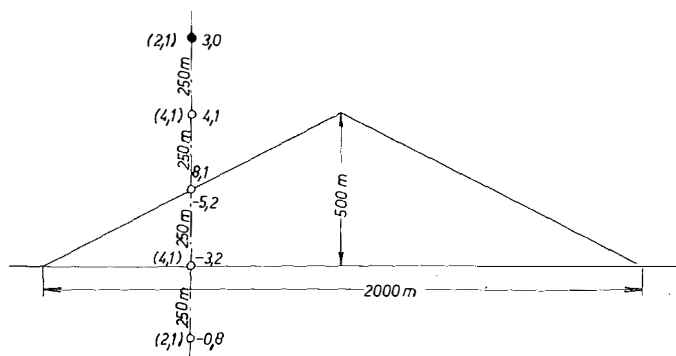


Abb. 13

An drei Modellen, welche einer *Bouguer*-Platte aufgesetzt sind und die senkrecht zur Papierebene nach beiden Richtungen unendlich ausgedehnt sind, wurde der theoretische Verlauf der Horizontalgradienten entlang der Lotlinie über und unter der Störmasse untersucht: Die Querschnittsfigur des ersten Modelles ist ein gleichschenkeliges Dreieck mit einer Höhe von 500 m und einer Grundlinie von 2000 m (Abb. 13). Das zweite Modell (Abb. 14) hat ebenfalls ein gleichschenkeliges Querschnittsdreieck, jedoch eine Höhe von 200 m bei der gleichen Grundlinie von 2000 m. Das dritte Modell (Abb. 15) ist wieder das schon früher untersuchte Treppenmodell. Die Stufen sind mit 100 m Länge und 40 m Höhe gewählt. Bei allen drei Modellen wurden die Horizontalgradienten für Punkte einer bestimmten Lotlinie (siehe Abb. 13–15) über und im Modell und in der darunter liegenden Bouguer-Platte berechnet.

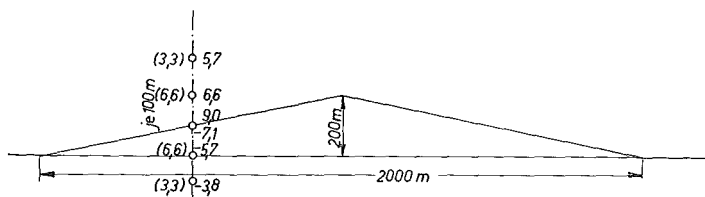


Abb. 14

Man sieht bei allen drei Modellen an der Oberfläche den Sprung in der Richtung des Gradienten. Die Größe der Gradienten ist etwa spiegelbildlich gleich im Außen- und Innenraum. Ein stetiges Wachsen bzw. Fallen der Gradienten scheint bei allen

Modellen vorzuliegen. Ein direkter Zusammenhang zwischen den Horizontalgradienten am Hang und in der Lotlinie ist nicht zu erkennen (siehe Abb. 15).

Für weitere Überlegungen ist es wichtig, das Gesetz oder wenigstens eine Annäherung an das Gesetz zu finden, nach welchem die Horizontalgradienten von der Unstetigkeitsstelle der Dichte aus abnehmen.

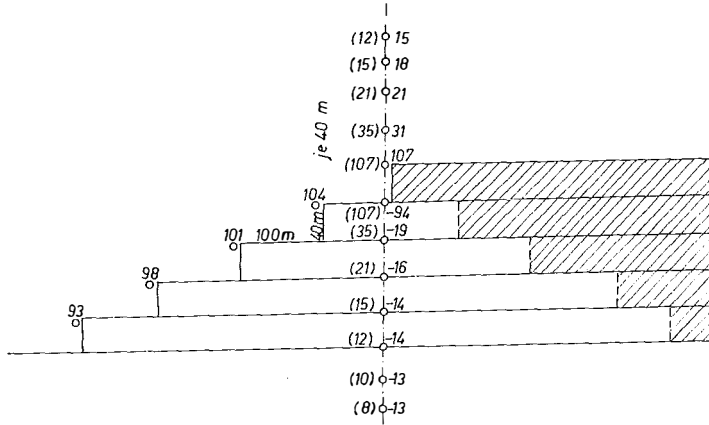


Abb. 15

Gehen wir wieder von der Formel für das unendlich ausgedehnte vierseitige rechtwinkelige Prisma [7] aus (Abb. 4). Es soll sich in der x -Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$, in der y -Richtung von y_1 bis ∞ , und in der z -Richtung von z_1 bis z_2 erstrecken; es ist: (siehe Abb. 4)

$$\frac{1}{k^2 \sigma} V_{yz} = \ln \frac{y_1^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_1^2}, \quad \dots (19)$$

in welcher Formel σ die Dichte und V_{yz} den Horizontalgradienten im Punkte 0 bezeichnet. Zur Vereinfachung wählen wir $y_1 = 0$ und setzen $z_1 = z$ und $z_2 = z + c$, und erhalten

$$\frac{1}{k^2 \sigma} V_{yz} = \ln \frac{z^2 + 2cz + c^2}{z^2}$$

was für $c \ll z$ in

$$\frac{1}{k^2 \sigma} V_{yz} = \ln \left(1 + \frac{2c}{z} \right) \sim \frac{2c}{z}, \quad \dots (19a)$$

oder nach Multiplikation mit $k^2 \sigma$ in

$$V_{yz} = \frac{2c'}{z} \quad \dots (32)$$

übergeht.

Betrachten wir [7] die Abnahme des Horizontalgradienten V_{yzz} :

$$\frac{1}{k^2 \sigma} V_{yzz} = 2 \left(\frac{z_2}{y_1^2 + z_1^2} - \frac{z_1}{y_1^2 + z_1^2} \right), \quad \dots (33)$$

so erhalten wir für die Abnahme des Horizontalgradienten mit den oben angeführten Vereinfachungen

$$V_{yzz} \sim -\frac{2c'}{z^2}, \quad \dots (33a)$$

Der Zusammenhang ist offensichtlich, denn

$$- \int \frac{2c'}{z^2} dz = \frac{2c'}{z}. \quad \dots (34)$$

In den Modellen (siehe Abb. 13 u. 14) wurde nach *Helmert* [8] und im Stufenmodell (Abb. 5) nach *Prey* [11] die Gradienten entlang einer Lotlinie berechnet. Nun wurde versuchsweise für jedes dieser Modelle nach Formel (32) das c' bestimmt und damit die anderen Gradienten zurückgerechnet, welche in den Abbildungen 13 bis 15 in Klammern eingetragen wurden. Die verhältnismäßig gute Übereinstimmung beweist, daß die Näherungsformel für den Gradienten

$$G \doteq \frac{2c'}{z} \quad \dots (32a)$$

brauchbar ist, was besagt, daß zur Gradientenbestimmung jedes Modell durch eine unendliche Platte, wie sie Abb. 4 zeigt, mit der Dicke $c = \frac{c'}{k^2 \sigma}$ und $y_1 = 0$ approximiert werden kann.

Die Formel (32), aus welcher die Näherungsformel (19a) abgeleitet wurde, gilt zwar nur für das Außenpotential, doch zeigen die berechneten Modelle, daß sich die Horizontalgradienten im Außen- und Innenraum spiegelbildlich gleich verhalten, das heißt, daß die Näherungsformel (32) auch zur Berechnung des inneren Horizontalgradienten geeignet ist.

Bekanntlich entsteht das Krümmungsbild einer Kurve, wenn die Krümmung k in Funktion der Bogenlänge z dargestellt wird.

Für den Kreis ist $k = k_0 = \text{const.}$, was mit

$$dz = R d\tau \quad \dots (35)$$

auf

$$d\tau = k_0 \cdot dz$$

und

$$\Delta\tau = k_0 \int_0^z dz = k_0 z = \frac{z}{R} \quad \dots (36)$$

führt.

Nimmt man die Lotlinie als flachen Kreisbogen an, (wie das bei der Normalkrümmung annähernd der Fall ist) so gilt bei der Seehöhe H :

$$z = H, \quad \Delta\tau'' = \frac{H}{R} \rho'' = \frac{G H}{g} \rho''. \quad \dots (37)$$

Als zweites Beispiel wählen wir die Klothoide:

$$R(L_0 - z) = \text{const.} = n, \quad k = \frac{1}{R} = \frac{(L_0 - z)}{n} \quad \dots (38)$$

Das Krümmungsbild ist eine Gerade mit der Steigerung $-\frac{1}{n}$ (s. Abb. 16).

Mit (35) erhalten wir wieder

$$d\tau = \frac{1}{R} dz = \frac{(L_0 - z)}{n} dz$$

und

$$\Delta\tau = \frac{1}{n} \int_0^{L_0} (L_0 - z) dz = \frac{1}{n} \left[L_0 z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{L_0} = \frac{L_0^2}{2n} \dots (39)$$

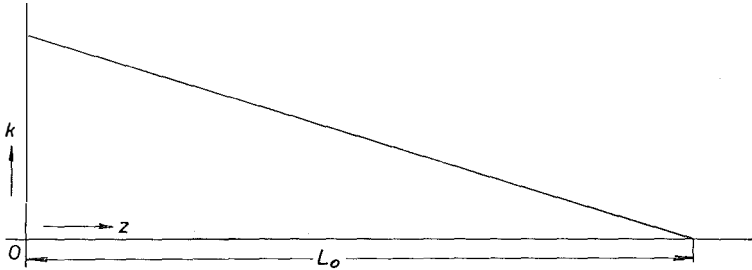


Abb. 16

Für den Punkt 0 (Abb. 16) ist $n = R_0 \cdot L_0$ daher gilt für diesen Punkt

$$\Delta\tau = \frac{L_0}{2 R_0} \dots (40)$$

Nun soll die Kurve untersucht werden, deren Krümmung

$$\frac{1}{R} = \frac{2 c'}{g \cdot z} \dots (41)$$

beträgt. Das Krümmungsbild dieser Kurve ist aus Abb. 17 ersichtlich.

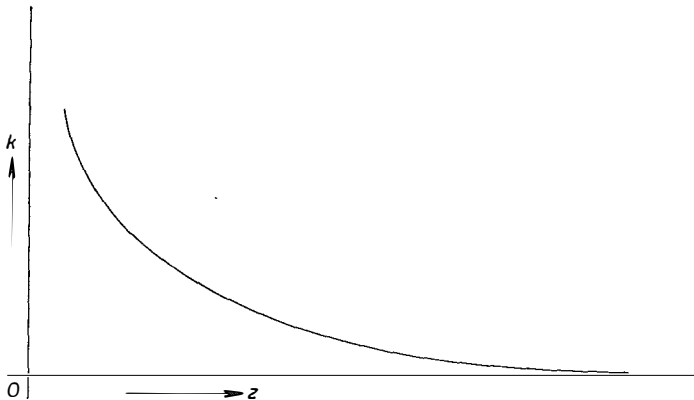


Abb. 17

Man findet

$$\Delta\tau = \frac{2 c'}{g} \int \frac{dz}{z} = \frac{2 c'}{g} \ln z + C \dots (42)$$

Die Grenzen des bestimmten Integrales ergeben sich einerseits durch die gespiegelte Höhe des Gravimeterschwerpunktes mit 0,5 m und durch die Annahme, daß bei

z_0 praktisch keine Krümmung mehr vorhanden ist; so sei für ein bestimmtes z_0 beispielsweise $G = 0,01 \cdot 10^{-3}$ mgal/m. Der innere Oberflächengradient G liefert für c' die Gleichung

$$G = \frac{2c'}{0,5} = 4c', \quad \dots (43)$$

womit wir z_0 aus

$$0,01 = \frac{2c'}{z_0} \quad \dots (44)$$

erhalten.

Für $\Delta\tau''$ erhalten wir aus (42)

$$\Delta\tau'' = \frac{2c'\rho''}{g} \ln \frac{z_0}{0,5}. \quad \dots (42a)$$

Nun wurden mit den Messungsergebnissen des Gravimeterversuchfeldes am Buschberg (mittlere Breite — $48^{\circ}40'$) in Tabelle I für 3 Felder unter Annahme der oben angeführten Krümmungsgesetze, die Lotkrümmungen berechnet und zusammengestellt.

Tabelle I

	Feld I	Feld II	Feld 34
1. H Meter	398,05	419,13	437,13
2. g mgal	980863,436	980858,972	980854,687
3. G'Intensität 10^{-3} mgal/m; (Richtung)	7,4 (123 ^o)	15,0 (130 ^o)	28,5 (114 ^o)
4. G,Intensität 10^{-3} mgal/m; (Richtung)	7,9 (129 ^o)	15,6 (132 ^o)	29,0 (116 ^o)
5. GNormal Intensität 10^{-3} mgal/m; (Richtung)	0,813 (0 ^o)	0,813 (0 ^o)	0,813 (0 ^o)
6. $\Delta\tau''$ Kreis; (Richtung d. Schmiegebene)	0''661 (129 ^o)	1''375 (132 ^o)	2''687 (116 ^o)
7. $\Delta\bar{\varphi}''$ (Richtung d. Schmiegebene)	0''068 (0 ^o)	0''071 (0 ^o)	0''074 (0 ^o)
8. z_0 Meter	395	780	1450
9. c cm	15	29	54
10. $\Delta\tau''$ nach 42a (Richtung d. Schmiegebene)	0''006 (129 ^o)	0''012 (132 ^o)	0''024 (116 ^o)
11. $(\Delta\varphi)''$, $(\Delta\lambda' \cos \varphi)''$	-0''064, -0''004	-0''063, -0''008	-0''064, -0''020

Die erste Zeile gibt Aufschluß über die Seehöhe des Hauptpunktes des Feldes, während die 2. Zeile die mit dem Gravimeter gemessene Schwerebeschleunigung dieses Punktes angibt. Auf Grund der Gravimetermessungen wurde die Intensität und Richtung des in der 3. Zeile stehenden, inneren Horizontalgradienten berechnet. In der 4. Zeile finden wir die Größe und Richtung des mit Hilfe der Besselreduktion (siehe 5. Zeile) vektoriell gefundenen, inneren Horizontalgradienten, der nur mehr von den Störmassen abhängig ist. Nur zum Vergleich wurde, nun unter Annahme eines flachen Kreisbogens, mit diesem Gradienten mit der Seehöhe H nach Formel

(37) die Krümmung $\Delta\tau''$ (Kreis) berechnet. Mit derselben Formel berechnet, finden wir in Zeile 7 die Normalkrümmung $\Delta\bar{\varphi}''$. Unter Annahme des Krümmungsgesetzes, welches der gleichseitigen Hyperbel entspricht, wurde nach Formel (44) die Tiefe z_0 berechnet, in welcher die Krümmung praktisch Null ist und in Zeile 8 tabuliert.

Die Dicke c der Ersatzplatte, welche bei der Dichte 2 (etwa der Dichte der oberen Bodenschichten am Buschberg) dem Verlauf der Horizontalgradienten entlang der Lotlinie entspricht, ist in Zeile 9 zu finden. Sie wurde nach Formel (43) berechnet, wobei $c = \frac{c'}{k^2 \sigma}$. In Zentimetern ergab sich für c :

$$c = \frac{G \cdot \text{cm sec}^{-2} / \text{m} \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}}{4.66,7 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2} \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}} = \frac{G \cdot 10^3}{533,6} \text{ cm}.$$

In Zeile 10 finden wir die nach der Näherungsformel (42a) berechnete Krümmung, welche durch den Einfluß der Störmassen hervorgerufen wird und in Zeile 11 sind die Komponenten der Gesamtreduktion $(\Delta\varphi'')$ und $(\Delta\lambda' \cos \varphi)'$ also die Reduktion der beobachteten Polhöhe und Länge tabuliert. Nach der Formel von K. Ledersteger [3] kann nur die Azimutreduktion wegen der Normalkrümmung $\Delta\bar{\varphi}$ streng durchgeführt werden.

Zur Abschätzung der Drehung der Schmiegeebene wurde der Krümmungsradius und seine Richtung für Punkte der Lotlinie des jeweiligen Hauptpunktes von Feld I, Feld II und Feld 34 berechnet:

	Feld I	Feld II	Feld 34
	Länge km (Richtg.)	Länge km (Richtg.)	Länge km (Richtg.)
Oberfl. Punkt	124.000 (123 ⁰)	62.500 (130 ⁰)	33.800 (114 ⁰)
10 m tiefer	1,530.000 (26 ⁰ 48')	1,530.000 (63 ⁰ 05')	755.000 (82 ⁰ 25')
50 m tiefer	1,280.000 (4 ⁰ 21')	1,360.000 (9 ⁰ 15')	1,330.000 (20 ⁰ 42')
100 m tiefer	1,240.000 (2 ⁰ 04')	1,280.000 (4 ⁰ 21')	1,290.000 (9 ⁰ 56')
200 m tiefer (etwa halbe Höhe)	1,220.000 (1 ⁰ 04')	1,240.000 (2 ⁰)	1,240.000 (4 ⁰)
Auf dem Geoid	1,200.000 (0 ⁰ 30')	1,200.000 (0 ⁰ 30')	1,220.000 (1 ⁰ 47')

Aus lokalen Gravimetermessungen und ohne Berechnung der Topographie kann somit die Lotlinienkrümmung und die Drehung ihrer Schmiegeebene bestimmt werden.

Man sieht, daß sich die Schmiegeebene in Oberflächennähe rasch dreht und daß sie auf dem Geoid schon fast in der Meridianebene liegt. Als Hauptergebnis finden wir, daß am Buschberg der Einfluß der Störmassen nur 10—33% der normalen Lotkrümmung ausmacht.

Literatur:

[1] Hunziker, E.: Lotlinienkrümmung und Projektion eines Punktes oder einer Strecke auf das Geoid. Schweiz. Z. f. Verm., 58 (1960) Nr. 5.

[2] Gaßmann, F.: F. Gaßmann und P. Müller: Gravimetrische Bestimmung der Gesteinsdichte und der Lotkrümmungen für den Punkt St. Anton des Basisvergrößerungsnetzes Heerbrugg. Schweiz. Z. f. Verm., 59 (1961) Nr. 9.

- [3] *Ledersteger, K.*: Die Reduktion der astronomischen Beobachtungen wegen Lotkrümmung. Schweiz. Z. f. Verm., 53 (1955) Nr. 8.
- [4] *Embacher, W.*: Ein Vergleich von Methoden zur Bestimmung der Bodendichte. ÖZfV 49 (1961) Nr. 4
- [5] *Embacher, W.*: Über die Azimutreduktionen wegen Lotkrümmung. ÖZfV 50 (1962) Jg. Nr. 4.
- [6] *Bruns, H.*: Die Figur der Erde. Berlin 1878.
- [7] *Mader, K.*: Das Newton'sche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Sonderheft 11 der ÖZfV, 1951.
- [8] *Helmert, F.*: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, S. 278ff.
- [9] *Bodenmüller, H.*: Beitrag zur Messung und Auswertung vertikaler Schweregradienten. ZfV 85 (1960) Nr. 4.
- [10] *Embacher, W.*: Vorschlag für ein Elektronengravimeter. Dok.-Zentrum der Technischen Hochschule Wien, 1952.
- [11] Isostasie in den Alpen. Österr. Ak. d. Wiss.

Das neue Geodimeter Modell 6

Von *Josef Mitter*, Wien

Auf dem 10. Internationalen Kongreß für Photogrammetrie in Lissabon, 7. bis 19. September 1964, wurde von den AGA-Werken in Stockholm-Lidingö ein neuer Geodimetertyp erstmals vorgeführt. Dieser als Modell 6 bezeichnete und in seiner Bauweise revolutionäre Gerätetyp wurde dankenswerterweise auch bereits in Österreich, und zwar vor den Teilnehmern des 2. Praktikerkurses an der Technischen Hochschule in Graz, 5. bis 7. Oktober 1964, gezeigt.

Wie bekannt, hat sich von den verschiedenen möglichen elektrisch-optischen Entfernungsmessverfahren bisher nur das Verfahren von *Bergstrand* als für die Praxis verwendungsfähig erwiesen und hat zum Bau der Geodimetertypen NASM-1, 2, 3 und 4 (mit verschiedenen Varianten) durch die Fa. AGA geführt. Von diesen Typen hat das Modell 4 wegen seiner Handlichkeit, seiner Einsatzfähigkeit bei Tageslicht und nicht zuletzt wegen seiner hohen Genauigkeit weitgehende Verwendung bei den verschiedensten geodätischen Arbeiten gefunden. Prinzip und Erfahrungen bei seiner Verwendung wurden in einer Reihe von Arbeiten beschrieben, von denen einige im angeschlossenen Literaturverzeichnis zusammengestellt sind: [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Die Ausrüstung des Gerätes mit einer Quecksilberdampfhochdrucklampe anstelle der Wolframfadenlampe führte zu einer bereits fast als endgültig anzusprechenden Lösung des Problems der Tageslichtbeobachtungen mit elektrisch-optischen Entfernungsmessgeräten [7], [8].

Das nun auf den Markt gebrachte Modell 6 erfüllt einen langgehegten Wunsch der Geodäten nach einer geodätischen Achsenanordnung des Geodimeters, ferner ist durch die Volltransistorisierung die Betriebssicherheit weiter erhöht und die Leistungsaufnahme verringert. Eine weitere Verbesserung ist die digitale Anzeige der Phasennullsteuerungswerte.

Den Aufbau des Gerätes zeigen die Abb. 1 und 2. Die Gesamtanordnung ist theodolitähnlich. Sende- und Empfangsoptik sind koaxial ineinander gebaut und in einem alhydadenartigen U-Träger kippbar gelagert. Seitlich an den Fernrohrträgern