

Paper-ID: VGI\_196710



## Die Normalenfällung auf das Ellipsoid

Erhart Ecker <sup>1</sup>

<sup>1</sup> 8020 Graz, Grieskai 44/4

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **55** (3), S. 82–85

1967

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Ecker_VGI_196710,  
Title = {Die Normalenf{"a}llung auf das Ellipsoid},  
Author = {Ecker, Erhart},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
Pages = {82--85},  
Number = {3},  
Year = {1967},  
Volume = {55}  
}
```



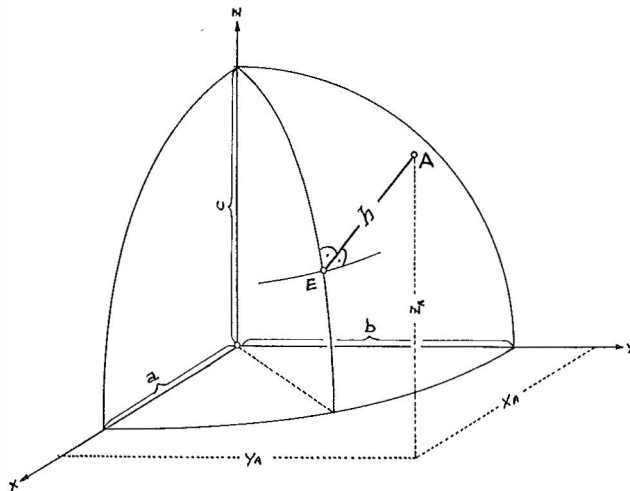
## Literatur

- [1] *Bode, H.*: Stand der Entwicklung von Brennstoffzellen, Erdöl und Kohle, 19 (1966), H. 9.  
 [2] *Bryan, G. M.*: Truchan und Ewing Long-Range SOFAR Studies in the South Atlantic Ocean, Journal of the Acoustical Society of America, Bd. 35, Nr. 3.  
 [3] *Douglas*: Aus der Entwicklung der Brennstoffzellen, Arch. Energ.-Wirtschaft, 14 (1960), H. 11.  
 [4] *Escher, Wyss*: Verstellpropeller, Prospekt 1964.  
 [5] *Kovit, B.*: Astro compass brings space navigation closer Space aeronautics Juni 1959.  
 [6] *Piip, A. T.*: Fine Structure and Stability of the Sound Channel in the Osean, siehe 2, Bd. 36, Nr. 10.  
 [7] *Pohlman, R.*: Die neuesten Ergebnisse der Ultraschall-Forschung in Anwendung und Ausblick auf die moderne Technik  
 und *Ahrens, E.*: Schall und Ultraschall in der Unterwasser-Nachrichtentechnik, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, H. 101.  
 [8] *Rabben, H. H.*: Einfache lichtelektrische Nachführvorrichtung für astronomische Fernrohre, Elektronische Rundschau (1956) Jg. 10, H. 7  
 [9] *Simon und Suhrmann*: Der lichtelektrische Effekt und seine Anwendungen, Seite 594/95.  
 [10] *Sprengel, U.*: Lageregelung und Stabilisierung von Raumfahrzeugen, Luftfahrttechnik-Raumfahrttechnik 13 (1967), Nr. 1.  
 [11] *Voith-Schneider*: Schiff's-Antrieb, Voith-Schneider Propeller und andere Druckschriften der Voith-Werke St. Pölten und Heidenheim.  
 [12] *Wille, P.*: Ein strömungsgünstiges Richtmikrofon für Wasserschall als Analogon des dielektrischen Stielstrahlers, Acustica, Bd. 17 (1966).  
 [13] *Zeiss, C.*: Photoelektrisches Sonnenleitrohr mit Verstärker, Prospekt und Beschreibung in AsPlan 56-012-d.

## Die Normalenfällung auf das Ellipsoid

Von Erhart Ecker, Graz

Die Aufgabe, auf ein Ellipsoid die Normale zu fällen, wurde bisher meist durch iterative Verfahren gelöst. Diese konvergieren mit zunehmender Entfernung des Aufpunktes vom Ellipsoid immer langsamer, weshalb ein direkter Lösungsweg gezeigt werden soll.



$$E = b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 - a^2 b^2 c^2 = \emptyset \quad \dots (1)$$

$$\nabla E = \begin{cases} 2b^2 c^2 x \\ 2a^2 c^2 y & x_N = x_E + t \cdot \nabla E \\ 2a^2 b^2 z & x_N \equiv x_A \end{cases} \quad \dots (2)$$

aus (2) folgt  $x_A - x_E = t \cdot \nabla E$

$$t = \frac{x_A - x}{b^2 c^2 x} = \frac{y_A - y}{a^2 c^2 y} = \frac{z_A - z}{a^2 b^2 z} \quad \dots (3)$$

und weiter

$$\left. \begin{aligned} (b^2 - c^2)yz - b^2 y_{AZ} + c^2 z_{AY} &= \emptyset \\ (c^2 - a^2)zx - c^2 z_{AX} + a^2 x_{AZ} &= \emptyset \\ (a^2 - b^2)xy - a^2 x_{AY} + b^2 y_{AX} &= \emptyset \end{aligned} \right\} \quad \dots (4)$$

Dies sind drei hyperbolische Zylinder, in der angeschriebenen Reihenfolge  $x$ -,  $y$ -,  $z$ - erzeugend und die betreffende Koordinatenachse enthaltend, ferner enthält jeder Zylinder den Aufpunkt und die Lotfußpunkte. In dieser Formulierung hat die Aufgabe maximal 6 reelle Lösungen.

Spezialisierung auf das Rotationsellipsoid:

Wir ersetzen  $b \rightarrow a$  und  $c \rightarrow b$ , womit (4) übergeht in (5):

$$\left. \begin{aligned} (a^2 - b^2)yz - a^2 y_{AZ} + b^2 z_{AY} &= \emptyset \\ (b^2 - a^2)zx - b^2 z_{AX} + a^2 x_{AZ} &= \emptyset \\ - x_{AY} + y_{AX} &= \emptyset \end{aligned} \right\} \quad \dots (5)$$

Der  $z$ -erzeugende hyperbolische Zylinder ebnet sich zur Meridianebene, womit die ganze Aufgabe als ebene behandelt werden kann. Schreibt man (5) in der Form

$$\left. \begin{aligned} z(a^2 - b^2) \cdot y - a^2 z \cdot y_A + b^2 z_A \cdot y &= \emptyset \\ z(a^2 - b^2) \cdot x - a^2 z \cdot x_A + b^2 z_A \cdot x &= \emptyset \\ y : x = y_A : x_A & \end{aligned} \right\} \quad \dots (6)$$

so sieht man, daß sich beide Zylinder mit der Meridianebene im selben Kegelschnitt -- einer Hyperbel -- schneiden.

Mit Einführung von Zylinderkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = z$$

gehen die aus (6) folgenden Schnitthyperbeln über in die Form

$$(a^2 - b^2) \cdot rz - a^2 r_{AZ} + b^2 z_{Ar} = \emptyset \quad \dots (7)$$

Diese Hyperbel liegt in der Meridianebene des Aufpunktes und enthält den Ellipsenmittelpunkt, den Aufpunkt und die Normalenfußpunkte als Schnittpunkte mit der Meridianellipse. Daraus folgt, daß beim Rotationsellipsoid maximal 4 reelle Lotfußpunkte und somit Lote existieren können. Das Ergebnis einer diesbezüglichen Untersuchung ist in der Tabelle I zusammengestellt.

$$b^2 r^2 + a^2 z^2 - a^2 b^2 = \emptyset \quad \dots E \quad \dots (8)$$

$$(a^2 - b^2)rz - a^2 r_{AZ} + b^2 z_{Ar} = \emptyset \quad \dots H$$

In der Geodäsie liegt immer der 3. Fall vor, denn die Evolute engt sich mit  $e'$  oder  $e \rightarrow \emptyset$  immer mehr gegen den Ellipsenmittelpunkt ein, so daß sich der Aufpunkt stets außerhalb der Evolute befindet.

Tabelle I

Lage des Aufpunktes zur Ellipsenevolute	Fußpunkte	Gleichungswurzeln	Lage der Hyperbel
A innerhalb	4	4 reelle	beide Äste schneiden die Ellipse
A auf der Evolute	3	2 reelle 2 zusammenfallende	ein Ast schneidet, der andere berührt die Ellipse
A außerhalb	2	2 reelle 2 konj. kompl.	Ein Ast schneidet, der andere meidet die Ellipse

Wir kombinieren nun  $E$  und  $H$  zu einem neuen Kegelschnitt

$$\lambda \cdot E + 2H = \emptyset \quad \dots (9)$$

und fragen nach jenem  $\lambda$ , für das dieser Kegelschnitt zerfällt.

$$\begin{vmatrix} \lambda b^2 & a^2 - b^2 & b^2 z_A \\ a^2 - b^2 & \lambda a^2 & -a^2 r_A \\ b^2 z_A & -a^2 r_A & -\lambda a^2 b^2 \end{vmatrix} = \emptyset \quad \dots (10)$$

daraus folgt

$$\lambda^3 + p \cdot \lambda + q = \emptyset$$

$$\text{mit} \quad p = \frac{r_A^2}{b^2} + \frac{z_A^2}{a^2} - e^2 e'^2 \quad \text{und} \quad q = \frac{2r_A z_A}{a^2} \cdot e'^2 \quad \dots (11)$$

Diese Gleichung hat wegen  $p > \emptyset$ ,  $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > \emptyset$  stets eine reelle und ein Paar konjugiert komplexer Lösungen, wovon hier nur die reelle in Frage kommt.

$$\lambda = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \dots (12)$$

Durch Umformung von (9) erhalten wir

$$r^2 + Arz + Bz^2 + Cr + Dz + E = \emptyset$$

mit

$$A = \frac{2e'^2}{\lambda}, \quad B = 1 + e'^2, \quad C = \frac{2z_A}{\lambda}, \quad D = -\frac{2r_A}{\lambda}(1 + e'^2), \quad E = -a^2 \quad \dots (13)$$

welches wegen Erfüllung der Zerfallsbedingung sich nach

$$(r + \alpha z + \beta) \cdot (r + \gamma z + \delta) = g_1 g_2 = \emptyset \uparrow \quad \dots (14)$$

zerlegen läßt.

Nach Ausscheiden der unzutreffenden Geraden des zerfallenden Kegelschnittes wird die Ellipse oder die Hyperbel mit der übrigbleibenden Geraden geschnitten, wodurch man die Fußpunkte bekommt. Die 2. Hauptaufgabe liefert die Entfernung vom Ellipsoid.

#### Ein Beispiel

Es wurde ein Punkt ( $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 0$ ) angenommen und der um  $h = 1000$  km entfernt liegende Aufpunkt A errechnet. Es ergab sich

$$A: \begin{cases} x_A = 5\ 224\ 908,546 = r_A \\ y_A = \emptyset \\ z_A = 5\ 194\ 532,693 = z_A \end{cases}$$

Der Berechnung wurden die Ellipsoiddimensionen  $a = 6\ 378\ 388$   
 $b = 6\ 356\ 909$

zugrundegelegt. Um annähernd gleich große Zahlen zu erhalten und dem Rechnen mit Zehnerpotenzen auszuweichen, wurde die Berechnung in einem im Maßstab  $1:a$  verkleinerten Modell durchgeführt.

$$\begin{aligned} \text{Damit wird } \bar{a} &= 1 \\ \bar{b} &= 0,99663\ 25347 \\ \bar{r}_A &= 0,81915\ 81550 \\ \bar{z}_A &= 0,81439\ 58462 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{es ergibt sich } p &= + 1,33875\ 73689 \\ q &= + 0,00903\ 15949 \\ u &= + 0,66465\ 68033 \\ v &= - 0,67140\ 28263 \\ \lambda &= - 0,00674\ 60230 \end{aligned}$$

Das Verfahren wird mit  $e, e' \rightarrow \emptyset$  immer ungenauer, denn mit  $e \rightarrow \emptyset$  geht  $|u| \rightarrow |v|$  und  $\lambda \rightarrow \emptyset$ . Es tritt hier ein Stellenverlust von 2 auf, weshalb die Zerfallsdeterminante nur sehr ungenau Null wird.

$$\begin{aligned} \text{Es ergibt sich } \left. \begin{aligned} \alpha &= - 1,01265\ 51778 \\ \beta &= + 0,00414\ 16640 \end{aligned} \right\} g_1 \\ \left( \begin{aligned} \gamma &= - 0,99418\ 74840 \\ \delta &= - 241,44887\ 028 \end{aligned} \right) \\ \text{und die Koordinaten } \left. \begin{aligned} \bar{z}_E &= 0,70353\ 63496 \\ \bar{r}_E &= 0,70829\ 80632 \end{aligned} \right\} E \end{aligned}$$

Der 2. Normalfußpunkt wurde beim Schnitt der Ellipse mit  $g_1$  ausgeschieden, weil für die geodätische Aufgabenstellung nur die kürzeste Entfernung interessant ist.

Die 2. Hauptaufgabe bringt schließlich die Entfernung

$$\begin{aligned} \bar{h} &= 0,15677\ 94245 \\ h &= a \cdot \bar{h} = \underline{\underline{999\ 999,999\ 87}} \end{aligned}$$

## Mitteilungen

In memoriam

wirkl. Hofrat i. R. Heinrich Planner

Am 15. Jänner 1967 starb nach langem, schwerem Leiden wirkl. Hofrat i. R. *Heinrich v. PLANNER-WILDINGHOF*, einer der letzten Beamten, die noch aus dem ehemaligen K. u. K. Militärgeographischen Institut kamen und vor dem zweiten Weltkriege führende Stellungen im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen inne hatten und, deren Lebenslauf zugleich ein österreichisches Geschichtsbild ist.