Paper-ID: VGI_196715

# Helmertsche Niveausphäroide

Karl Ledersteger [1]

[1] *Technische Hochschule Wien, 1040 Wien, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **55** (5), S. 125–128

1967

BibTEX:

```
@ARTICLE{Ledersteger_VGI_196715,
Title = {Helmertsche Niveausph{\"a}roide},
Author = {Ledersteger, Karl},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {125--128},
Number = {5},
Year = {1967},
Volume = {55}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
# ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 5 Baden bei Wien, Ende Oktober 1967 55. Jg.

## Helmertsche Niveausphäroide

($k^2E$, $\omega$, $a$, $\gamma_0$, $J_2$)

von *K. Ledersteger*, Wien

Die Frage einer dynamischen Bestimmung der geometrischen Parameter des Normalsphäroides wurde bereits in § 27 des Reports [1, S. 201—205] untersucht. Ausgehend von den Daten

$$\begin{aligned} k^2E &= (398606{,}24 \pm 5{,}06)\, 10^{15}\ \mathrm{cm^3 sec^{-2}} && \text{W. Kaula [2]} \\ \gamma_0 &= 978{,}032\ \mathrm{cm\ sec^{-2}} && \text{W. Heiskanen [3]} \end{aligned} \tag{1}$$

wurde eine einparametrige Gleichgewichtsfigur ($k^2E$, $\omega$, $\gamma_0$, $J_2$) berechnet und die Änderung von Achse und Abplattung bei einer Änderung der physikalischen Bestimmungsstücke $k^2E$, $\gamma_0$ und $J_2$ geprüft. Dabei waren natürlich die Größen 4.0., nämlich die Massefunktion $J_4$ und der Darwinsche Formparameter $f_4$ fast unverändert.

Halten wir jetzt den Achsenwert der Frau Fischer fest, so können mit den Daten

$$a = 6{,}378165 \,.\, 10^8\ \mathrm{cm}; \quad \omega^2 = 5{,}317496 \,.\, 10^{-9}\ \mathrm{sec^{-2}}; \quad J_2 = 108271 \,.\, 10^{-8}, \tag{2}$$

worin $J_2$ den modernsten Satellitenwert der statischen Abplattung repräsentiert, gänzlich unabhängig vom Gleichgewicht Helmertsche Niveausphäroide in Abhängigkeit von $k^2E$ und $\gamma_0$ berechnet werden. Von Interesse sind hier die Abplattung $e$, sowie $J_4$ und $f_4$, welche aus den Gleichungen:

$$\bar{\varepsilon} = \omega^2 a^3 / k^2 E; \quad \frac{1}{2}(3J_2 + \bar{\varepsilon}) = (e - e^2 + e\,\bar{\varepsilon}) - \frac{5}{8} J_4;$$

$$\left(\gamma_0 a^2/k^2E + \frac{3}{2}\bar{\varepsilon} - 1\right) = (e - e^2 + e\bar{\varepsilon}) - \frac{5}{2}J_4; \tag{3}$$

$$f_4 = 3{,}5\ e^2 - 2{,}5\ e\bar{\varepsilon} + 4{,}375\ J_4$$

hervorgehen. Wegen des mittleren Fehlers in Kaulas Bestimmung von $k^2E$ wurden der Untersuchung die drei Werte $k^2E = 398601, 2702$; $398606, 2702$ und $398611, 2702 \,.\, 10^{15}$ zugrundegelegt und jedesmal die Grenzlösung $J_4 = 0$ sowie zwei weitere Sphäroide berechnet, wofür die letzte Bestimmungsgröße $\gamma_0$ geeignet gewählt wurde. Man findet:

$k^2E = 398601, 2702 \,.\, 10^{15}$ cm³ sec⁻²

| gal | $e$ | $e^{-1}$ | $J_4$ | $f_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\gamma_0 = 978{,}02169$ : | $335442{,}2 \,.\, 10^{-8}$; | 298,114; | 0,0 ; | $+ 1035{,}5 \,.\, 10^{-8}$ |
| 978,02500 : | 335329,2 | 298,214 | $- 180{,}2 \,.\, 10^{-8}$ | + 245,4 |
| 978,02800 : | 335226,8 | 298,306 | − 343,5 | − 470,6 |

$k^2E = 398606{,}2702 \,.\, 10^{15}$ cm³ sec⁻²

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\gamma_0 = 978{,}03400$ : | $335440{,}0 \,.\, 10^{-8}$; | 298,116; | $0{,}0 \,.\, 10^{-8}$; | $+ 1035{,}5 \,.\, 10^{-8}$ |
| 978,03700 : | 335337,6 | 298,207 | − 163,3 | + 319,5 |
| 978,04000 : | 335235,2 | 298,298 | − 326,6 | − 396,4 |

$k^2E = 398611{,}2702 \,.\, 10^{15}$ cm³ sec⁻²

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\gamma_0 = 978{,}04631$ : | $335437{,}9 \,.\, 10^{-8}$; | 298,118; | $0{,}0 \,.\, 10^{-8}$; | $+ 1035{,}5 \,.\, 10^{-8}$ |
| 978,04900 : | 335346,1 | 298,199 | − 146,4 | + 393,7 |
| 978,05200 : | 335243,7 | 298,290 | − 309,7 | − 322,2 |

Die Änderung von 1 mgal in der Äquatorschwere bewirkt eine Änderung $\Delta e = 34{,}13 \,.\, 10^{-8}$ und in weiterer Folge die Änderungen $\Delta J_4 \doteq 1{,}6 \Delta e = 54{,}6 \,.\, 10^{-8}$ und $\Delta f_4 \doteq 7{,}0\ \Delta e = 238{,}9 \,.\, 10^{-8}$! Man erkennt die hohe Empfindlichkeit der Massefunktion $J_4$ und besonders des Formparameters $f_4$.

Da mit großer Sicherheit der Wert der Äquatorschwere zwischen den Grenzen $978{,}032 \leqq \gamma_0 \leqq 978{,}037$ liegt, kann man aus dem Normalsphäroid ($J_4 = 315{,}5 \,.\, 10^{-8}$) leicht engere Grenzen für die wichtige Größe $k^2E$ gewinnen. Wir benützen hierzu die Gleichung

$$k^2E = (\gamma_0 a^2 + \omega^2 a^3) : \left(1 + \frac{3}{2}J_2 - \frac{15}{8}J_4\right) \tag{4}$$

und finden:

$$398603{,}1036 \,.\, 10^{15} \leqq k^2E \leqq 398605{,}1343 \,.\, 10^{15} \tag{5}$$

oder

$$346141{,}56 \,.\, 10^{-8} \geqq \bar{\varepsilon} \geqq 346139{,}80 \,.\, 10^{-8} \,. \tag{5}$$

Schließlich liefert die zweite Gleichung 3) für die Abplattung $e = 335243 \,.\, 10^{-8}$ oder $e^{-1} = 298{,}291$, ferner die vierte Gleichung $f_4 = - 347{,}6 \,.\, 10^{-8}$.

Besonders bemerkenswert ist der Umstand, daß sich mit Kaulas Wert für $k^2E$ und für $\gamma_0 = 978{,}037$ gal fast exakt der bisher aus den künstlichen Satelliten gewonnene Wert $J_4 = - 165 \,.\, 10^{-8}$ ergibt. Da aber unsere empirischen Ausgangsdaten ($k^2E$, $\omega$, $a$, $\gamma_0$, $J_2$) keineswegs fehlerfrei sind, ist dies eher als Zufall zu werten. Tatsächlich folgt ja dasselbe $J_4$ für unendlich viele Wertepaare $k^2E$ und $\gamma_0$. Erst wenn diese Daten genügend gesichert sind, können die Gleichungen des Helmertschen Systems zur Kontrolle einer empirischen Bestimmung der übrigen Parameter herangezogen werden.

Ferner haben wir zu beachten, daß sowohl die Helmertschen Niveausphäroide $U_4$ wie auch die vollständigen Niveausphäroide $U_\infty$ bloß durch Abspaltung bestimmter Glieder aus der Potentialentwicklung $W$ hervorgegangen sind. Die Massefunktionen $J_{2i}$ gehören also der tatsächlichen Erde an und sind mit dem Einfluß der Massenstörungen behaftet. Abstrahiert man aber von der Restfunktion $T = W - U$, so sind dieselben Massefunktionen Stokessche Konstanten von zahllosen rotations- und äquatorsymmetrischen Massenanordnungen, die alle auseinander durch Verschiebungen in homogenen konfokalen Ellipsoidschalen oder in homogenen konzentrischen Kugelschalen hervorgehen. Unter diesen können wir eine als „wesentlich" herausgreifen, die dasselbe Hauptträgheitsmoment $C$ um die Rotationsachse wie die wirkliche Erde hat. Für diese wesentliche Massenordnung gibt es verschiedene Möglichkeiten:

a) Sie ist eine Gleichgewichtsfigur, die sämtliche Massenmomente mit der wirklichen Erde gemeinsam hat. Dies wäre der Idealfall des Normalsphäroides, der aber bereits als unmöglich erwiesen ist.

b) Es handelt sich um eine Gleichgewichtsanordnung, die für eine geringfügig andere, größere Rotationsgeschwindigkeit zur Gleichgewichtsfigur wird. Dies ist denkbar, weil die Erde kein in sich geschlossenes Massensystem ist. Erteilt man dieser Gleichgewichtsfigur die heutige Rotationsgeschwindigkeit, so resultiert das Normalsphäroid, das vom Weltozean bedeckt ist, so daß die Oberfläche der Massenkonfiguration auf jeden Fall Niveaufläche ist.

c) Trotzdem aus dem eben genannten Grunde die Oberfläche stets Niveaufläche ist, muß der feste Teil der wesentlichen Massenordnung überhaupt keine Gleichgewichtsanordnung repräsentieren. Dieser Fall ist der wahrscheinlichste. Dann aber haben wir die Gleichgewichtsfigur und das Normalsphäroid der Erde so zu bestimmen, daß sie mit der wirklichen Erde die Trägheitsmomente $C$ und $A^* = (A + B)/2$ und damit die statische Abplattung $J_2$ gemeinsam haben und die übrigen Massefunktionen $J_{2i}{}^*$ möglichst wenig von den Massefunktionen $J_{2i}$ des wirklichen Erdkörpers abweichen. Beschränkt man sich auf die Näherung 4.0., so liegt die Hauptschwierigkeit in der sicheren Bestimmung der Differenz $(J_4 - J_4{}^*)$.

Für $J_4{}^*$ lassen sich leicht die Grenzen angeben. Das Minimum des Absolutbetrages tritt in der Parabel $F = |J_4{}^*| : J_2{}^2 = 15/7$ auf, das Maximum in der Parabel $A = a \,.\, df_4/da = 0$, also $251{,}2 \,.\, 10^{-8} \leqq |J_4{}^*| \leqq 332{,}4 \,.\, 10^{-8}$. Eine gründliche Untersuchung ergab für das Normalsphäroid $J_4{}^* = -\,315{,}5 \,.\, 10^{-8}$. Soll für die wirkliche Erde $J_4 = -\,165 \,.\, 10^{-8}$ sein, so gilt $(J_4 - J_4{}^*) = +\,150{,}5 \,.\, 10^{-8}$, was einer Änderung der Abplattung $\Delta e = +\,94 \,.\, 10^{-8}$ und einer Änderung der Äquatorschwere $\Delta\gamma_0 = -\,4{,}41$ mgal entspricht. Gleichzeitig ändert sich der Formparameter um $\Delta f_4 = +\,658 \,.\, 10^{-8}$, d. h. er wird stark positiv. Die Änderung $\Delta\,|J_4| = -\,150{,}5 \,.\, 10^{-8}$ wäre 2,5 mal größer als die gesamte Änderung in der ganzen Vertikalreihe der Wiechert-Modelle ($E$, $\omega$, $a$, $J_2$), während sie in Wirklichkeit bloß durch die Massenstörungen in der Erdkruste bedingt sein müßte. Ferner kann, ausgehend vom Normalsphäroid, diese starke Abnahme des Absolutbetrages von $J_4$ nur durch eine kräftige Massenkonzentration nach innen bewirkt werden, was mit einem starken Absinken des Trägheitsmomentes $C$ verbunden sein muß. Zur Wiederherstellung des wahren Wertes von $C$ wären für die im obigen Sinne definierte wesentliche Massenanordnung beträchtliche Massenverschiebungen in konfokalen, homogenen Ellipsoidschalen nach oben erforderlich, die auf eine sicherlich physikalisch unmögliche Massenverteilung führen.

Dasselbe zeigen auch die obigen Figurenreihen ($k^2E$, $\omega$, $a$, $J_2$). Die Abnahme von $|J_4|$ ist mit einer Schwereabnahme verbunden, die auf eine Massenkonzentration und eine Abnahme von $C$ hinweist. Läßt man diese gelten, dann ist das im Helmertschen Sinne einfach durch $f_4 = 0$ definierte *genäherte* Niveauellipsoid physikalisch möglich und kann sogar als Bezugskörper dienen, falls man auf den physikalischen Zusammenhang zwischen den Massenstörungen einerseits und den Schwerestörungen, Lotabweichungen und Undulationen andererseits verzichtet.

Die Massefunktion $J_4{}^*$ des Normalsphäroides kann daher nur geringfügig von der Massefunktion $J_4$ des wirklichen Erdkörpers abweichen. Dies ist auch für die weitgehend isostatisch kompensierte Topographie gar nicht anders zu erwarten, ja umgekehrt direkt ein Hinweis auf die isostatische Kompensation der topographischen Massen.

*Literatur*

[1] *Ledersteger, K.:* „Multi-parametric theory of spheroidal equilibrium figures and the normalspheroids of earth and moon“, Report, June 1966.

[2] *Kaula, W. M.:* „Determination of the earth's gravitational field“, Reviews of Geophysics, Vol. I, Richmond, Virg. 1963.

[3] *Heiskanen, W. A.:* „Potentialities of Satellite Geodesy“, Amsterdam 1963 (in Use of Artificial Satellites for Geodesy, ed. by G. Veis).

# Zur Fehlertheorie der Höhenstandlinie

Von *Gerhard Brandstätter*, Graz

## 1. Allgemeine Formulierung der simultanen Ortsbestimmung

Die herkömmlichen simultanen Methoden der astronomischen Ortsbestimmung verbinden stets *einen* der beiden direkt oder indirekt meßbaren Parameter Azimuth $a$ oder Zenitdistanz $z$ des Horizontsystems mit der Bestimmung der Durchgangszeit $\theta$ durch den entsprechenden Vertikal oder Almukantarat. Dies gilt auch für die Spezialmethoden, bei denen eine Zeitmessung nötig ist (Zeitbestimmung im Meridian und ersten Vertikal mit den Parametern $a$, $\theta$ bzw. $z$, $\theta$, Breitenbestimmung im ersten Vertikal mit $a$, $\theta$). Als direkte Messung sei die Ablesung an Kreisen bezeichnet, als indirekte die Verwendung von Libellen, Quecksilberhorizonten und Kompensatoren.

Wird ein hier allgemein mit $q$ bezeichneter Paramter des Horizontsystems gemessen, dann ist dieser mittels transzendenter Funktionen (Sätze der sphärischen Trigonometrie im nautischen Dreieck) mit den Parametern der beiden Äquator-