Erforderliche Rechengenauigkeit beim vermittelnden Ausgleich

Kornelius Peters [1]

[1] *Technische Hochschule Wien, 1040 Wien, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **56** (1), S. 12–21

1968

Der vorstehende Bericht dient der Bekanntmachung der Einrichtung der Prüfbasis Wien-Prater, die allen Interessenten offen steht, und zugleich ein wesentlicher Beitrag des staatlichen Vermessungsdienstes zur Erreichung der Maßstabseinheitlichkeit bei geodätischen Messungen — zum gleichen Zweck wurden bereits vor einigen Jahren bei allen Vermessungsämtern Justier- und Komparierbasen für optische (Doppelbild-) Entfernungsmesser eingerichtet — und somit zur Erreichung der im zukünftigen Vermessungsgesetz vorausgesetzten gegebenen Grundlagen sein soll. Daneben sollte gezeigt werden, daß mit relativ einfachem, man könnte sagen improvisiertem, instrumentellem (und personellem) Aufwand eine der offiziellen Basismeßgenauigkeit gleiche erreicht werden kann. Auch die Aufzeigung der Probleme und der Problematik der Drahtkomparierungsverfahren erscheint von allgemeinem Interesse.

Literaturverzeichnis

[1] *Peters, K., Korschinek, E.:* Geodimetertest auf der Praterbasis. ÖZfV, 55 (1967), Nr. 5, S. 133—140.

[2] *Kneissl, M.:* Normalstrecke, Basis und Basisvergrößerungsnetz München-Ebersberg. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Naturwiss. Klasse, Abh., Neue Folge, Heft 97 (München 1959), S. 33.

[3] *Gigas, E.:* Handbuch für die Verwendung von Invardrähten bei Grundlinienmessungen. Reichsamt f. Landesaufnahme, Berlin 1934.

[4] *Jordan-Eggert-Kneissl:* Handbuch der Vermessungskunde. 10. Ausgabe, Bd. IV/I, Stuttgart 1958.

[5] *Kneissl, M., Sigl, R.:* Basis Ebersberger Forst-Invardrahtmessungen der I. Abteilung des Deutschen Geodätischen Forschungsinstituts 1958. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-Naturwiss. Klasse, Abh., Neue Folge, Heft 99 (München 1959), S. 23.

[6] *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen,* Triangulierungsabteilung-Archiv: Operat N 326.

Erforderliche Rechengenauigkeit beim vermittelnden Ausgleich

Von *Kornelius Peters*, Wien

Auf Grund geläufiger Formeln über numerisches Rechnen und der Beziehungen zwischen Netzbild und Koordinatenfehler wird die beim vermittelnden Netzausgleich erforderliche Stellenanzahl der Normalgleichungskoeffizienten abgeleitet.

1. Einleitung. Begriffe aus dem numerischen Rechnen

Zu einer Zeit, in der die elektronische Datenverarbeitung für den Netzausgleich praktisch allein zuständig ist, erscheint ein Artikel über die dabei erforderliche Rechengenauigkeit auf den ersten Blick anachronistisch. Für den Geodäten, der seine Meßwerte zur Bearbeitung abgibt, bieten sich Speicherkapazität und die Arbeit des Programmierers jenseits von Gut und Böse. Doch wird es bei den meisten geodätischen Netzen etwa aus der Zivilpraxis möglich sein, sie auf einem Tischcomputer bearbeiten zu lassen, wenn die zentralen Anlagen überlastet oder weit vom Geschäftssitz entfernt, die Netze selbst von geringem Umfang sind. Und nun wird die Anzahl der verwendeten Stellen wegen der relativ kleinen Speicherzahl zum wichtigsten

Problem. Zwar bieten die einschlägigen Firmen Programme über Auflösung linearer Gleichungssysteme an, doch sind diese nicht auf den vermessungstechnischen Bedarf zugeschnitten. Soll das System auf einer Tischrechenmaschine gelöst werden, ist die Frage der notwendigen Genauigkeit offensichtlich auch dominant. Ausgleichungen nach bedingten Beobachtungen treten derzeit wegen des wesentlich unübersichtlicheren Rechnungsganges in den Hintergrund, sie sollen deshalb nicht behandelt werden.

Die grundlegensten Sätze des numerischen Rechnens lauten ([1]): Der maximale Fehler einer Summe oder Differenz ist gleich der Summe der maximalen Fehler der einzelnen Größen.

z. B. $5.2 + 10.367 = 15.6$ ... (1)

Der maximale relative Fehler eines Produktes oder eines Quotienten zweier Zahlen ist gleich der Summe der maximalen relativen Fehler der einzelnen Zahlen.

z. B. $10.0345 \times 0.22 = 2.2, \quad 15:3.0074 = 5.0$ ... (2)

Daraus folgt bereits: Die Normalgleichungskoeffizienten sind etwa so genau wie die Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen, z. B. $\frac{d\,aa}{aa} \doteq 2\frac{d\,a}{a}$. ... (3)

Sei a z. B. berechnet als 2.05, genügt es, aa als 4.10 anzugeben.

Bewegen sich die Widersprüche im Bereich ein- bis zweiziffriger Zahlen (etwa cm oder ^{cc}), wobei es bekanntlich widersinnig ist, mehr Stellen anzugeben als die Dimension der Angabe des Gerätes beträgt, sind die entsprechenden Koeffizienten aw auch nur auf so viele Ziffern genau.

$w = 10,^{cc}$, $a = 25.7435$ ergibt $aw = 257$, man müßte den Richtungskoeffizienten also nicht so genau berechnen.

Bereits diese elementaren Überlegungen ergeben gegenüber dem rein mechanischen Ausschreiben und Mitführen der Stellenzahlen eine Reduktion der mitgeführten Ziffern um fast 50% und damit eine entsprechende Erleichterung der manuellen Berechnung von Normalgleichungen oder der Speicherplätze von Tischcomputern. Während bekanntlich der Rechenaufwand bei Normalgleichungsauflösungen etwa mit der dritten Potenz der Anzahl der Netzpunkte steigt, dürfte die Stellenzahl in erster Näherung linear in diesen Aufwand eingehen, da eine Verquickung von Produkt- und Summenbildung vorliegt, also quadratischer und skalarer Operationen.

2. *Lineare Gleichungssysteme*

Für die Auflösung linearer Gleichungssysteme ist ihre „condition“ maßgebend. Dieser englische Fachausdruck läßt sich nicht wörtlich übersetzen, sein Sinn wird am ehesten durch „Gestaltung“ wiedergegeben.

Ist ein Gleichungssystem „ill conditioned“, „schlecht konditioniert“, „bösartig“, zeigt es folgende Symptome: ([1]):

a) Will man die Lösungen des Gleichungssystems auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen genau bestimmen, so muß man in den Zwischenrechnungen eine wesentlich höhere Anzahl von Dezimalstellen mitnehmen, um die Rundungsfehler hinreichend klein zu halten. ... (4)

b) Kleine Änderungen der Koeffizienten bewirken große Änderungen in der Lösung. ... (5)

c) Die Determinante der Koeffizienten ist klein im Vergleich zu den einzelnen Koeffizientenprodukten, aus denen sie sich berechnet. ... (6)

d) Näherungslösungen, die beträchtlich von der exakten Lösung abweichen, sind mit sehr kleinen Residuen verbunden. (Im Vermessungswesen würde dann etwa die Summenprobe „genau" stimmen). ... (7)

Gute Konditionierung eines Gleichungssystems läßt sich z. B. daran erkennen, daß die Diagonalelemente a_{11}, a_{22} ... a_{nn} der Koeffizientenmatrix (bei uns $[aa]$, $[bb]$ ....) sehr viel größer sind als die Elemente außerhalb der Diagonalen, d. h. die a_{ij} mit $i \neq j$. Sind alle a_{ij} $(i \neq j)$ gleich ø, dann ist das System ideal konditioniert. ... (8)

Die in [1] angegebenen Methoden, die Kondition eines Gleichungssystems zu erforschen, erfordern Kenntnis der Näherungsauflösungen, sind also für eine a priori-Abschätzung der Rechengenauigkeit wenig geeignet.

Es sei höchstens auf ein offensichtlich schlecht konditioniertes System der Form

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= c \\ (ka + \alpha)x_1 + (kb + \beta)x_2 &= kc + \gamma \end{aligned} \qquad \ldots (9)$$

hingewiesen, also näherungsweise proportionale Gleichungen. (α, β, γ stellen kleine Größen dar).

Die Auflösung ergibt $x_1 = \dfrac{c\beta - b\gamma}{a\beta - b\alpha}$, $x_2 = -\dfrac{c\alpha - a\gamma}{a\beta - b\alpha}$ ... (10)

$x_1 = \dfrac{c - b\dfrac{\gamma}{\beta}}{a - b\dfrac{\alpha}{\beta}}$ zeigt in Zähler und Nenner jeweils den nachteiligen Einfluß der unbestimmten Formen $\dfrac{\gamma}{\beta}$ oder $\dfrac{\alpha}{\beta}$, ähnliches gilt für x_2.

Wesentlich mehr auf vermessungstechnische Gegebenheiten zugeschnitten sind Fehlerbetrachtungen nach dem Matrizenkalkül. ([1], [2]).

In der Praxis werden lineare Gleichungssysteme zwar sehr selten durch Matrizeninversion gelöst, doch sind die Genauigkeitsschwankungen innerhalb der üblichen Auflösungsmethoden einschließlich der Matrizenverfahren kleiner als die in Frage kommenden Dimensionen ([1], [4]).

Das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ wird bekanntlich durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b} \text{ gelöst.} \qquad \ldots (11)$$

$\mathbf{x}$ ist bei uns der Vektor der Koordinatenverbesserungen, $\mathbf{A}$ die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{B}$ und $\mathbf{b}$ der Vektor der Einflüsse der Messungswidersprüche $\mathbf{B}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{w}$.

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & p_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & p_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

im Fall unkorrelierter Beobachtungen. Meist wird

$\mathbf{P} = \mathbf{E}$ (gleichgewichtige Messungen).

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{vmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ \dots\dots \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] \dots\dots \\ [pba] & [pbb] \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} [paw] \\ [pbw] \\ \dots\dots \end{vmatrix} \qquad \dots (12)$$

Nun hängt die Kondition von (11) nur von **A**, nicht von **b** ab. Sind die Koeffizienten mit Fehlern behaftet, gegeben durch Matrizen

$$\delta\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \delta\,[paa] & \delta\,[pab] \dots\dots \\ \delta\,[pba] & \delta\,[pbb] \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \end{vmatrix}, \qquad \delta\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \delta\,[paw] \\ \delta\,[pbw] \\ \dots\dots \end{vmatrix}$$

und wird die entsprechende Lösung mit $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ bezeichnet, dann gilt $(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$.

Bei Vernachlässigung des Terms 2. Ordnung $\delta\mathbf{A}\;\delta\mathbf{x}$ ergibt sich

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\delta\mathbf{b} - \delta\mathbf{A}\mathbf{x}) \qquad \dots (13)$$

3. Grobe a priori-Abschätzungen

Bei Normalgleichungen nach vermittelnden Beobachtungen läßt sich aus (13) folgendes ablesen ([2]).
$\mathbf{A}^{-1}$ ist nicht nur die inverse Matrix der Koeffizienten, sondern bekanntlich auch die Matrix der Gewichtskoeffizienten

$$\begin{vmatrix} Qx_1x_1 & Qx_1y_1 & Qx_1x_2 & Qx_1y_2 \dots\dots \\ Qy_1x_1 & Qy_1y_1 & Qy_1x_2 & Qy_1y_2 \dots\dots \\ Qx_2x_1 & Qx_2y_1 & Qx_2x_2 & Qx_2y_2 \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{vmatrix}$$

also $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{Q}$. $\qquad \dots (14)$

(13) hat nun einige Ähnlichkeit mit dem Ausdruck für die mittleren quadratischen Koordinatenfehler $\mathbf{M} = m_0{}^2\,\mathbf{Q}$
($\mathbf{M}$ = Kovarianzmatrix)
oder auf die unkorrelierten Werte bezogen,
$\mathbf{m} = m^2{}_0\,\mathbf{Q}\,\mathbf{E}_e$ $\qquad \dots (16)$

wobei $\mathbf{m} = \begin{vmatrix} m^2x_1 \\ m^2y_1 \\ m^2x_2 \\ \dots\dots \end{vmatrix}$, **E** Einheitsmatrix, $\mathbf{e} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{vmatrix}$

Aus (13) und (15) sieht man: je schlechter das Netz bestimmt, umso größer die Glieder von **Q**, umso schlechter ist auch das Normalgleichungssystem konditioniert, umso mehr Ziffern muß man bei der Auflösung mitführen, um eine vorgegebene *Rechenschärfe* zu erreichen. Des weiteren sollen die Näherungswerte $\mathbf{x}$ möglichst gut sein, d. h. nahe am Erwartungswert liegen, nicht nur, um es in $\mathbf{A}$ bei Gliedern erster Ordnung der Taylor-Entwicklung bewenden zu lassen ([4]), sondern vor allem, um den Vektor $\delta \mathbf{Ax}$ mit möglichst kleinen Komponenten zu erhalten. Vor allem sind auch systematische Fehler bei der Erstellung der Näherungswerte von Nachteil, wenn z. B. alle $\mathbf{x}$ gleiches Vorzeichen besitzen. $\delta \mathbf{b}$ ist gemäß (2) auch abhängig von der Meßgenauigkeit; $\delta \mathbf{A}$ wird man nach (2) und (3) auch mit Rücksicht auf $\delta \mathbf{b}$ dimensionieren.

Wie groß die Meßgenauigkeit sein muß, um den geforderten Lagefehler nicht zu überschreiten, ist in der Literatur häufig behandelt worden (etwa in [4], S. 292, mit Literaturangaben). Für ihre Zeit sehr modern wirken die Artikel [7] und [8].

Schade, daß für diese Überlegungen im neuen „Jordan-Eggert-Kneissl" kein Platz mehr war. Schon knapp nach der Jahrhundertwende wird dort nachgewiesen, daß zwei- bis dreiziffrige Berechnung der Normalgleichungskoeffizienten genügt. Der Auffassung aus [8], daß diese Koeffizienten sogar mit weniger Ziffern eingeführt werden können, als das Resultat besitzen soll, wofür auch eine Modifikation des Verschiebungssatzes bemüht wird, kann man sich heute nicht mehr anschließen. Die manchmal geäußerte Ansicht, größere Widersprüche ergäben im Falle schlechter Kondition eine schärfere Rechnung, wozu man die Näherungswerte absichtlich verschieben sollte, wird durch (13) teilweise widerlegt. Wohl nähert sich ein System mit durchwegs sehr kleinen Widersprüchen durch Verschwinden von $\mathbf{b}$ einem homogenen System, für das es bekanntlich außer der trivialen Lösung nur dann eine gibt, wenn die Koeffizientendeterminante $|\mathbf{A}|$ verschwindet. Meist wird aber die triviale Lösung $\mathbf{x} = \underline{0}$ zutreffen, d. h. die vorläufigen Werte sind gleich den wahrscheinlichsten. Im Falle schlechter Kondition wird $\mathbf{A}^{-1}$ groß ($|\mathbf{A}|$ klein). Das Verschieben der Näherungswerte ist nun nur dann sinnvoll, wenn dadurch die Richtungskoeffizienten geändert und $\mathbf{A}^{-1}$ dadurch verkleinert wird. Dafür gilt dann die Taylorentwicklung nicht mehr in aller Strenge. Beläßt man $\mathbf{A}^{-1}$, wird $\delta \mathbf{b}$ um den Vektor $\delta \mathbf{w}$ vergrößert, auch der Vektor $\mathbf{x}$ wird größer. Die relativen Genauigkeiten von (13) sind nun angeglichen. Vernünftigerweise wird man so schlecht konditionierte Systeme gar nicht ausgleichen, sondern eine zusätzliche Bestimmung einführen.

Schreibt man (13) in klassischer Schreibweise an, ergibt sich für die erste Komponente

$$\begin{aligned} \delta\, dx_1 = {} & Qx_1x_1\,(\delta[paw] - \delta\,[paa]dx_1 - \delta\,[pab]dy_1 - \delta\,[pac]dx_2 \ldots .) \\ & + Qx_1y_1\,(\delta\,[pbw] - \delta\,[pba]dx_1 - \delta\,[pbb]dy_1 - \delta\,[pbc]dx_2 \ldots .) \\ & + Qx_1x_1\,(\ldots .) \end{aligned} \qquad \ldots (17)$$

Die größte Komponente von $\delta \mathbf{b} - \delta \mathbf{Ax}$, multipliziert mit dem größten Element der $\mathbf{Q}$-Matrix, ergibt nun zweifellos eine Größe ungefähr in der Dimension von $\delta dx_{\max}$, da die Diagonalglieder von $\mathbf{Q}$ maßgeblich für die absoluten Lagefehler sind, welche in einem zusammenhängenden Netz die relativen überwiegen werden. Für diesen Wert gilt $\delta\, dx_{\max} = Q_{xx\,\max} \cdot (\delta \mathbf{b} - \delta \mathbf{Ax})_{\max}$; in Analogie zu $m^2{}_{x\,\max} = m^2{}_0\, Q_{xx\,\max}$ ... (18)

Nun werde in erster, gröbster Näherung bei Streckenmessungen $Q_{\max} = 1$ gesetzt, da das Ausgleichungsergebnis nicht schlechter sein soll als der mittlere Fehler einer Messung. Bei Richtungsmessungen hat $Q_{\max}$ die Dimension $\frac{s^2}{\rho^2}$. Sind die Richtungskoeffizienten auf dm und ^{cc} bezogen und nimmt man für s die mittlere Seitenlänge des Netzes, wird beispielsweise für $s_M = 1$ km $Q_{\max} = \frac{(1000\,.\,10)^2}{\rho^{cc2}} \doteq \doteq \frac{10^8}{4\,.\,10^{11}} = \frac{1}{4000}$.

Für einen groben Überschlag gilt der $Q_{\max}$-Wert des Richtungsnetzes auch für ein kombiniertes Richtungs- und Streckennetz, da die Strecken bekanntlich in Richtungen umgerechnet werden ([3]). ... (19)

Die Rechengenauigkeit ist offensichtlich von der Genauigkeit des Meßmittels unabhängig (13).

Mit (18) und (19) kann man nun bereits errechnen, daß in einem normal konditionierten Gleichungssystem bei Richtungsmessungen, falls man die Koordinatenverbesserungen auf Zehntelmillimeter errechnen will, alle Normalgleichungskoeffizienten nur auf ganze Zahlen genau berechnet werden müssen! Die dx_i kann man a priori ungefähr mit 1 (= 1 dm) annehmen, falls man *die besten Bestimmungen für die vorläufigen Werte verwendet.*

4. *Abschätzung auf Grund des Netzbildes*

Das Bestreben bei einem Netzausgleich wird immer dahingehen, die Koordinatenverbesserungen auf eine gewisse vorgegebene Rechengenauigkeit zu bestimmen, etwa auf mm genau. Diese Rechengenauigkeit wird in derselben Dimension oder eine Einheit besser sein als der angestrebte Punktfehler eines ausgeglichenen Punktes.

In (13) und (17) braucht man daher die zahlenmäßige Dimension von $\mathbf{Q}$, d. h. einen Überblick über ihre einzelnen Elemente.

Betrachten wir einmal eine Einzelpunkteinschaltung. Der mittlere Punktlagefehler ist eine gute Abschätzung für das Maximum des Einflusses der größeren symmetrischen Gewichtsreziproken und des gemischten Gliedes. Da er unabhängig vom Koordinatensystem ist, kann man ihn leicht a priori aus einem Netzbild bestimmen ([5]).

In Tabelle 1 folgt nun ein kurzer Überblick über etwa vorkommende Kombinationen bei einem Richtungsnetz, wobei die Richtungskoeffizienten und Koordinatendifferenzen in dm, die Richtungen in ^{cc} gerechnet sind.

Tabelle 1

Mittlere Seitenlänge des Winkels (km)	Größe des Winkels (Außenrichtungen)			
	100^g	80^g	60^g	
0.5	10^{-4}	10^{-4}	$2\,.\,10^{-4}$	
1.0	$5\,.\,10^{-4}$	$5\,.\,10^{-4}$	$8\,.\,10^{-4}$	
1.5	10^{-3}	10^{-3}	$2\,.\,10^{-3}$	Qpp
2.0	$2\,.\,10^{-3}$	$2\,.\,10^{-3}$	$3\,.\,10^{-3}$	
3.0	$5\,.\,10^{-3}$	$5\,.\,10^{-3}$	$8\,.\,10^{-3}$	
5.0	10^{-2}	10^{-2}	$2\,.\,10^{-2}$	

Der Ausgang der Tabelle 1 ist jeweils das Q_{pp} des Neupunktes, wenn er nur mit den angegebenen Größen bestimmt worden wäre. Als überschlägige Formel gelte

$$\delta\, dx_{\max} = Q_{pp}\, \delta\, N (1 + dx) \qquad \ldots (20)$$

wobei δN die gesuchte zulässige Rechenunschärfe bedeutet. Wurden Strecken mitgemessen, wobei etwa der mittlere Streckenfehler allgemein $\pm$ 2 cm, der Richtungsfehler $\pm\, 7^{cc}$ sein soll, gelten für sie dieselben Werte wie für Richtungen mit 2 km Länge, wenn nach [3] ausgeglichen wird.

Zwei senkrechte Gerade von 1 km Länge, welche eine dritte ($L = 1{,}5$ km) unter 60^g schneidet, geben ein Q_{PP} von $4 \,.\, 10^{-4}$. Nicht ganz gleichwertige überschüssige Messungen ändern das Resultat nicht wesentlich. Drei gute Innenrichtungen sind etwa zwei entsprechenden Außenrichtungen zu vergleichen. Die Diskrepanz zwischen Tabelle 1 und (19) erklärt sich daraus, daß im groben Überschlag (19) nur eine Richtung, in Tabelle 1 und (20) jedoch zwei für die Bestimmung gewertet wurden.

Die Erfahrungswerte aus [7], wonach „der mittlere Punktfehler doppelt so groß ist wie das mittlere Perpendikel des mittleren Richtungsfehlers“, wären somit doppelt so groß wie jene aus Tab. 1, Spalte 100^g, oder viermal so groß wie die grobe dimensionsmäßige Abschätzung (19). Diese Diskrepanz ist durch systematische Fehleranteile sowie Fehler der Ausgangspunkte zu deuten; solche Überlegungen würden aber in diesem Artikel zu weit führen.

Bei einer Mehrpunkteinschaltung wirken sich die gemischten Gewichtsreziproken übersichtsmindernd aus. Ein Netz von mehr als 4 Punkten wird man jedoch nicht im Zusammenhang ausgleichen, sobald man nur einen Kleincomputer zur Verfügung hat. Mögen auch die inneren, gegenseitigen Visuren und Versteifungen dicht sein, was eine gute innere Genauigkeit zur Folge hat, so richte man sich bei der erforderlichen Stellenzahl doch nach dem von außen gestellten Punkt, welcher die schlechtesten Elemente aufweist. Hier sei auf das äußerst instruktive und charakteristische Beispiel in [6] verwiesen.

In einem Streckennetz von der Gestalt (Abbildung 1), in dem alle dargestellten Strecken mit der gleichen Genauigkeit gemessen wurden, ist etwa Q_{33} nur aus den

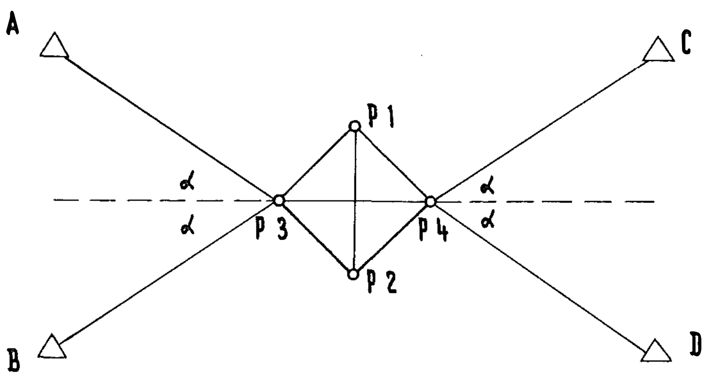

Abb. 1

Messungen von A und B her für $\alpha = 50^g$ gleich 2.0, aus allen Messungen gleich 1.6. Die gemischten Glieder sind durchwegs klein.

5. *Beispiele*

Die folgenden Beispiele entsprechen Übungsprogrammen für Tischrechenmaschinen aus „Technik des Katasterwesens“ an der T. H. Wien, welche aber auch eine recht gute Wiedergabe von in der Praxis auftretenden Problemen bieten.

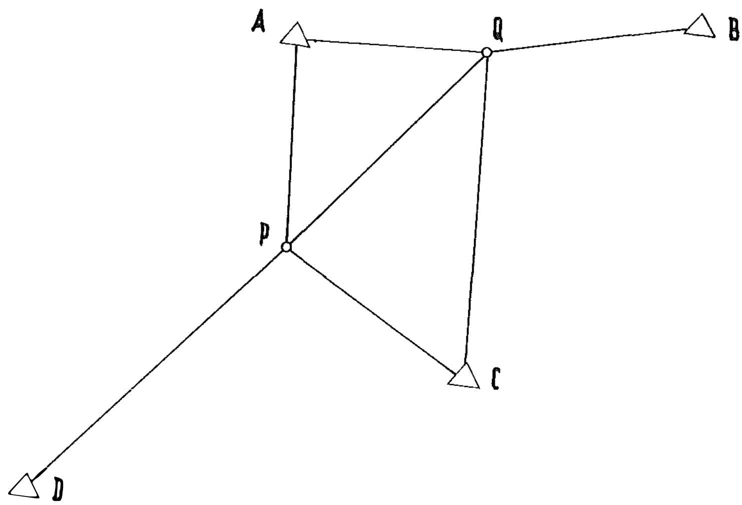

Abb. 2

M = 1:250 000

Beispiel 1 (Abb. 2) Doppelpunkteinschaltung mit Richtungen. Es wurden die beistehend gezeigten gegenseitigen Richtungen (in Altgrad) gemessen. Die in Tab. 1 angegebenen Q-Werte vergrößern sich um den Faktor $\left(\frac{\rho^{cc}}{\rho''}\right)^2 \doteq 10$. Der schlechtere der beiden Punkte dürfte P sein. Der Schnitt von A und C aus hat einen Konvergenzwinkel von etwa 60^g und eine mittlere Seitenlänge von 7 km. Q_{PP} wird daher $5 \,.\, 10^{-4} \,.\, 10 \,.\, 50 = 0.25$; dieser Wert stellt eine oberste Schranke dar. Die Richtungskoeffizienten sowie die Widersprüche liegen zwischen 1 und 6. Schätzt man die Koordinatenverbesserungen zu etwa je 2 dm, muß man die Normalgleichungskoeffizienten auf zwei Dezimalstellen berechnen und mitführen, wenn man den mm noch scharf errechnen will. Braucht man nur die cm, genügt eine Dezimalstelle. $\delta x_{\max} = 0.25\ (0.1 + 0.1.2)$ würde dann die grob überschlägige Formel lauten.

Eine strenge Rechnung zeitigt folgendes Resultat:

Die inverse Gleichungsmatrix lautet

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 0.06 & 0.01 & 0.00 & -0.02 \\ 0.01 & 0.04 & 0.00 & 0.01 \\ 0.00 & 0.00 & 0.03 & 0.02 \\ -0.02 & 0.01 & 0.02 & 0.11 \end{vmatrix}$$

der Vektor der Koordinatenverbesserungen

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} +0.3 \\ -0.9 \\ +0.3 \\ +0.2 \end{vmatrix}$$

Setzt man alle $\delta \mathbf{b}$ und $\delta \mathbf{A}$ gleich $\delta \mathbf{N}$, erhält man folgenden Fehlervektor $\delta \mathbf{x}$:

$$\delta \mathbf{x} = \begin{vmatrix} 0.05\ \delta N \\ 0.06\ \delta N \\ 0.05\ \delta N \\ 0.12\ \delta N \end{vmatrix} = \mathbf{Q} \begin{vmatrix} \delta N + 0.1\ \delta N \\ \delta N + 0.1\ \delta N \\ \delta N + 0.1\ \delta N \\ \delta N + 0.1\ \delta N \end{vmatrix} \doteq \mathbf{Q}\, \delta N$$

Der größte Wert ist 0.12 δN. Für $\delta N = 1$ (nur auf Ganze gerechnet) wäre also das Resultat nicht mehr auf cm genau gewesen. Die grob überschlägige Formel (20) genügt hier vollauf.

Beispiel 2: Richtungs- und Streckennetz.

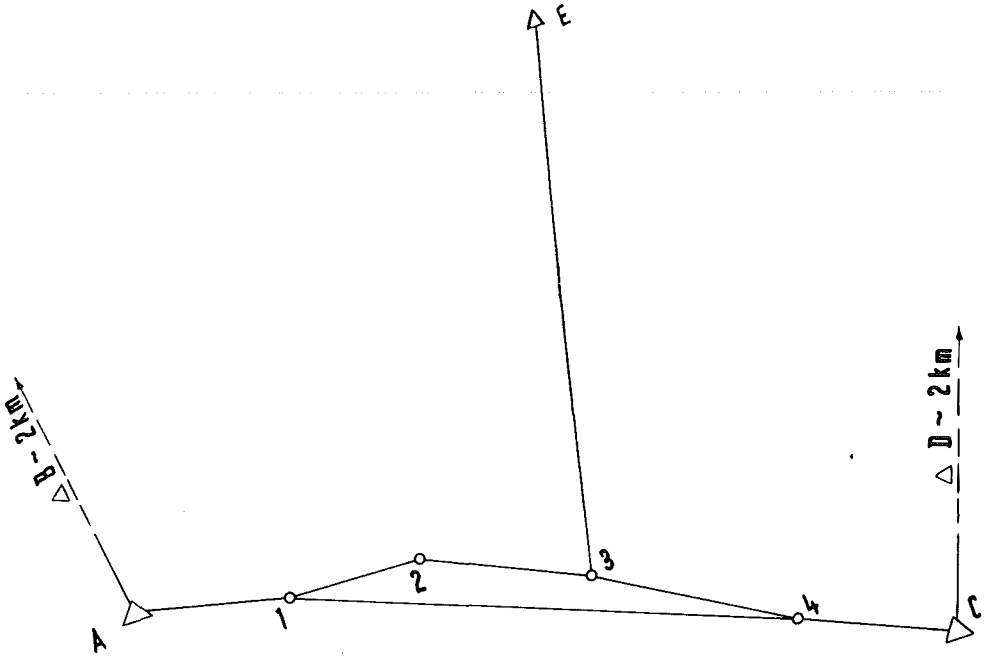

Abb. 3

$M = 1 : 25\,000$

Wie in Abb. 3 gezeigt, wurden im Zug $A-C$ alle angegebenen Richtungen ($m_R = \pm\ 10^{cc}$) und Strecken ($m_s = \pm\ 2$ cm) gemessen, dazu noch 2 Fernvisuren.

Q_{PP} ist hier etwas schwieriger zu erstellen. Da die Länge der Anschlußvisuren etwa 2 km beträgt und somit recht groß gegenüber den Netzrichtungen ist, könnte man das Problem fehlertheoretisch etwa auch als eingehängten Polygonzug betrachten.

Man kommt aber auch mit der Überlegung ans Ziel, daß der Streckenfehler einem senkrecht zur Strecke gerichteten Richtungsfehler von $\pm\ 10^{cc}$ auf 1,3 km entspricht. Entnimmt man nun aus Tab. 1 für 2.0 und 100^g den Wert 2.10^{-3}, ist $Q_{pp\,[\mathrm{dm}]}$ auf den ersten Blick nicht zu klein gegriffen. . . . (21)

Wegen der relativen Kürze der Strecken wird man das Gleichungssystem aber in cm, nicht wie sonst üblich in dm, durchrechnen. $Q_{PP\,[\mathrm{cm}]}$ wird 2.10^{-1}, (20) lautet, falls man die maximale Koordinatenverbesserung zu 10 cm schätzt und Millimetergenauigkeit anstrebt: $\delta dx_{\max} = 0.1 = 0.2 \,.\, \delta N\,(1 + 10)$ oder $\delta N = 0.1 \,.\, \frac{1}{2} = 0.05$, mindestens eine Dezimalstelle der Normalgleichungskoeffizienten wäre also unbedingt erforderlich. Da die Widersprüche dreiziffrige Zahlen waren, wäre die letzte Ziffer der kleinsten Glieder der Spur von **A** ($[paa]$, $[pbb]$, ...), welche für die Gleichungsauflösung nach den üblichen Reduktionsverfahren maßgeblich sind, *nicht mehr* gesichert gewesen. Es hätte sich dann aber auch $m_0 \sqrt{Q_{PP}}$ als $10^{cc} \,.\, 0.45$ ergeben, somit ein mittlerer Punktlagefehler von etwa 50facher Größe der geforderten Rechengenauigkeit. Die tatsächliche Durchrechnung des Beispiels zeigt ein etwas günstigeres Resultat:

(13) lautet ausgeführt (Q in Einheiten . 10^{-3})

$$\delta\mathbf{x} = \left|\begin{array}{rrrrrrrr} +3 & -4 & +2 & +4 & +4 & -2 & 0 & +3 \\ -4 & +17 & 0 & -29 & -18 & +23 & +7 & -19 \\ +2 & 0 & +5 & -3 & +2 & +3 & -2 & +1 \\ +4 & -29 & -3 & +52 & +26 & -1 & -9 & +22 \\ +4 & -18 & +2 & +26 & +20 & -20 & -4 & +15 \\ -2 & +23 & +3 & -1 & -20 & +37 & +11 & -18 \\ 0 & +7 & -2 & -9 & -4 & +11 & +8 & -10 \\ -3 & -19 & +1 & +22 & +15 & -18 & -10 & +25 \end{array}\right|\left|\begin{array}{c} \delta N - 8\delta N \\ \delta N - 8\delta N \\ \delta N - 8\delta N \\ \delta N - 8\delta N \\ \delta N - 8\delta N \\ \delta N - 8\delta N \\ \delta N - 8\delta N \\ \delta N - 8\delta N \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} -70\,\delta N \\ +161\,\delta N \\ -56\,\delta N \\ -434\,\delta N \\ -175\,\delta N \\ -231\,\delta N \\ -7\,\delta N \\ -133\,\delta N \end{array}\right| .\, 10^{-3}$$

Das größte Glied gibt die Gleichung $0.1 = 0.43\,\delta N$ oder $\delta N \doteq 0.2$. Trotzdem wird es ratsam sein, die Koordinatenverbesserungen nur auf cm genau zu berechnen, da sonst auch die strenge Durchrechnung von (13) die Mitführung einer Dezimalstelle bei den Normalgleichungskoeffizienten verlangt, was auf Grund der Meßgenauigkeit (δ**b**) unrealistisch erscheint.

Abschließend sei erwähnt, daß der Erwartungswert des Rundungsfehlers 0.3 Einheiten der letzten Ziffer beträgt (1). Die erreichbaren Rechengenauigkeiten sind somit eher höher als die angegebenen, was aber nur eine gute Sicherheitsreserve darstellt.

Literatur

[1] *Noble:* Numerisches Rechnen. BI-Taschenbuch Nr. 88.

[2] *Linnik:* Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung.

[3] *Zeger:* Gemeinsame Ausgleichungen von Richtungs- und Streckennetzen. ÖZfV 1/64.

[4] *Wolf:* Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

[5] *Peters:* Beitrag zum graphischen Ausgleich. ÖZfV 2/67.

[6] *Meissl:* Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens. ÖZfV 5/62.

[7] *Schulze:* Über die Genuigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen. ZfV 1904, Hefte 1 und 2.

[8] *Jordan:* Handbuch der Vermessungskunde, Bd. 1, 7. Auflage, Seiten 125 und 419.