

Paper-ID: VGI_196509



Die Orientierung eines Richtungsbündels

Karl Rinner ¹

¹ *Graz, Techn. Hochschule, Rechbauerstr. 12*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **53** (4), S. 105–113

1965

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Rinner_VGI_196509,  
Title = {Die Orientierung eines Richtungsb{"u}ndels},  
Author = {Rinner, Karl},  
Journal = {"0sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {105--113},  
Number = {4},  
Year = {1965},  
Volume = {53}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN
Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 4

Baden bei Wien, Ende August 1965

53. Jg.

Die Orientierung eines Richtungsbündels

Von *Karl Rimmer*, Graz

Vorbemerkung

Für die Berechnung von Netzen der dreidimensionalen Geodäsie ist es zweckmäßig, ähnlich wie für zweidimensionale Berechnungen, eine Reihe von Grundaufgaben einzuführen. Zu diesen gehören außer den einfachen Punktbestimmungen durch räumliche Richtungen, Winkel und Strecken die Orientierung eines Bündels von Raumstrahlen und die räumliche Drehstreckung.

Über letztere wird in [1] berichtet, in der folgenden Arbeit soll die Orientierung eines Raumbündels untersucht werden, wobei sowohl auf die übliche Bestimmung einer Raumrichtung durch 2 Winkel als auch auf die photogrammetrische Festlegung durch 2 Bildkoordinaten eingegangen wird.

Die folgende Arbeit ist ein Auszug aus Untersuchungen, welche in Bd. VI des Handbuches f. Vermessungswesen, Jordan/Eggert/Kneißl, — „Die elektronische Entfernungsmessung und ihre geodätische Anwendung“, erscheinen werden.

Eine räumliche Richtung ist durch 2 Parameter bestimmt, etwa durch die zugehörigen Horizontal- und Höhenwinkel α , β , oder durch die Bildkoordinaten x , y einer gnomonischen oder sphärischen Abbildung. Durch einen Punkt des Raumes gibt es ∞^2 Richtungen, deren Gesamtheit wir als Richtungsbündel bezeichnen. Diesem entspricht in der Ebene das durch einen Punkt gehende ebene Richtungsbüschel.

Örtliche Raumrichtungen s bestimmen wir, wenn wir mit dem Theodolit die Horizontal- und Vertikalwinkel α und β messen. Das durch den Schnittpunkt der Achsen des Theodolites gehende Richtungsbündel ist in dem durch horizontale Achsen i (Nord-), j (Ost-) und der Lotrichtung k gegebenen System durch die Gleichung

$$s = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \end{pmatrix} = s(\alpha, \beta) \quad \dots (1)$$

bestimmt (Abb. 1).

Eine photogrammetrische Aufnahme mit bekannter innerer Orientierung vermittelt ein örtlich orientiertes Richtungsbündel, das bei fehlerfreien Aufnahmebedingungen, dem die Aufnahme vermittelnden Lichtstrahlenbündel kongruent

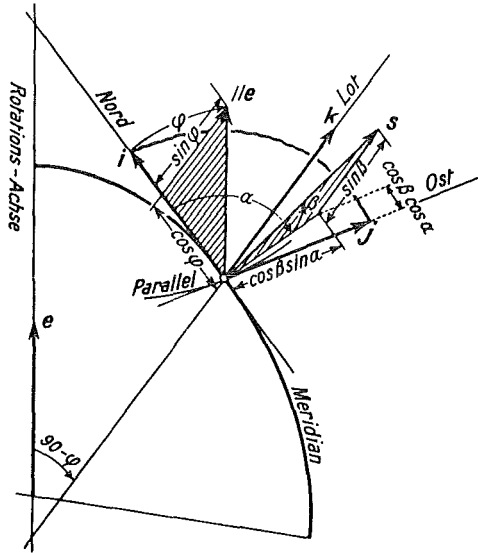


Abb. 1

ist. In dem (durch die bekannt vorausgesetzte innere Orientierung) gegebenen örtlichen Koordinatensystem i, j (Richtung der Bildkoordinatenachsen) und k (Aufnahmeachse) wird das Richtungsbündel durch die Gleichung

$$\lambda s = (x i + y j - c k)$$

x, y Bildkoordinaten
 $c =$ Kammerkonstante
 $\lambda = \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}$

dargestellt (Abb. 2).

Um verschiedene örtliche Richtungsbündel für den Aufbau eines Netzes verwenden zu können, müssen wir diese in einem einheitlichen System orientieren.

Ein Richtungsbündel ist orientiert, wenn sich ein Strahl in orientierter Lage befindet und für einen zweiten ein geometrischer Ort (etwa eine durch den ersten Strahl gehende Ebene) bekannt ist. Die Orientierung kann daher durch eine Drehung des Bündels erreicht werden und ist durch die drei Parameter der zugehörigen Drehmatrix, der Orientierungsmatrix, bestimmt. Bezeichnet A diese Matrix, so wird die Orientierung des Bündels durch die Gleichungen

$$s_L = A s, \quad s = A^T s_L \quad \dots (3)$$

vermittelt ($A^T =$ transponierte Matrix). Jedes entsprechende Strahlenpaar (s_i, s_{iL}) gibt Anlaß zu einer Vektorgleichung (3). Diese entspricht 3 skalaren Gleichungen, von denen aber wegen $s^2 = s_L^2 = 1$ nur zwei voneinander unabhängig sind.

Für die Bestimmung der Elemente von A können wir die in [1] beschriebenen Verfahren für die Ermittlung der Matrix einer Drehstreckung sinngemäß verwenden.

Für die allgemeine Lösung denken wir uns A wieder in zwei Teilmatrizen (A_1, A_2) zerlegt. A_1 soll die Drehung des Bündelstrahles s_i nach s_{iL} bewerkstelligen und ist aus dieser Forderung bestimmt.

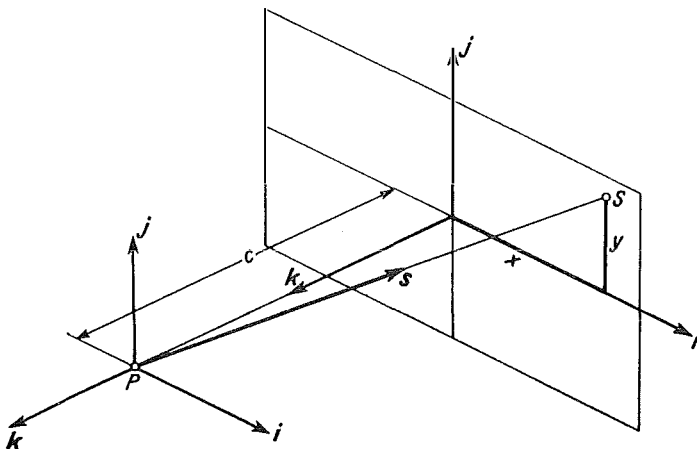


Abb. 2

Durch A_2 soll ein weiterer Bündelstrahl s_2 in den für s_{2L} vorgegebenen Ort gedreht werden. Für A_2 gibt es, wenn der gegebene Ort eine durch den Bündelscheitel gehende Ebene ist, aus geometrischen Gründen zwei Lösungen. Verdrehen wir den zweiten Strahl s_2 mit A_1 , so erhalten wir eine neue Lage

$$s''_2 = A_1 s_2$$

und die Matrix A_2 der zweiten Drehung ist durch die Achse $a_2 = s_{1L}$ und den von den Ebenen (s'_1, s''_2) und der gegebenen Ebene eingeschlossenen Winkel α_2 bestimmt. Die Matrix A der Gesamtdrehung berechnen wir nach den Gln. (3) bis (7), von [1].

Liegen mehrere entsprechende Strahlen, also Überbestimmungen vor, so können wir die Unbekannte durch eine Ausgleichung ermitteln. Wir bestimmen erst eine Näherungsmatrix (A), entweder aus der geometrischen Überlegung, daß die Drehachse a immer in der Symmetrieebene von entsprechenden Strahlen (s, s_L) liegen muß und die Ebenen (a, s), (a, s_L) den Drehwinkel α einschließen.

$$\begin{aligned} a &\text{ parallel } (s_1 - s_{1L}) \times (s_2 - s_{2L}) \\ \alpha &\text{ Winkel } [(a \times s), (a \times s_L)] \end{aligned}$$

Oder wir benützen die Identität (9b), [1], aus welcher sich die Vektorgleichung

$$-(\mathbf{E} - \mathbf{R}_A) s_L \times (\mathbf{E} + \mathbf{R}_A) s = 0,$$

oder 2 daraus folgende, unabhängige skalare Gleichungen (10b) ergeben. Ein Beispiel ist in dem angefügten Vordruck, Seite 112, ausgeführt.

Die Linearformen für die Verbesserungen der Näherungswerte leiten wir aus der Gln. (11a), [1] entsprechenden Gleichung

$$\begin{aligned} s_L &= (\mathbf{E} + d\mathbf{R}_A)(A) s = (A)s + d\mathbf{R}_A(A) s = s_0 + d\mathbf{R}_A s_0 \quad \dots (4a) \\ s_0 &= (A)s \text{ vorläufig orientierte Richtung,} \end{aligned}$$

ab und wollen nun das gegebene, überstimmte System nicht nach der in [1] benutzten Interpolationsforderung, sondern durch Verbesserung der Meßgrößen ausgleichen.

a) Meßgrößen α, β

Werden die Richtungen s durch Horizontal- und Vertikalwinkel α, β festgelegt, welche mit einem Theodolit gemessen werden, so folgt aus (1)

$$ds = \frac{\partial s}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial s}{\partial \beta} d\beta$$

und daraus können wir die Richtungsverbesserung \mathbf{v} berechnen.

$$\mathbf{v} = v_\alpha \mathbf{a} + v_\beta \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} = \cos \beta \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} -\sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix} \quad \dots (4b)$$

Wir überzeugen uns, daß die Beziehungen

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \dots (5a)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \cos \beta \mathbf{s}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{s} \cos \beta = \mathbf{a}, \quad \mathbf{s} \times \mathbf{a} = \cos \beta \mathbf{b}$$

bestehen und somit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{s}$ zueinander orthogonal sind. \mathbf{b} und \mathbf{s} sind Einheitsvektoren, während der absolute Betrag von \mathbf{a} durch $\cos \beta$ bestimmt wird. Außerdem können wir \mathbf{a} und \mathbf{b} durch \mathbf{s} und die Lotrichtung \mathbf{k} darstellen.

$$\mathbf{a} = \mathbf{k} \times \mathbf{s}, \quad \mathbf{b} \cos \beta = \mathbf{k} - \sin \beta \mathbf{s} \quad \dots (5b)$$

Nun führen wir verbesserte Richtungen

$$\mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 = (\mathbf{A})(\mathbf{s} + \mathbf{v}) = \mathbf{s}_0 + v_\alpha \mathbf{a}_0 + v_\beta \mathbf{b}_0$$

an Stelle von \mathbf{s}_0 in (4a) ein und erhalten die Vektorgleichung

$$v_\alpha \mathbf{a}_0 + v_\beta \mathbf{b}_0 + d\mathbf{R}_A \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_L = 0, \quad \dots (6a)$$

in welcher

$$\mathbf{a}_0 = (\mathbf{A})\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}_0 = (\mathbf{A})\mathbf{b}, \quad \mathbf{v}_0 = (\mathbf{A})\mathbf{v} \quad \dots (6b)$$

vorläufig orientierte Richtungen bezeichnen. Für diese bestehen die zu (5a, b) analogen Beziehungen

$$\mathbf{a}_0^2 = \mathbf{a}^2 = \cos^2 \beta, \quad \mathbf{b}_0^2 = \mathbf{b}^2 = 1$$

$$\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{a}_0 = \mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 0$$

$$\mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0 = \cos \beta \mathbf{s}_0, \quad \mathbf{b}_0 \times \mathbf{s}_0 \cos \beta = \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{s}_0 \times \mathbf{a}_0 = \cos \beta \mathbf{b}_0,$$

weil durch die Multiplikation mit (\mathbf{A}) , die Vektoren nur verdreht, also ihre Beträge und die gegenseitige Lage nicht verändert werden. Multiplizieren wir (6a) der Reihe nach skalar mit \mathbf{a}_0 und \mathbf{b}_0 , so erhalten wir 2 skalare Gleichungen.

$$\cos^2 \beta v_\alpha + (d\mathbf{R}_A \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{a}_0 - \mathbf{s}_L \cdot \mathbf{a}_0 = 0$$

$$v_\beta + (d\mathbf{R}_A \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{b}_0 - \mathbf{s}_L \cdot \mathbf{b}_0 = 0 \quad \dots (6b)$$

Darin ersetzen wir die Multiplikation mit der Differentialmatrix $d\mathbf{R}_A$ durch die

äußere Multiplikation mit dem zugehörigen Drehvektor $d\mathbf{a}$ (da_1, da_2, da_3) und formen die entstehenden dreifachen Vektorprodukte um.

$$(d\mathbf{R}_A \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{x} = (d\mathbf{a} \times \mathbf{s}_0) \cdot \mathbf{x} = (d\mathbf{a}, \mathbf{s}_0, \mathbf{x}) = d\mathbf{a} \cdot (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{x})$$

Mit $\mathbf{x} = \mathbf{a}_0$, $\mathbf{x} = \mathbf{b}_0$ und Beachtung der Beziehungen (5b) folgen aus (6b) zwei Gleichungen für die Bestimmung der Parameter da_i von $d\mathbf{a}$ oder $d\mathbf{R}_A$.

$$\begin{aligned} v_\alpha &= -d\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_0 \frac{1}{\cos \beta} + \frac{\mathbf{s}_L \cdot \mathbf{a}_0}{\cos^2 \beta} \\ v_\beta &= d\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_0 \frac{1}{\cos \beta} + \mathbf{s}_L \cdot \mathbf{b}_0 \end{aligned} \quad \dots (6c)$$

Diese lassen sich in einfacherer Form darstellen, wenn das zu orientierende Bündel bereits eine Näherungslage besitzt. Für diesen Fall darf $(\mathbf{A}) = \mathbf{E}$ und $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}$ gesetzt werden, und damit folgen wegen der für die Absolutglieder geltenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{s}'_L \cdot \mathbf{a}}{\cos^2 \beta} &= \sin(\alpha_L - \alpha) \approx \alpha_L - \alpha \\ \mathbf{s}_L \cdot \mathbf{b} &= \sin(\beta_L - \beta) + 2 \cos \beta_L \sin \beta \sin^2 \frac{\alpha_L - \alpha}{2} \approx \beta_L - \beta \end{aligned}$$

aus (6c) die einfachen Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \cos \alpha \operatorname{tg} \beta da_1 + \sin \alpha \operatorname{tg} \beta da_2 - da_3 + \alpha_L - \alpha \quad \dots (7) \\ v_\beta &= -\sin \alpha da_1 + \cos \alpha da_2 + \beta_L - \beta \end{aligned}$$

Die Komponenten des Drehvektors $d\mathbf{a}$ lassen sich als Drehungen um die Achsen \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} des Koordinatensystemes deuten und stellen dann Orientierungsgrößen für die in den Koordinatenebenen des Systemes \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} liegenden ebenen Richtungsbüschel dar (s. Abb. 1). Demnach entspricht da_2 einer Drehung um die \mathbf{j} -Achse, oder der Verdrehung des in der Meridianebene $[\mathbf{i}, \mathbf{k}]$ liegenden Büschels und kann als Verdrehung des Lotes \mathbf{k} um ein Differential $d\varphi$ der geographischen Breite φ angesehen werden.

Die in der Lotrichtung \mathbf{k} liegende Komponente da_3 entspricht einer Drehung um diese Achse, stellt daher die Orientierungskonstante do der in der Ebene $[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$ liegenden horizontalen Richtungen des Bündels dar. Die Drehung da_1 um die in der Nordrichtung liegende Achse \mathbf{i} wollen wir durch eine Drehung um die Rotationsachse

$$\mathbf{e} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{k} \quad \dots (8a)$$

der Erde ersetzen, welche eine Verdrehung der Meridianebene, also eine Längenänderung $-d\lambda$ bewirkt. (Wegen des entgegengesetzten Sinnes der Längenzählung muß hierfür ein negatives Vorzeichen eingeführt werden.)

Der Drehvektor $d\mathbf{a}$ kann somit auch durch seine in der Richtung der Achsen \mathbf{e} , \mathbf{j} , \mathbf{k} liegenden Komponenten, also durch die Parameter $-d\lambda$, $d\varphi$, dz bestimmt werden.

$$d\mathbf{a} = -d\lambda \mathbf{e} + d\varphi \mathbf{j} + dz \mathbf{k} \quad \dots (8b)$$

Durch $d\varphi$, $-d\lambda$ wird die orientierte Lage einer Richtung des Bündels, der Lotrichtung, festgelegt, do gibt die um diese Achse erforderliche Verdrehung.

Führen wir darin (8a) ein, so folgt

$$d\mathbf{a} = -\cos\varphi d\lambda \mathbf{i} + d\varphi \mathbf{j} + (d\alpha - \sin\varphi d\lambda) \mathbf{k} \quad \dots (9)$$

und damit erhalten wir aus (6c) Gleichungen für die Orientierungsparameter $d\varphi$, $d\lambda$, $d\alpha$.

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \sin\alpha \operatorname{tg}\beta d\varphi + (\sin\varphi - \cos\varphi \cos\alpha \operatorname{tg}\beta) d\lambda - d\alpha + \alpha_L - \alpha \\ v_\beta &= \cos\alpha d\varphi + \sin\alpha \cos\varphi d\lambda + \beta_L - \beta \end{aligned} \quad \dots (10)$$

Diese Beziehungen stellen Grundgleichungen der dreidimensionalen Geodäsie dar, sie können benutzt werden, um das mit dem Theodolit beobachtete Bündel der Raumrichtungen, welches die astronomische bestimmte Lotrichtung \mathbf{k}' (φ' , λ') und astronomischen Azimute α' enthält, im System \mathbf{k} (φ , λ) und α des gewählten Bezugsellipsoides zu orientieren. Die Parameter

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi' - \varphi = \xi \\ d\lambda &= \lambda' - \lambda = \frac{\eta}{\cos\varphi} \end{aligned} \quad \dots (11a)$$

bestimmen die Lotabweichungskomponenten ξ , η im Beobachtungspunkt, $d\alpha$ die Orientierungskonstante der horizontalen ellipsoidischen Richtungen.

Aus (10) entnehmen wir wegen der offenbar bestehenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha + d\alpha + v_\alpha &= \alpha_L + d\alpha \\ \beta + v_\beta &= \beta_L + d\beta \\ \alpha_L, \beta_L &\text{ aus Koordinaten} \\ \alpha, \beta &\text{ beobachtet} \end{aligned} \quad \dots (11b)$$

auch die bekannten Gleichungen

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sin\varphi d\lambda + (\xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha) \operatorname{tg}\beta \\ d\beta &= \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha, \end{aligned} \quad \dots (11c)$$

welche den Einfluß der Lotabweichungskomponenten ξ , η auf Horizontal- und Vertikalwinkel angeben.

b) Bildkoordination x , y als Meßgrößen

Wird das Bündel durch die Bildkoordinaten einer photographischen Aufnahme bestimmt, so führen wir in (4a)

$$(\mathbf{s}) = (\mathbf{A})(\mathbf{s} + \mathbf{v}) = \lambda((x + v_x) \mathbf{i}) + (y + v_y) \mathbf{j} - c \mathbf{k}$$

ein, multiplizieren die erhaltene Gleichung der Reihe nach mit den zueinander orthogonalen Vektoren

$$\mathbf{i} = (\mathbf{A})\mathbf{i}, \quad \mathbf{j} = (\mathbf{A})\mathbf{j}, \quad \mathbf{k} = (\mathbf{A})\mathbf{k}$$

und ersetzen die Differentialmatrix $d\mathbf{R}_A$ wieder durch den zugehörigen Drehvektor $d\mathbf{a}$ (da_1 , da_2 , da_3). Wir erhalten drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_L \cdot \mathbf{i} &= \lambda(x + v_x) + (d\mathbf{a}, (\mathbf{s}), \mathbf{i}) \\ \mathbf{s}_L \cdot \mathbf{j} &= \lambda(y + v_y) + (d\mathbf{a}, (\mathbf{s}), \mathbf{j}) \\ \mathbf{s}_L \cdot \mathbf{k} &= -\lambda c + (d\mathbf{a}, (\mathbf{s}), \mathbf{k}), \end{aligned}$$

aus welchen wir mit Hilfe der dritten den Parameter λ eliminieren. Es verbleiben

zwei Fehlergleichungen für die Bestimmung der Parameter der Drehmatrix, welche wir erst in vektorieller Form anschreiben wollen.

$$\begin{aligned} v_x &= -x + (x) + da \cdot \mathbf{c}_1 \\ v_y &= -y + (y) + da \cdot \mathbf{c}_2 \end{aligned} \quad \dots (12a)$$

Darin bedeuten

$$(x) = -c \frac{\mathbf{s}_L \cdot (\mathbf{i})}{\mathbf{s}_L \cdot (\mathbf{k})}, \quad (y) = -c \frac{\mathbf{s}_L \cdot (\mathbf{j})}{\mathbf{s}_L \cdot (\mathbf{k})} \quad \dots (12b)$$

die mit Hilfe der Näherungsorientierung (A) berechneten Bildkoordinaten der vorgegebenen Richtungen \mathbf{s}_L ; \mathbf{c}_1 und \mathbf{c}_2 sind Hilfsvektoren, welche entweder aus

$$\mathbf{c}_1 = (\mathbf{s}) \times \frac{x(\mathbf{k}) + c(\mathbf{i})}{\mathbf{s}_L \cdot (\mathbf{k})}, \quad \mathbf{c}_2 = (\mathbf{s}) \times \frac{c(\mathbf{j}) + y(\mathbf{k})}{\mathbf{s}_L \cdot (\mathbf{k})}, \quad \dots (12c)$$

oder den daraus mit Hilfe der Gleichung (2) abgeleiteten Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= -\frac{xy}{c}(\mathbf{i}) + c\left(1 + \frac{x^2}{c^2}\right)(\mathbf{j}) + y(\mathbf{k}) \\ \mathbf{c}_2 &= -c\left(1 + \frac{y^2}{c^2}\right)(\mathbf{i}) + \frac{xy}{c}(\mathbf{j}) - x(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad \dots (12d)$$

berechnet werden. In den entsprechenden skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} v_x &= c_{11}da_1 + c_{12}da_2 + c_{13}da_3 - x + (x) \\ v_y &= c_{21}da_1 + c_{22}da_2 + c_{23}da_3 - y + (y) \end{aligned} \quad \dots (12e)$$

treten die Komponenten der Hilfsvektoren \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 als Koeffizienten der Orientierungsparameter da_i auf.

Beispiel;

Ein Hochziel sei mit einer Kammer ($c = 50 \text{ mm}$) gegen den Fixsternhimmel photographiert worden. Aus der Aufnahme können die Bildpunkte der nachfolgend aufgeführten Sterne identifiziert und die Bildkoordinaten der Sterne und des Hochzies in einem System durch den Bildhauptpunkt ($x_0 = 0, y_0 = 0$) bestimmt werden.

		x_{mm}	y_{mm}	α	δ
1	α Cygni	-13,99330	+ 0,47941	20 ^h 40 ^m 12 ^s 42 3100 03' 06'',3	+ 45 ^o 09' 11'' 0
2	α Delphini	+10,93237	- 7,88433	20 37 57,19 309 29 17,8	+ 15 47 07,1
3	ϵ Pegasi	+18,39072	+25,19246	23 02 57,39 345 44 20,8	+ 15 00 36,9
4	β Capricorni	+45,30791	-24,95743	20 18 58,19 304 44 32,8	- 14 53 48,0
H	Hochziel	+32,76819	+ 8,42658		

Tabelle 1

Aus den für die Epoche IX. 12. 1963 dem Katalog „Apparent Places of Stars“ entnommenen, in *Tab. 1* aufgeführten Werten der Rektaszension α und Deklination δ für die abgebildeten Sterne, sind α und δ für das abgebildete Hochziel zu berechnen.

Wir bestimmen erst mit Hilfe der gemessenen Bildkoordinaten die Richtungen s von 1 bis 4 und H im System i, j, k nach der Beziehung (2) und die entsprechenden Richtungen s' für 1 bis 4 aus (α, δ) nach (1).

	1	2	3	4	H
s	-0,2694988	+0,2111110	+0,3120714	+0,6297821	+0,5427726
	+0,0092330	-0,1522514	+0,4274899	-0,3469095	0,1395779
	+0,9629566	+0,9655319	+0,8484480	+0,6950024	+0,8282004
s'	+0,4537915	+0,6119378	+0,9361152	+0,5507350	
	-0,5398166	-0,7426494	0,2379322	-0,7941048	
	+0,7089931	+0,2720367	+0,2589919	-0,2570765	

Tabelle 2

Mit den Richtungen nach den Zielen 1, 2 ermitteln wir im *Vordruck* die Komponenten der Näherungsmatrix (A) und damit vorläufige Richtungen (s_L) zu den Sternen 1 bis 4 nach der Beziehung $(s_L) = (A) x$.

Angaben				Bestimmung von a und c			
	x	y	z		$-(z_L + z)$	$+(x_L + x)$	$-(y_L - y)$
x_1	-0,269 4898	+0,009 2330	+0,962 9566	x_1	1,671 9497	+0,184 2927	+0,549 0496
x_2	+0,211 1110	-0,152 2514	+0,965 5319	x_2	-1,237 5686	+0,823 0488	+0,590 3980
$x^2_{x_1} = 1,000\ 0003$		$x^2_{x_2} = 1,000\ 0002$		$a = +0,298\ 8521$		$c = -0,267\ 9647$	
$x_{1,L}$	+0,453 7915	-0,539 8166	+0,708 9931	$c_{\text{mittel}} = -0,267\ 9611$			
$x_{2,L}$	+0,611 9378	-0,742 6494	+0,272 0367	2.) (A)	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$
$x^2_{x_{1,L}} = 0,999\ 9999$		$x^2_{x_{2,L}} = 1,000\ 0000$		a_{1j}	+0,524 5242	+0,5915056	+0,612 3688
1.) Bestimmung von b und c				a_{2j}	-0,159 5049	+0,774 5214	-0,612 3666
	$+(z_L + z)$	$-(y_L + y)$	$-(x_L - x)$	a_{3j}	-0,836 5110	+0,224 1376	+0,5000118
x_1	+1,671 9497	+0,530 5836	-0,723 2903	3.)	x	y	z
x_2	+1,237 5686	+0,894 9008	-0,400 8268	$x_{1,L}$	+0,453 7873	-0,539 8144	0,708 9978
$b = +0,517\ 6313$		$c = -0,267\ 9375$		$x_{2,L}$	+0,611 9369	-0,742 6436	+0,272 0554

Berechnung der Näherungsmatrix (A)

	1	2	3	4
(s_L)	+0,453 7873	+0,611 9369	+0,936 1148	+0,550 7348
	-0,539 8144	-0,742 6436	-0,237 9260	-0,794 1086
	+0,708 9978	+0,272 0554	+0,258 9994	-0,257 0657

Hierauf bestimmen wir die Koeffizienten der Fehlergleichungen für da_1, da_2, da_3 nach (12a bis e) und stellen sie in *Tab. 3* zusammen.

	da_1	da_2	da_3	$-l \cdot 10^{-4}$	Σ
1	-31,668	-42,031	-11,733	+ 3,6	+ 81,832
	+34,877	-16,391	-34,802	- 0,1	+ 16,416
2	-36,722	35,476	-14,243	+ 9,4	+ 7,041
	+21,204	- 0,093	-47,946	- 4,7	+ 31,535
3	-13,289	-60,861	- 7,878	+ 4,4	+ 77,628
	+16,141	- 5,852	-63,716	- 3,8	+ 57,227
4	-81,006	-51,657	-13,970	+11,1	+135,533
	+18,392	+35,361	-69,832	- 2,2	+ 18,279

Tabelle 3

Die Matrix des daraus gebildeten Gleichungssystems und seine Auflösung zeigt Tab. 4.

$$\begin{aligned} & 11354,749 + 7609,358 - 2412,290 - 1621,774 - 14930,043 \\ & 10950,978 + 677,981 - 1379,448 - 17858,869 \\ & 13043,985 + 258,724 - 11568,401 \\ & 285,270 + 2457,228 \\ & [pv] = 38,9341 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

$$da_1 = + 0,1086 \cdot 10^{-4} \pm 37 \cdot 10^{-7} = + 2,23 \pm 0,76$$

$$da_2 = + 0,0511 \cdot 10^{-4} \pm 36 \cdot 10^{-7} = + 1,05 \pm 0,75$$

$$da_3 = - 0,0025 \cdot 10^{-4} \pm 27 \cdot 10^{-7} = - 0,05 \pm 0,56$$

$$m_0 = \pm 2,79 \cdot 10^{-4} \text{ mm} = \pm 1,15,$$

Tabelle 4

Damit berechnen wir die Differentialmatrix (dA) und die Matrix $A = dA(A)$ der Drehung des Richtungsbündels.

$$dA = \begin{pmatrix} 1 & + 0,0000002 & + 0,0000051 \\ - 0,0000002 & 1 & + 0,0000109 \\ - 0,0000051 & + 0,0000109 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} + 0,5245199 & + 0,5915069 & + 0,6123712 \\ - 0,1584959 & + 0,7745188 & - 0,6123722 \\ - 0,8365154 & + 0,2241430 & + 0,5000020 \end{pmatrix}$$

Mit dieser können wir nach Gln. (3) die Richtungen s (Tab. 2a) in das Äquatorsystem transformieren, und aus den Richtungskoordinaten von H nach (1) die Koordinaten α , δ des Hochzieles berechnen.

	1	2	3	4	H
s'	+ 0,4537908	+ 0,6119381	+ 0,9361160	+ 0,5507333	+ 0,8744224
	- 0,5398223	- 0,7426467	- 0,2379290	- 0,7941060	- 0,4850884
	+ 0,7089896	+ 0,2720442	+ 0,2589920	- 0,2570772	- 0,0086504
	$\alpha_H = 330^{\circ}58'50,0$, $\delta_H = - 0^{\circ}29'44,3$				

Literatur:

- [1] Rinner, K.: Die räumliche Drehstreckung, Festschrift Tárcy-Hornoch.
 [2] Dufour, H.: Elements Fundamentaux de la Géodésie Tridimensionale, Inst. Geograph. National, Paris, Mai 1962.

Über mögliche Refraktionsanomalien infolge von Schichtenneigungen

Von Kurt Bretterbauer, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien)

Summary:

Computation of astronomic refraction is based on a spherically stratified atmosphere, being symmetrical with respect to the zenith. However, horizontal pressure- and temperature-gradients create a slope of atmospheric layers, which in turn effects systematic errors of astro-geodetic observations. The possible extent of these slopes is investigated. The effect on zenith distances can amount to $0'',4$ depending on the altitude of the star.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß bei der astronomischen Ortsbestimmung die Beobachtungen einer einzelnen Nacht oft systematisch verfälscht sind, obwohl