

Paper-ID: VGI\_196810



## Vorschläge zur räumlichen Aerotriangulation

Karl Killian <sup>1</sup>

<sup>1</sup> 1140 Wien, Hadikgasse 40

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **56** (3), S. 79–88

1968

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_196810,  
Title = {Vorschläge zur räumlichen Aerotriangulation},  
Author = {Killian, Karl},  
Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
Pages = {79--88},  
Number = {3},  
Year = {1968},  
Volume = {56}  
}
```



## Vorschläge zur räumlichen Aerotriangulation

von Karl Killian, Wien

Die Fortschritte in der räumlichen Aerotriangulation verdanken wir den Verbesserungen der Aufnahme- und Auswertegeräte sowie theoretischen und praktischen Untersuchungen und der Einführung der elektronischen Rechenanlagen.

Seit Beginn der räumlichen Aerotriangulation ist diese jedoch *ihrer Wesen nach unverändert geblieben*; denn bei dem im Grunde genommen geometrischen Problem werden — von wenigen Ausnahmen abgesehen — immer dieselben Größen gemessen bzw. gesucht. Nur die Fehler der gemessenen Größen sind kleiner geworden und ihre Wirkung sowie die Ausgleichung der räumlichen Netze wurden eingehender studiert und die Ergebnisse praktisch brauchbar gemacht.

Die erwähnten Ausnahmen betreffen Geräte zur Messung weiterer Größen: *Statoskop, Horizontkammern, Radar-Höhenprofil-Schreiber (APR), Sonnenkammer und Horizontkreisel*.

Die Genauigkeit der von den ersten zwei Geräten gelieferten Daten reicht nicht hin um daraus die bei der Aneinanderreihung weniger Teilmodelle auftretenden Unsicherheiten beseitigen zu können. Offenbar aus diesem Grunde wurden diese beiden Geräte bald nach ihrer Einführung nur noch selten verwendet. Jedoch ihr Nutzen für die Überbrückung größerer festpunktloser Räume, ihre Einfachheit und insbesondere der Mangel von besseren Geräten brachte in den letzten Jahren diese beiden Geräte wieder zur Geltung.

Die nach dem *APR-Verfahren* bestimmten Höhen von Geländepunkten weisen je nach ihrer Art sehr verschiedene Genauigkeiten auf ( $\pm 3$  m bei gut gewählten Punkten.) Sie können daher nur mit geringem Gewicht in die Ausgleichung eingeführt werden. Es ist anzunehmen, daß die Distanzmessung mit Laser höhere Genauigkeit ergibt [1].

Das von *S. Finsterwalder* vorgeschlagene und theoretisch begründete, sehr aussichtsreiche Verfahren bei dem die Richtung zur Sonne mit den Strahlenbündeln verbunden wird wurde vermutlich nur von *Santoni* praktisch verwendet, obwohl der für die praktische Auswertung damals abschreckend große numerische Rechenaufwand heute nicht mehr besteht.

Aus der photogrammetrischen Literatur ist zu ersehen, daß die in der Luftbildmessung verwendeten *Horizontkreisel* nicht den gewünschten Erfolg zeigten. Daneben sind die physikalischen und konstruktiven Eigenschaften dieser Kreisel, von denen doch allein das Ergebnis abhängt, kaum erwähnt. Horizontkreisel, die ähnlich den Navigationskreiseln Stützeinrichtungen aufweisen, eignen sich nicht für die Luftbildmessung. Der vom Verfasser vorgeschlagene nicht gestützte Horizontkreisel ist verhältnismäßig einfach zu bauen. Er hofft, daß seine schon nun 16 Jahre alten Vorschläge doch noch Beachtung finden werden [6, b].

*Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die bekannten Geräte zur Messung weiterer Größen unzureichend sind.* Diese Größen können im allgemeinen nicht direkt verwendet werden; ihre Genauigkeit ist zu gering. Trotzdem können die Daten dieser Geräte insbesondere bei der Überbrückung großer festpunktloser Räume gute Dienste leisten, *weil die Fehlerfortpflanzung mit der Entfernung nicht oder nicht so steil ansteigt, wie die der reinen Aerotriangulation.*

Einen anderen Weg zur Messung von Größen, die für die Aerotriangulation bedeutungsvoll sind, hat der Verfasser [6,c] beschrieben. Dieser Vorschlag wird kurz wiederholt und erweitert:

Ein Verband von 3 Vermessungsflugzeugen 1, 2, 3 (Abb. 1) bildet ein gleichseitiges Dreieck von zirka 10 km Seitenlänge. Jedes der drei Flugzeuge ist mit modernen Autopiloten und photogrammetrischen Reihenbildkammern ausgerüstet. Liegen Weitwinkelkammern  $18 \times 18$ ,  $f = 12,5$  cm vor und ist die Flughöhe 4 km, so ist die aufgenommene Geländefläche etwa je  $6 \times 6$  km. Die Weitwinkelkammern weisen Zusatzeinrichtungen auf, die, ähnlich dem zur Horizontabbildung bestimmten Verfahren von *Nenonen*, die Flugzeuge gegenseitig abbilden. Die Verschlüsse der drei Vermessungskammern werden hinreichend gleichzeitig elektronisch ausgelöst. Ferner besitzt jedes der drei Flugzeuge ein *Registrierstoskop* und eine *Einrichtung zur Entfernungsmessung* (mit zeitlicher Registrierung) zu den beiden anderen Flugzeugen.

Es entspricht dem heutigen Stande der Technik, wenn man die Forderung stellt, diese Entfernungen auf einen dm genau mit *Laser* zu messen. Die Entfernungsmessung mit *Laser* an Stelle von cm- und dm-Wellen hätte auch den Vorteil, daß die *Anzielung von Tripelspiegeln erfolgen könnte und daß eine automatische Nachführung des Laserstrahles auf verhältnismäßig einfache Weise durchführbar wäre.*

Aus diesen gemessenen Entfernungen, den Höhendifferenzen, gemessen mit den Stoskopern, und den „Vertikalwinkeln“, gemessen mit den Zusatzeinrichtungen der Kamern, können die *Bildnadire* auf etwa  $1^c$  genau bestimmt werden [6,c]. Die mit diesen Zusatzeinrichtungen photogrammetrisch bestimmten Positionswinkel des Standpunktedreieckes (Ecken dieses Dreieckes sind die Mittelpunkte  $O_1, O_2, O_3$  der Objektive) dienen zur Kontrolle bzw. Ausgleichung der auf  $O_1, O_2, O_3$  reduzierten Entfernungen.

Zur Beurteilung des Wertes des vorgeschlagenen Verfahrens werden nun die Abschnitte a), b), c) behandelt:

#### a) Die Anzahl der abgebildeten Festpunkte

Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, daß auf *einem* Luftbild 0, 1, 2, 3 . . . Punkte eines gegebenen Dreiecksnetzes abgebildet werden? Zur Vereinfachung unserer, dem Gebiet der geometrischen Wahrscheinlichkeiten angehörigen Aufgabe, machen wir zwei Annahmen:

1. Das Dreiecksnetz besteht aus aneinandergereihten gleichseitigen Dreiecken, die die ganze Ebene bedecken.
2. Das Luftbild ist kreisförmig (man kann auch sagen auf die fast in den Ecken gelegenen Punkte des Bildes wird verzichtet).

Es bedeuten:  $s$  = Seitenlänge der Netzdreiecke,  $u$  = Umkreisradius dieser Dreiecke,  $r$  = Radius der kreisförmigen Geländefläche die mit einem Luftbild aufgenommen wird, und  $M$  = Mittelpunkt dieser Kreisfläche. Wir unterscheiden folgende Fälle: 1)  $0 < r < \frac{s}{2}$ ; 2)  $\frac{s}{2} < r < u$ ; 3)  $u < r < s$ . Aus den drei schraffierten Dreiecken der Abb. 2 erkennt man, daß kein, ein, zwei oder drei Punkte innerhalb des Kreises

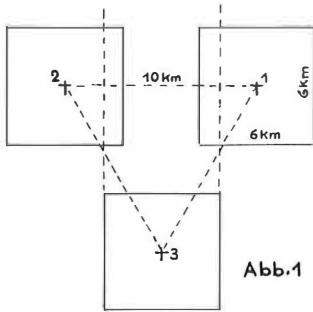


Abb.1

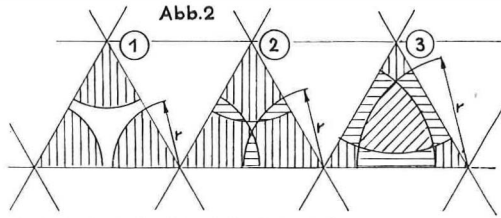


Abb.2

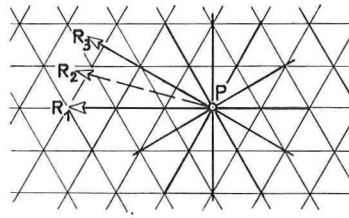


Abb.3

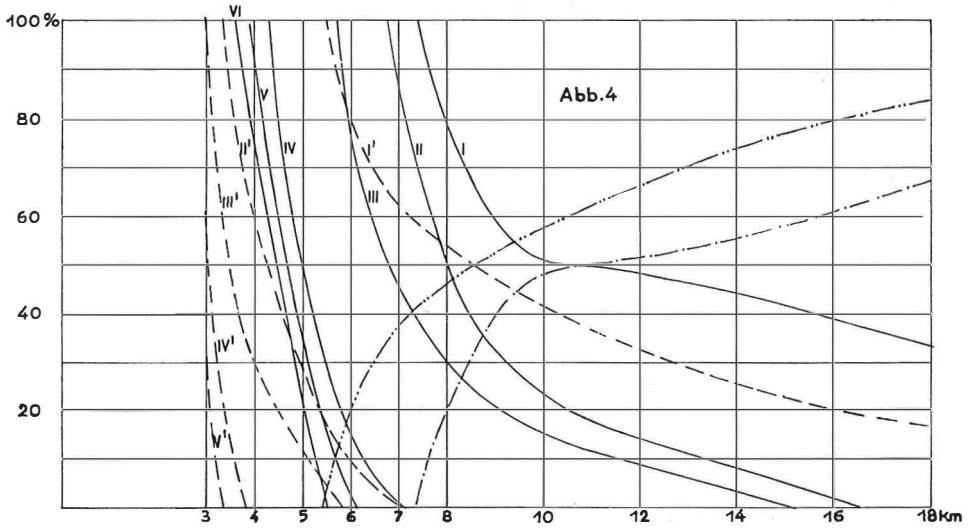


Abb.4

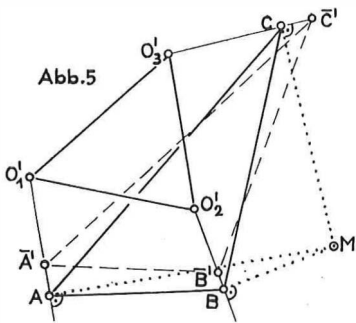


Abb.5

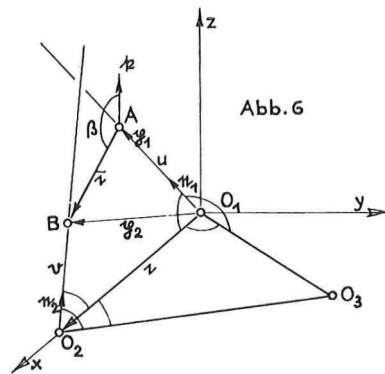


Abb.6

mit dem Radius  $r$  zu liegen kommen je nachdem ob der Mittelpunkt  $M$  innerhalb der nicht — der vertikal —, der horizontal- bzw. der schräg schraffierten Fläche angenommen wird. Die Berechnung der gefragten Wahrscheinlichkeiten besteht sodann in der Bildung des Quotienten der entsprechenden Teilflächen  $f$  eines Netzdreieckes zur Gesamtfläche  $F$  dieses Dreieckes.

Liegt z. B. Fall 1. vor, so ist die Wahrscheinlichkeit  $W$ , daß ein Festpunkt abgebildet wird

$$W = \frac{f}{F}, f = \frac{1}{2} r^2 \pi, F = \frac{s^2}{4} \sqrt{3}$$

$$W = 3,6 \left( \frac{r}{s} \right)^2 \quad \dots (1)$$

Wir greifen den sehr aufschlußreichen Fall  $r = u$  heraus. Man erkennt, daß drei Punkte praktisch niemals abgebildet werden, und daß ein Punkt auf jeden Fall abgebildet wird. Setzt man  $r = u = 3$  km, so folgt:  $s \approx 5,2$  km.

Unter unseren Annahmen und unter Beachtung des räumlichen Rückwärts-einschneidens eines Standpunktedreiecks (siehe unter b) oder [6,c]) folgt:

*Sind die Seiten eines Festpunktenetzes  $s \approx 5,2$  km, so ist das gewöhnliche räumliche Rückwärtseinschneiden niemals möglich, während das räumliche Rückwärtseinschneiden des Standpunktedreiecks immer möglich ist.*

Wir beantworten noch die Frage: Wie groß muß  $s$  sein, damit mit einem Bildverband (= drei von einem Stadtpunktedreieck gleichzeitig aufgenommene Bilder) gerade noch drei Festpunkte abgebildet werden können? Wir ziehen drei Kreise ( $r = 3$  km), deren Mittelpunkte mit den Eckpunkten des Standpunktedreieckes zusammenfallen. Ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten parallel zu den Seiten des Standpunktedreieckes sind und dessen Ecken je in einem der drei Kreise liegen, ist das gesuchte Dreieck. Es ergibt sich  $s = 15,2$  km.

Zur Abschätzung der Anzahl der auf den Bildern eines Bildstreifens und eines Bildverbandstreifens abgebildeten Festpunkte betrachten wir wieder Festpunktenetze, die aus aneinandergereihten gleichseitigen Dreiecken bestehen.

Wir gehen von einem beliebigen Punkt  $P$  des Netzes aus (Abb. 3). Es gibt unendlich viele Richtungen, in denen der Bildstreifen bzw. der Bildverbandstreifen geflogen werden kann. Zwölf Richtungen (in der Abb. voll ausgezogen) bilden Symmetrieachsen bezüglich aller Netzknoten. Von diesen zwölf Richtungen gibt es nur zwei, die bezüglich ihrer Lage gegenüber den Netzknoten voneinander wesensverschieden sind. Die Winkelsymmetralen der zwölf Richtungen (eine ist in der Abb. 3 strichliert gezeichnet) weisen in diesem Sinne untereinander ebenfalls keine Unterschiede auf. Mit der Untersuchung der Vermessungsflüge in diesen drei Richtungen  $R_1, R_2, R_3$  sind also 24 Richtungen untersucht. Es wurden Netze mit Seitenlängen von 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18 cm (Maßstab 1:100.000) gezeichnet. Ferner wurde Abb. 1 auf Transparentpapier gezeichnet (Standpunktedreieck mit 10 cm Seitenlänge und Aufnahmegebiete mit  $6 \times 6$  cm). Dieses Transparent wurde z. B. auf das Dreiecksnetz  $s = 5$  cm so gelegt, daß der beliebige Punkt  $P$  mit dem Hauptpunkt des Bildes 3 zur Deckung kam. Darauf wurde das Transparent aufeinanderfolgend in den Richtungen  $R_1, R_2, R_3$  jeweils um 2 cm (Basis) ver-

schoben, und die Anzahl der Punkte wurde abgezählt, die jeweils innerhalb der Aufnahmegebiete lagen. Um gute Mittelwerte zu erhalten wurden alle Bildverbandstreifen und Bildstreifen auf 32 cm ausgedehnt. Das Ergebnis ist in Abb. 4 dargestellt.

Die voll ausgezogenen Kurven (I bis VI) beziehen sich auf *Bildverbandstreifen*. Die strichlierten Kurven (I' bis V') beziehen sich auf *Bildstreifen*.

Die Kurve I zeigt die Wahrscheinlichkeit, daß auf den *Bildverbänden des Bildverbandstreifens* mindestens ein Festpunkt abgebildet wird, wenn die Seiten  $s$  des Festpunktnetzes 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18 km betragen. Man erkennt, daß der Reihe nach 100, 80, 52, 48, 44, 35, und 32% wahrscheinlich sind.

Die Kurve II zeigt die Wahrscheinlichkeit, daß auf den *Bildverbänden des Bildverbandstreifens* mindestens zwei Festpunkte abgebildet werden, wenn die Seiten  $s$  des Festpunktnetzes 6 bis 18 km betragen. Ebenso zeigen die Kurven III, IV, V, VI die Wahrscheinlichkeit daß mindestens 3, 4, 5, 6 Punkte abgebildet werden. Die strichpunktierte Kurve gibt an, wieviel Bildverbände des Bildverbandstreifens keinen Festpunkt abbilden. Die Kurven I' bis V' beziehen sich auf Bildstreifen und sind analog den Kurven I bis V.

#### b) Paßpunkte und Lagebestimmung des Standpunktedreiecks

Die mit der Aerotriangulation auszuwertenden Punkte können luft sichtbare, gut definierte Geländepunkte oder signalisierte Punkte sein. Aus den Luftbildern werden vor ihrer Auswertung jene Punkte gewählt, die terrestrisch vermessen werden sollen. An Hand der Luftbilder werden die ausgewählten Punkte im Gelände aufgesucht.

Die terrestrischen Messungen können sein: flüchtige Nivellements, Höhenzüge, Polygonzüge, Triangulationen und Azimutbestimmungen. Dazu sei bemerkt, daß die Vermessungen dieser Punkte *nicht unbedingt mit dem Ausgangsnetz der Festpunkte verbunden sein müssen*. Sie können dennoch für die Aerotriangulation sehr wertvoll sein. Dieser Fall wird sich besonders häufig dann ergeben, wenn man Hubschrauber zur terrestrischen Vermessung der Paßpunkte einsetzt. Die *astronomische Azimutbestimmung der Richtung von einem luft sichtbaren Punkt zu einem anderen mindestens etwa 5 km entfernten luft sichtbaren Punkt*, kann für unser Verfahren wichtig sein [siehe c) 2)]. Zum Unterschied von Polhöhenbestimmungen können bekanntlich astronomische Azimutbestimmungen rasch und einfach mit der erforderlichen Genauigkeit durchgeführt werden. Gewöhnlich werden außerdem elektronische Entfernungsmessungen und die Messungen der Höhenunterschiede zwischen den beiden Punkten oder zwischen einigen luft sichtbaren Punkten durchgeführt; es ergeben sich sodann azimuthal orientierte Punktgruppen bzw. Polygonzüge. Entfernungsmessungen sind für unser Verfahren jedoch weniger wichtig [siehe c) 2)].

Sind auf einem Luftbild vier (mindestens drei) luft sichtbare Punkte abgebildet, die im Gelände gegenseitig sichtbar sind, und werden in diesen vier Punkten nur die möglichen Horizontal- und Vertikalwinkelmessungen durchgeführt, so kann nach dem räumlichen Rückwärtseinschneiden die Berechnung des Bildnadirs erfol-

gen [6, a]. Eine Entfernungs- oder Höhenmessung ist dazu nicht erforderlich. Damit ergibt sich eine Kontrolle des auf andere Weise bestimmten Bildnadirs (siehe Einleitung). Der Maßstab des räumlichen Geländeviereckes wird bei der Auswertung aus den Luftbildern bestimmt.

Das *räumliche Rückwärtseinschneiden eines Dreiecks (Standpunktdreieck)* ist für das vorgeschlagene Verfahren bedeutungsvoll und wurde vermutlich in [6, c] erstmalig behandelt. Es besteht in der Aufgabe, drei sich nicht in einem Punkt schneidende Geraden (= Zielstrahlen, die mit den Seiten des Standpunktdreiecks bekannte Winkel bilden) mit einer Ebene so zu schneiden, daß die Schnittfigur und ein gegebenes Dreieck (Festpunktdreieck) kongruent werden.

Die wichtige geometrische Bedingung für das Auftreten der *gefährlichen Lage eines Standpunktdreiecks in Bezug auf ein Festpunktdreieck* kann lediglich aus der Anschauung gefolgert werden:

Das Dreieck  $ABC$  legen wir in die Zeichenebene.  $O_1', O_2', O_3'$  seien die orthogonalen Projektionen der Zentren auf die Zeichenebene. Auf die somit in der Zeichenebene dargestellten Grundrisse der drei Zielstrahlen fällen wir in den Punkten  $A, B, C$  Lote. Angenommen, es würden sich die drei Lote zufällig in einem Punkt  $M$  schneiden, so bildet  $M$  das Momentanzentrum für die Drehung des Dreiecks  $ABC$  in die unendlich benachbarte Lage  $\overline{A'}, \overline{B'}, \overline{C}'$ . Die in  $\overline{A'}, \overline{B'}, \overline{C}'$  auf die Zeichenebene errichteten Lote schneiden die räumlichen Zielstrahlen in den Punkten  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ . Die durch  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$  bestimmte Ebene schließt mit der Zeichenebene einen unendlich kleinen Winkel ein. Daher unterscheiden sich die Seiten des Dreiecks  $\overline{ABC}$  nur um unendlich kleine Größen zweiter Ordnung von ihren Projektionen. Die Dreiecke  $ABC$  und  $\overline{ABC}$  sind somit bis auf Größen zweiter Ordnung kongruent. Schneiden sich also die durch  $A, B, C$  gezogenen Lote in einem Punkt  $M$ , so liegt eine gefährliche Lage des Standpunktdreiecks in Bezug auf das Festpunktdreieck vor.

*Die Untersuchung ob in einem gegebenen Fall diese gefährliche Lage vorliegt, besteht somit in der Prüfung ob sich die in  $A, B, C$  auf den Grundrissen der Zielstrahlen errichteten Normalen in einem Punkt schneiden.* Bei einigermaßen horizontalem Gelände ist die zeichnerische Prüfung sehr einfach; Standpunktdreieck und Festpunktdreieck sind für diese Untersuchung genügend genau parallel.

Bemerkung: Eine gefährliche Lage eines Standpunktdreiecks in Bezug auf ein Festpunktdreieck tritt wie erklärt dann auf, wenn eine unendlich kleine Bewegung des Festpunktdreiecks möglich ist. In [6, c] S. 186 wurde auch die Beweglichkeit des Standpunktdreiecks untersucht. Bei dieser unendlich kleinen Bewegung dieses Dreiecks ändern sich jedoch die Winkel zwischen den Seiten des Standpunktdreiecks mit den Zielstrahlen. Es liegt daher in diesem Fall eine gefährliche Lage im weiteren Sinne vor; die gemessenen Größen ändern sich bei der genannten unendlich kleinen Bewegung nur teilweise.

*Setzt man voraus, daß die Bestimmung der Lotrichtung in Bezug auf das Standpunktdreieck hinreichend genau erfolgt, so genügen zum Rückwärtseinschneiden des Standpunktdreiecks nur zwei Festpunkte, die auf zwei verschiedenen Bildern des Bildverbandes abgebildet sein können.*

Die Aufgabe führt zu einer Gleichung zweiten Grades: Das Dreieck  $O_1, O_2, O_3$  legen wir entsprechend Abb. 6 in die  $x, y$ -Ebene.  $A, B$  sind die zwei von  $O_1$

und  $O_2$  aus abgebildeten Festpunkte. Der Vertikalwinkel  $\beta$  von  $A$  nach  $B$  und ebenso die übrigen in der Abb. eingezeichneten Winkel wurden gemessen. Aus letzteren berechnen wir die Richtungswinkel  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  und finden damit die Einheitsvektoren  $e_1$  und  $e_2$ . Wir suchen  $\overline{O_1 A} = u$  und  $\overline{O_2 B} = v$ . Aus der Abb. folgt

$$ue_1 + \overline{c} = c + ve_2$$

Wir multiplizieren diese Gleichung skalar mit  $f$  und erhalten

$$u = k_1 v + k_2 \quad \text{wobei } k_1 \text{ und } k_2 \text{ Konstante sind. Aus der Abb.}$$

folgt:

$$p_1 = ue_1 = u(\cos\alpha_1 i + \cos\beta_1 j + \cos\gamma_1 f)$$

$$p_2 = c + ve_2 = x_2 i + v(\cos\alpha_2 i + \cos\beta_2 j + \cos\gamma_2 f)$$

Wir bilden  $\overline{c}^2 = (p_2 - p_1)^2$  und erhalten eine quadratische Gleichung in  $u$  und  $v$ . Setzt man für  $u$  den obigen Wert ein, so haben wir eine quadratische Gleichung für die Berechnung von  $v$ .

### c) Fehlerabschätzung

Eine genaue Fehlerberechnung, die unter Beachtung der auftretenden Korrelationen der Fehler geschehen müßte, ist sehr schwierig und eine elektronische Durchrechnung einer nach obigem Vorschlage angenommenen Aerotriangulation, bei der alle gemessenen Größen sodann innerhalb der auftretenden möglichen Fehler nach freier Wahl oder automatisch (Zufallsgenerator) variiert werden, ist sehr kostspielig und zeitraubend.

Die unten durchgeführte Fehlerabschätzung genügt für eine generelle Beurteilung des Verfahrens und dies umso mehr als nur Vergleiche zwischen den bekannten und dem vorgeschlagenen Verfahren der Aerotriangulation zu ziehen sind.

Bei einem Bildstreifen und ebenso bei einem Bildverbandstreifen treten *Längs-(x)*, *Quer-(y)* und *Höhen-(z)*-Fehler auf. Wir untersuchen in beiden Streifen die Fehlerfortpflanzungsgesetze und stellen sie einander gegenüber.

#### 1. Fehlerfortpflanzungsgesetz der Bildstreifen

Zunächst setzen wir ein kleines Gebiet mit terrestrischen Festpunkten voraus, von denen der Bildstreifen ausgeht und sich beliebig weit erstreckt. Wir nennen:  $m_x, m_y, m_z$  = mittlerer Fehler in der  $x, y, z$ -Richtung,  $b$  = Basislänge (im ganzen Streifen gleich lang angenommen)  $m_{ii}$  = mittlerer Fehler der Maßstabübertragung von einem Teilmodell zum folgenden Teilmodell,  $m$  = mittlerer azimuthaler Winkelfehler zwischen zwei aufeinanderfolgenden Basen,  $m_\beta$  = mittlerer Fehler der Höhenwinkel,  $n$  = Anzahl der Luftstandpunkte. Somit ist

$$m_x = m_{ii} \frac{b}{\sqrt{3}} n \sqrt{n}; \quad m_y = m \frac{b}{\sqrt{3}} n \sqrt{n}; \quad m_z = m_\beta \frac{b}{\sqrt{3}} n \sqrt{n} \quad \dots \quad (2)$$

Diese Gln. folgen aus den in [2] abgeleiteten Gln. 5. und 6. wenn man dort  $s = (n-1)b$  setzt und die Eins gegen  $n$  klein ist und wenn man ferner die Fehler am Anfang des Streifens negiert. Man siehe auch [8] S. 276 (in Gl (9.8) dieses Buches wurde versehentlich  $m_\alpha$  an Stelle von  $m$  gesetzt).



Der Maßstabübertragungsfehler  $d_{ii}$  wird definiert als Differenz der relativen Basisfehler von zwei aufeinanderfolgender Basen.

$$d_{ii} = \frac{db_i}{b_i} - \frac{db_{i-1}}{b_{i-1}} \approx \frac{1}{b} (db_i - db_{i-1}) \quad \dots (3)$$

Die Gln. 2. setzen nur zufällige Fehler voraus und zeigen, daß die mittleren Fehler  $m_x, m_y, m_z$  mit  $n^{3/2}$  ansteigen. Daß bei Auftreten von nur systematischen Fehlern dieses Ansteigen mit  $n^2$  erfolgt [4] und daß das Zusammenwirken von nur zufälligen Einzelfehlern einen Verlauf ergibt, der den Charakter von systematischen Fehlern aufweist [3], [7], bleibt bei unserer Fehlerabschätzung unbeachtet.

Das in den Gln. 2) angeführte Fehlerfortpflanzungsgesetz ist identisch mit dem eines *gestreckten fliegenden Theodolitzuges*. (Er geht von einem Festpunkt aus und hat *eine* Anschlußrichtung). Setzt man nämlich z. B. in [5] S. 574, Gl. 9)  $L = (n - 1) \cdot s$  und vernachlässigt man die Eins gegen  $n$ , so erkennt man dasselbe Fehlergesetz.

Wir fragen jetzt nach der größten Querauslenkung  $m'_y$ , eines *gestreckten eingehängten Theodolitzuges*, d. h. eines Zuges, der sich von einem Festpunkt zu einem andern erstreckt, jedoch *keine* Richtungsanschlüsse aufweist. Dieser entspricht der Aerotriangulation zwischen zwei Festpunkten. Analog den in [5] S. 572 bis 580 angeführten Ableitungen wurde die größte Querauslenkung  $m'_y$  eines eingehängten Theodolitzuges abgeleitet. Da die größte Querauslenkung in der Mitte des Zuges auftritt, wurde zur Vereinfachung der Rechnung für  $n$  eine ungerade Zahl angenommen.

$$m'_y = m \frac{b}{\sqrt[4]{48}} \sqrt{(n-1)^3 + 2(n-1)} \quad \dots (4)$$

Im vorliegenden Fall muß die Eins gegenüber  $n$  nicht unbedingt sehr klein sein, und es wurde daher bei der Ableitung keine Vernachlässigung gemacht. Ist  $n$  hinreichend groß, so wird:

$$m'_y = m \frac{b}{\sqrt[4]{48}} n \cdot \sqrt[4]{n} \quad \dots (5)$$

d. h. die Querauslenkung  $m'_y$  eines eingehängten Zuges verhält sich zur Querauslenkung  $m_y$  eines fliegenden Zuges von derselben Länge wie  $\sqrt[4]{48} : \sqrt[4]{3} = 4$ . Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man in [2] Gl. 11.  $s = S:2$  setzt und nur den ersten Term dieser Gl. beachtet.

## 2. Fehlerfortpflanzungsgesetze der Bildverbandstreifen

Aus der Gl. 3. ersieht man, daß bei konstantem Maßstabsübertragungsfehler die Fehler der Basen proportional mit der Streifenlänge  $x$  anwachsen. Diese Tatsache bewirkt, daß  $m_x$  mit  $n \cdot \sqrt[4]{n}$  wächst. Beim Bildverbandstreifen hingegen wachsen die Basisfehler *nicht* mit der Entfernung: Denkt man sich aus den drei Bildstreifen Punkte ausgewertet die den querüberdeckten Gebieten angehören, so erkennt man, daß fortlaufend größer werdende Fehler in den Basen der drei Bildstreifen nicht die Bedingung erfüllen können, daß die bekannten Längen der Seiten  $O_1, O_2$  aller Standpunktedreiecke gewahrt bleiben. Weitere Bedingungen für die

Basislängen ergeben sich, wenn man auch die beiden anderen Seiten aller Standpunktedreiecke beachtet, d. h. die Seitenlängen aller Standpunktedreiecke müssen gewahrt bleiben. Daraus folgt, daß die Fehler der Basen unabhängig sind von der Entfernung  $x$ . Die Fehlerfortpflanzung eines Bildverbandstreifens entspricht daher dem  $\sqrt{n}$ -Gesetz (Strecke bestehend aus gemessenen gleich langen Teilstrecken mit gleichen Fehlern). Außerdem wird der vor die Wurzel zu setzende Faktor im Vergleich zu  $m_{ii}$  sehr klein werden.

Dagegen unterscheidet sich der Querfehler eines Bildverbandstreifens nicht wesentlich von dem eines Bildstreifens. Man kann nämlich ein Standpunktedreieck gegenüber dem vorhergehenden Standpunktedreieck azimuthal um einen kleinen Winkel auslenken, dabei ändern sich die Dimensionen der Dreiecke und die Basislängen nur in höherer Kleinheitsordnung. Beim Verbandstreifen ist eine etwas kleinere Auslenkung zu erwarten wie beim Streifen weil drei Bildpaare aneinandergereiht werden ( $\sqrt{3} \times$  kleinere Auslenkung). Aus [4] S. 132 folgt ferner, daß  $m_y$  nur etwa  $m_x : \sqrt{5}$  ist. Aber das gefährliche Fehlerfortpflanzungsgesetz:  $n \cdot \sqrt{n}$  bleibt bestehen. Dieser Fehleranhäufung kann man jedoch folgendermaßen enge Grenzen setzen.  $\alpha$ ) Teilweise oder vollkommene Doppelaufnahme des Gebietes mit Bildverbandstreifen die aufeinander normale Richtungen aufweisen.  $\beta$ ) Sehr günstig sind auch astronomische Azimutbestimmungen (siehe unter b)).

Die Genauigkeit der nach dem vorgeschlagenen Verfahren bestimmten Bildnadire entspricht der Auswertegenauigkeit und ist überdies von der Streifenlänge  $x$  unabhängig. Die Höhenfehler wachsen daher mit  $\sqrt{n}$  an. Diese Tatsache kann man auch auf folgende Weise veranschaulichen: Wir denken uns von einem Bildstreifen die Teilmodelle ausgewertet. Alle sind zur Lotrichtung orientiert. Sodann setzen wir die Teilmodelle zu einem Modellstreifen zusammen. Dieser Vorgang entspricht im wesentlichen einem terrestrischen Nivellement.

Trotz der ungefährlichen Fehlerfortpflanzung ist bei großen Streifenlängen eine Überwachung der anwachsenden Höhenfehler notwendig. Diese kann folgendermaßen geschehen:

$\alpha$ ) Aus der Luftbildauswertung von möglichst weit zerstreut gelegenen Höhenfestpunkten und aus den Stoskopablesungen wird die Neigung der isobaren Fläche bestimmt, in der die Flugzeuge annähernd fliegen. Diese wird als Bezugsfläche für die Geländehöhen angenommen, wodurch dem Anwachsen der Höhenfehler Schranken gesetzt sind.

$\beta$ ) Ausgedehnte flüchtige terrestrische Nivellements, die luft sichtbare Punkte beinhalten, wirken sehr günstig auch dann, wenn sie von keinem Höhenfixpunkt ausgehen [siehe b)].

#### Zusammenfassung

Das vorgeschlagene Verfahren erfordert einen großen technischen Aufwand und Entwicklungsarbeiten. Aber die Herstellung der erforderlichen Geräte ist nicht nur möglich, sondern sie ist dem heutigen Stand der Technik entsprechend. Der Zweck der vorliegenden Veröffentlichung ist es, aufzuzeigen, was bei Bestehen der erforderlichen Einrichtungen erreicht werden könnte, um daraus folgern zu können, ob Aufwand und voraussichtlicher Erfolg in einem richtigen Verhältnis stehen.

Allein das Erfordernis von drei Vermessungsflugzeugen mag Bedenken erregen. Es muß jedoch beachtet werden, daß man mit drei Flugzeugen in der gleichen Zeit die dreifache Gebietsgröße aufnehmen kann, wodurch eine dreimal bessere Ausnützung der jährlich möglichen Flugtage gegeben wäre.

Das vorgeschlagene Verfahren ist nicht nur eine Triangulation aus der Luft, sondern infolge der fortlaufenden Vermessung der Standpunktdreiecke auch eine *Triangulation in der Luft*. Nehmen wir z. B. an, zur Aufnahme eines Vermessungsgebiets wurden 6000 Luftbilder gebraucht. *Im Zuge dieser Aufnahmen* sind sodann 2000 Standpunktdreiecke mit Seitenlängen von ca. 10 km trianguliert worden. Die terrestrische Vermessung von 2000 Dreiecken mit Seitenlängen von ca. 10 km würde einen enormen Aufwand erfordern. Jedoch für die Luftbildmessung wäre ihr Wert sogar viel geringer als der der Standpunktdreiecke.

*Das räumliche Rückwärtseinschneiden von Standpunktdreiecken* weist große Vorteile auf. Diese liegen in der weitgehenden Anwendungsmöglichkeit und in der gleichzeitigen Festlegung von drei Luftstandpunkten.

Wie einleitend erklärt wurde, werden ferner in allen Luftbildern die Nadirpunkte bestimmt. Daraus ergeben sich *das räumliche Rückwärtseinschneiden eines Standpunktdreiecks nach zwei Festpunkten* und ferner *das günstige Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Bestimmung der Geländehöhen*. Darüber hinaus folgt noch, *daß die zur gegenseitigen und absoluten Orientierung der Luftbilder erforderliche Zeit unvergleichlich kürzer wird*.

Überraschend groß sind die in Abb. 4 dargestellten Vorteile bezüglich der Abbildung von Festpunkten, und die unter c) angeführten Fehlerabschätzungen zeigen eine weitere *Überlegenheit des vorgeschlagenen Verfahrens* gegenüber den bekannten Verfahren, *die umso größer ist, je größer die zu überbrückenden festpunktlosen Räume sind*. [Unter c) ist gezeigt, daß diese Überlegenheit etwa linear mit der Länge der festpunktlosen Gebiete ansteigt]. Das Verfahren wird sich daher für die Vermessung festpunktarmer Großgebiete besonders gut eignen.

#### Literatur

- [1] *Draheim, H.*: Geodolite (= Laserentfernungsmesser) A. V. N. 75. J. 1968 H. 1.
- [2] *Finsterwalder, S.*: Die Fehlergesetze gleichförmiger gestreckter Dreiecksketten, Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. math.-naturwissensch. Abt. 1933, S. 149–177.
- [3] *Gothardt, E.*: Der Einfluß unregelmäßiger Fehler auf die Luftbildtriangulation. Z. f. V. 73. J. 1944 H. 4.
- [4] *Gruber von O.*: Beitrag zur Theorie und Praxis von Aeropolygonierung und Aeronivellements, B. u. L. 10. J. 1935, H. 3.
- [5] *Jordan, Eggert, Kneissl*: Handbuch der Vermessungskunde 10. Aufl. Bd. 2, 1963.
- [6] *Killian, K.*: a) Über das Rückwärtseinschneiden im Raum Ö. Z. f. V. 43. J. 1955 Nr. 6. b) Zur analytischen Luftbildauswertung der Lagekoordinaten . . . Ö. Z. f. V. 49. J. 1961 Nr. 5 und 6. c) Ebenes und räumliches Rückwärtseinschneiden eines Dreiecks in Hinblick auf die Luftbildmessung, Ö. Z. f. V. 54. J. 1966, Nr. 6.
- [7] *Roelofs, R.*: Erreurs Systematiques ou Accidentelles? Photogrammetria 1949, Nr. 1.
- [8] *Schwidersky, K.*: Grundriß der Photogrammetrie, 6. Aufl. 1963.

## Gedanken zur numerischen Lösung der gegenseitigen Orientierung in Analoggeräten

Von *Josef Kovarik*, Wien

Eine Untersuchung der Ergebnisse des Versuches Oberriet der Kommission C der OEEPE [1] hat erneut gezeigt, daß die Resultate von numerischen Auswertungen auf analytischem Wege den Analogauswertungen praktisch *nicht* überlegen sind! Da die analytische Photogrammetrie sowohl Hochleistungskomparatoren als auch eine elektronische Großrechenanlage verlangt, wird sie außerdem zu einer Domäne von wenigen großen Instituten.

Wo aber unzusammenhängende Flächen, womöglich mit Einzelmodellen, zu bearbeiten sind, dort wird es sehr zu überlegen sein jene Phase, die ein schon vorhandenes Präzisionsauswertegerät zu bringen im Stande ist, nämlich die *mechani-*