

Paper-ID: VGI_197007



Über das Messen und Wägen im Gebirge

Wilhelm Embacher ¹

¹ *Universität Innsbruck, 6020 Innsbruck, Techniker-Straße 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **58** (3), S. 69–82

1970

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Embacher_VGI_197007,  
  Title =  {"\U}ber das Messen und W{"a}gen im Gebirge},  
  Author = {Embacher, Wilhelm},  
  Journal = {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen},  
  Pages = {69--82},  
  Number = {3},  
  Year = {1970},  
  Volume = {58}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom
ÖSTERREICHISCHEN VEREIN FÜR VERMESSUNGSWESEN

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer,
o. Prof. Hofrat Dr. phil. Dr. techn. e. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 3

Baden bei Wien, Ende Juni 1970

58. Jg.

Über das Messen und Wägen im Gebirge

Antrittsvorlesung gehalten von Univ.-Prof. *Dr. techn. Wilhelm Embacher*, am 19. Februar 1970 an der Fakultät für Bauingenieurwesen und Architektur in Innsbruck.

Anlässlich eines Interviews mit dem ORF wurde ich gestern gefragt, warum hier an unserer Fakultät für nur 10 Geodäsiehörer ein Institut für Vermessungswesen gegründet wurde. Ich muß feststellen, daß unser Institut für Vermessungswesen für Vorlesungen aus Vermessungskunde für 170 Bauingenieure und Architekten aufgebaut wurde. Mein Lehrauftrag lautet, diese in die Elemente und in die Enzyklopädie der Vermessungskunde einzuführen, damit der spätere Bauingenieur und Architekt weiß, was er selbst abstecken und vermessen kann und wann er sich an den Ingenieur-Konsulenten für Vermessungswesen wenden soll. Es war dann mein zusätzlicher Wunsch, auch die Studienrichtung „Vermessungswesen“ aufzubauen und in dieser Studienrichtung habe ich 10 Hörer.

Mein Forschungsauftrag, den ich mir selbst stellte, ist seit fast 20 Jahren die Alpengeodäsie:

Das Messen und Wägen im Gebirge, welches technisch nicht wesentlich schwieriger ist als das Vermessen im flachen Land, aber theoretisch zahlreiche ungelöste Probleme bringt.

Damit bin ich bei meinem Thema.

Als Bouguer im Dezember 1738 während seines Aufenthaltes in Peru bei der Messung eines Meridianbogens am Äquator beobachtete, daß am selben Parallelkreis die Zenitdistanzen gewisser Sterne voneinander abwichen, stellte er das erste Mal den Einfluß von benachbarten Erdmassen auf das Lot fest. Es handelte sich um einen Gebirgsstock von ca. 6300 m Höhe in der Nähe des Chimborasso.

Nun sei aber vorerst erklärt, wie es zu dieser Reise nach Peru kam, um dabei gleichzeitig einige geodätische Grundbegriffe herauszuschälen.

Im 17. und 18. Jahrhundert überstürzten sich die wissenschaftlichen Arbeiten und Entdeckungen aus Physik, Astronomie und Geodäsie: 1602 Galilei mit den Gesetzen des freien Falles, 1619 brachte Kepler seine 3 Gesetze, 1672 reiste der Pariser Astronom Richer nach Cayenne und stellte fest, daß er dort das Pendel seiner Uhr verkürzen mußte, damit es weiter Sekunden schlug; Newton brachte das Anziehungsgesetz und stellte fest, daß die Schwerkraft vom Äquator nach den Polen zu proportional dem Quadrat des Sinus der Breite wächst und daß die Erde ein an den Polen abgeplattetes Rotationsellipsoid sei.

Eine Verlängerung der Dreieckkette von Picard durch Cassini schien jedoch Newton unrecht zu geben, eine etwa eiförmige Erde ergab sich aus diesen Messungen.

Um diesen wissenschaftlichen Streit zu klären, entsandte die französische Akademie der Wissenschaften zwei Expeditionen. Eine Expedition nach Lappland mit Maupertius, Clairaut, Prof. Celsius von der Sternwarte Upsala und die andere nach Peru mit Godin, Bouguer und La Condamine.

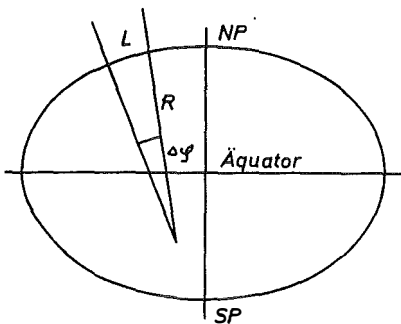


Abb. 1

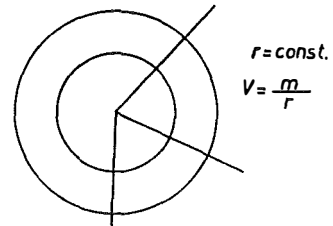


Abb. 2

Je näher die eine Messung zum Pol liegt und je näher die andere zum Äquator, umso klarer mußte ein Unterschied in den Radien festzustellen sein. (s. Abb. 1.)

Die Lapplandexpedition dauerte von 1736–37 und zeigte deutlich die Abplattung an den Polen. (Maupertius ließ sich nachher malen, eingehüllt in Pelzmäntel und die Erde abplattend. Er lehnte eine hohe Pension des Kardinals Fleury ab, dies wäre für seinen begleitenden Diener gerade gut genug.)

Die Peruexpedition dauerte von 1735 bis 1744 bzw. bis 1773. Allein die Anreise dauerte ein Jahr. Außer der Messung eines Meridianbogens von ca. 3 Grad entstanden noch andere wissenschaftliche Leistungen (La Condamine beschrieb den Chinabaum und erforschte erstmals wissenschaftlich den Amazonasfluß).

Im Anschluß daran wurden in Europa mehrere Gradbögen gemessen. Darunter auch einer von Brünn nach Varasdin von Pater Liesganig aus Graz. Die berühmteste ist die Meridianbogenmessung am Ende des 18. Jahrhunderts von Delambre. Daraus wurde das Metermaß abgeleitet.

Der Stand der damaligen Wissenschaft ist also dadurch gekennzeichnet, daß die Erdfigur durch das Rotationsellipsoid in zweiter geometrischer Annäherung

approximiert wurde. Bald sah man aber, daß der Unterschied zwischen den Ergebnissen der Gradbogenmessungen größer war als die dabei gemachten Fehler.

Gauss definierte die mathematische Erdfigur mit der freien Meeresoberfläche und deren Fortsetzung unter den Kontinenten durch Kanäle.

Nach Bruns (1870) ist die Aufgabe der Geodäsie nicht die Bestimmung der mathematischen Figur der Erde, sondern die Ermittlung der Kräftefunktion W , das heißt die Bestimmung der Schar der Niveaulflächen. Diese umfassende Aufgabenstellung hat heute besondere Bedeutung, weil die genaue Kenntnis des Kraftfeldes der Erde im Außenraum zur Bahnberechnung von Satelliten benötigt wird.

Setzt man vollkommene Gleichartigkeit des Raumes voraus, so sind die Kraftlinien eines einzelnen, anziehenden Punktes Kugelradien und die Niveaulflächen, das sind die Flächen gleichen Arbeitswertes, sind konzentrische Kugeln. (s. Abb. 2.)

Würde die Erde Kugelgestalt haben bzw. aus homogenen Kugelschalen bestehen, so würde sich das Lot in Richtung eines Kugelradius stellen, die Lotrichtung und die Lotlinie wäre ident.

Die nächste Näherung an unsere Erde wäre das Rotationsellipsoid, doch ist dies nur eine geometrische Näherung, während das Rotationssphäroid physikalischen Sinn hat. Es ist vom Ellipsoid nur wenig verschieden und ist eine Approximation an die Kräftefunktion. Die Niveaulflächen eines Rotations-Niveausphäroides konvergieren gegen den Pol.

Es ist $W(xyz) = \text{const}$ die Glg. einer Niveaulfläche, und $gdh = -dW$, g ist nicht const., daher sind die Niveaulflächen keine Parallellflächen.

Deshalb sind die theoretischen Lotlinien gegen den Äquator konvex gekrümmte Kurven, deren Schmiegungebenen im Meridian liegen. Denn sie sind die orthogonalen Trajektorien der Schar der Niveaulflächen. Die Tangente an die Lotlinie in einem Punkt ergibt die Lotrichtung.

Wir erhalten für die theoretische (normale) Lotkrümmung

$$\Delta \bar{\varphi}'' = - 0''000171 \sin 2\varphi H m$$

sie erreicht erst für eine Höhe von 5841 m eine Bogensekunde.

Zurückkommend zum Geoid (Niveaulflächen, von denen die Oberfläche der Weltmeere einen Teil bildet) wissen wir, daß dieses aus analytischen Flächenstücken besteht, d. h. daß es gegenüber dem Rotationssphäroid Hebungen und Senkungen aufweist. Als orthogonale Trajektorien der Niveaulflächen haben also die Lotlinien außer der normalen Krümmung im Meridian weitere Abweichungen vom theoretischen Verlauf, die wir zum Unterschied von der normalen Lotkrümmung als Störkrümmung bezeichnen. (s. Abb. 3.)

Zur hypothesenfreien Bestimmung der Schar der Niveaulflächen sind nach Bruns 5 verschiedene Arten von Messungen notwendig.

1. Triangulierung
2. geographische Ortsbestimmung
3. geometrisches Nivellement
4. trigonometrisches Nivellement
5. Schwere-Messungen

Unter Triangulierung versteht man die Ableitung von langen Strecken aus der

Messung einer kurzen, der sogenannten Grundlinie, und Messung von Dreieckswinkeln. (s. Abb. 4.)

Es kann also zum Beispiel die Entfernung von A nach P und ihre Richtung in Bezug auf C bestimmt werden. Durch die geographische Ortsbestimmung kann die Richtung der Tangente an die Lotlinie in A und P abgeleitet werden. Gehen wir nun wieder zu unseren Begriffen Rotationsellipsoid als Rechenfläche, Geoid als mathe-

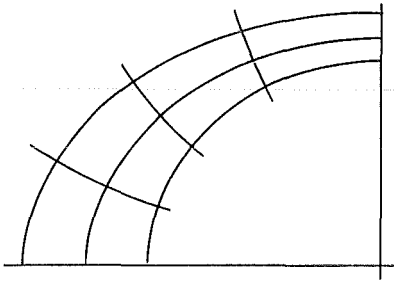


Abb. 3

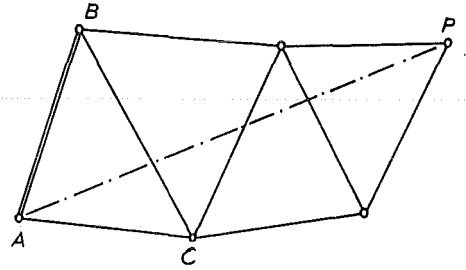


Abb. 4

mathische Erdfigur und zur physischen Erdoberfläche zurück, so kann zum Beispiel im Gebirge die Linie AP durch einen gebrochenen Linienzug dargestellt werden. Einfachheit halber seien in A die physische Erdoberfläche, der Geoidpunkt und das Rotationsellipsoid ident.

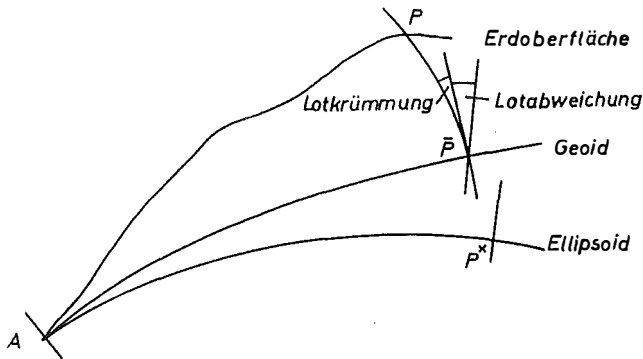


Abb. 5

Auch die Lotrichtungen sollen übereinstimmen. (s. Abb. 5.) Wir rechnen auf dem Ellipsoid von A nach P^* und projizieren mit der Ellipsoidnormalen P^* auf das Geoid. Die Projektion vom Oberflächenpunkt auf das Geoid muß mit der gekrümmten Lotlinie erfolgen. Wir sehen also, daß bei der Bestimmung der Lotabweichung am Geoid die Lotkrümmung berücksichtigt werden muß. Diese Lotkrümmung kann im Gebirge Größen bis zu einer Bogensekunde erreichen.

Zu den bestehenden Methoden zur Bestimmung der Lotkrümmung von Gaßmann, Ledersteger, Arnold und Schöps ist es mir gelungen, in den letzten 10 Jahren eine Methode zu entwickeln, die besonders im Gebirge brauchbar zu sein scheint, da sie keine Rechenarbeit für umständliche Reduktionen erfordert.

Aus der Flächentheorie erhalten wir, wenn wir für die erste Ableitung von $W(x, y, z)$ nach z die Schwerebeschleunigung g setzen und $\frac{\partial g}{\partial s} = G$ als Horizontalgradienten bezeichnen, für den Krümmungsradius der Lotlinie im Messungspunkt

$$R = \frac{g}{G} \quad \dots 1,0$$

Der Horizontalgradient G kann in jedem Geländepunkt gravimetrisch bestimmt werden und ist, da er sich wesentlich rascher ändert als g , für die Krümmung der Lotlinie charakteristisch.

Um ein Bild über den theoretischen Verlauf des Horizontalgradienten zu erhalten, bedienen wir uns einer Formel von K. Mader über das unendlich ausgehende rechtwinkelige Prisma. (s. Abb. 6.) Es soll sich in der x -Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken, in der y -Richtung von y_1 bis ∞ und in der z -Richtung von z_1 bis z_2 reichen.

$$\text{Man findet } \frac{1}{k^2 \sigma} V_{yz} = \ln \frac{y_1^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_1^2}$$

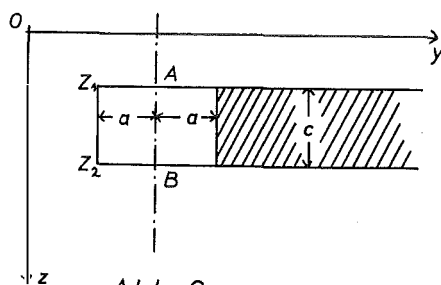


Abb. 6

Obwohl die Formel nur für das Außenpotential gilt, kann damit für jeden Punkt einer Platte, z. B. auch für die Gerade AB , der Horizontalgradient berechnet werden, wenn man bedenkt, daß sich die Wirkung des in der x -Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ ausgehenden und in der y -Richtung $2a$ breiten Prismas aus Symmetriegründen in der Geraden AB aufhebt. Man braucht also nur mehr die Wirkung des schraffierten Restprismas zu berechnen. Wählt man den Punkt A als Aufpunkt, so ist z_1 Null, man erhält für den Horizontalgradienten einen bestimmten positiven Wert. Nimmt man hingegen den Punkt B als Aufpunkt, so wird z_2 Null und man erhält für den Horizontalgradienten wohl dieselbe Größe, doch hat er das entgegengesetzte Vorzeichen.

Ein kleiner, geneigter Vermessungsbereich läßt sich durch ein Treppenmodell, bestehend aus vielen unendlich ausgehenden Platten, gut approximieren. (s. Abb. 7.) An dieser soll der theoretische Verlauf des Horizontalgradienten unterhalb und oberhalb der Platten untersucht werden. Von den vier wie oben beschriebenen aufeinandergelegten Platten wurde nach der oben genannten Formel der Horizontalgradient in der Vertikalen des Punktes I ermittelt. Wir sehen, daß dieser innerhalb und außerhalb des Modells eine um 180° verschiedene Richtung hat.

Bekanntlich versteht man unter der Krümmung k einer Raumkurve den Reziprokwert des Krümmungsradius R in einem bestimmten Punkt, also $k = \frac{1}{R}$

Im folgenden soll jedoch unter der Lotlinienkrümmung der Richtungsunterschied der Tangenten in zwei Punkten der Lotlinie in der Projektion auf eine zwischen ihnen liegende und zu beiden parallele Ebene verstanden sein.

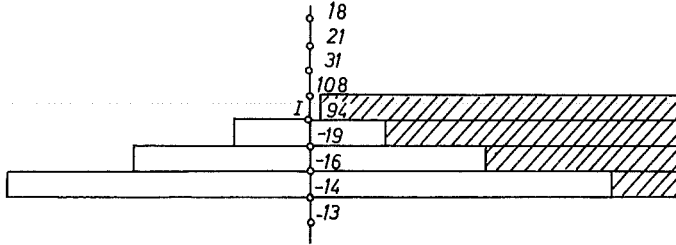


Abb. 7

Diese Krümmung setzt sich auch bei homogenem Untergrund aus zwei Komponenten zusammen: Da die Niveauflächen der Normalerde Rotationsfiguren sind, stellen deren Lotlinien ebene Kurven in den Meridianebenen dar, die gegen den Äquator schwach konvex gekrümmt sind. Die Komponente der Lotlinienkrümmung, die dadurch entsteht, heißt die „Normale Lotlinienkrümmung“ $\Delta\bar{\varphi}''$. Die zweite Komponente der Lotlinienkrümmung $\Delta\tau''$ entsteht durch die Anziehung der Störmassen. Gelingt es, diese Komponente zu messen oder zu errechnen, so könnte man die gesamte Lotlinienkrümmung bestimmen. Die Lotlinie ist im allgemeinen eine Raumkurve. Nehmen wir aber zur Erhöhung der Anschaulichkeit den speziellen Fall an, daß die Lotlinienkrümmung $\Delta\tau''$, welche durch die Anziehung der Störmassen entsteht, in der Nord-Süd-Richtung verläuft, dann könnte man $\Delta\tau''$ zur Normalkrümmung $\Delta\bar{\varphi}''$ addieren. Wir erhalten dann für die gesamte Lotlinienkrümmung $(\Delta\tau'' + \Delta\bar{\varphi}'')$. (s. Abb. 8.) Genau so werden wir im allgemeinen Fall,

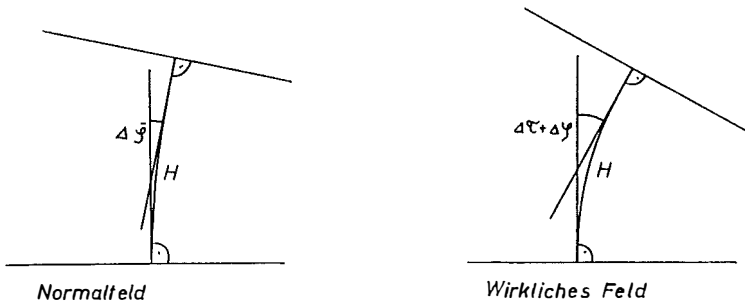


Abb. 8

wenn $\Delta\tau''$ und $\Delta\bar{\varphi}''$ nicht in einer Ebene liegen, vorgehen: Die Krümmungen getrennt berechnen, Messungen auf Grund dieser Krümmungen reduzieren und dann die Reduktionen vektoriell addieren.

Die Krümmung in einem Punkt ist proportional dem Horizontalgradienten in diesem Punkt:

$$\frac{1}{R} = k = \frac{G}{g} \quad \dots 1,11$$

Für weitere Überlegungen ist es wichtig, das Gesetz oder wenigstens eine Annäherung an das Gesetz zu finden, nach welchem die Horizontalgradienten von der Unstetigkeitsstelle der Dichte aus abnehmen.

Gehen wir wieder von der Formel für das unendlich ausgedehnte vierseitige rechtwinkelige Prisma aus. Es soll sich in der x -Richtung von $-\infty$ bis $+\infty$ und in der y -Richtung von y_1 bis ∞ erstrecken; es ist

$$\frac{1}{k^2 \sigma} V_{yz} = \ln \frac{y_1^2 + z_2^2}{y_1^2 + z_1^2} \quad \dots 1,10$$

in welcher Formel σ die Dichte und V_{yz} den Horizontalgradienten bezeichnet. Zur Vereinfachung wählen wir $y_1 = 0$ und setzen $z_1 = z$ und $z_2 = z + c$, und erhalten

$$\frac{1}{k^2 \sigma} V_{yz} = \ln \frac{z^2 + 2cz + c^2}{z^2} \quad \dots 1,12$$

was für $c \ll z$ in

$$\frac{1}{k^2 \sigma} V_{yz} = \ln \left(1 + \frac{2c}{z} \right) \sim \frac{2c}{z} \quad \dots 1,13$$

oder nach Multiplikation mit $k^2 \sigma$ in

$$V_{yz} = \frac{2c}{z} \quad \dots 1,14$$

übergeht.

Bekanntlich entsteht das Krümmungsbild einer Kurve, wenn die Krümmung k in Funktion der Bogenlänge z dargestellt wird.

Für den Kreis ist $k = k_0 = \text{const.}$, was mit

$$dz = R d\tau \quad \dots 1,15$$

auf $d\tau = k_0 dz \quad \dots 1,16$

$$\text{und } \Delta\tau = k_0 \int_0^z dz = k_0 z = \frac{z}{R} \quad \dots 1,17$$

führt.

Nimmt man die Lotlinie als flachen Kreisbogen an (wie das bei der Normalkrümmung annähernd der Fall ist), so gilt bei der Seehöhe H :

$$z = H, \Delta\tau'' = \frac{H}{R} \rho'' = \frac{G \cdot H}{g} \rho'' \quad \dots 1,18$$

Nun soll die Kurve untersucht werden, deren Krümmung

$$\frac{1}{R} = \frac{2c'}{gz} \quad \dots 1,19$$

beträgt. Das Krümmungsbild dieser Kurve ist aus Abbildung 9 ersichtlich:

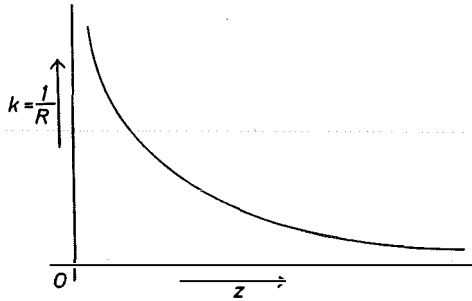


Abb. 9

$$\text{Man findet } \Delta\tau = \frac{2c'}{g} \int \frac{dz}{z} = \frac{2c'}{g} \ln z + C$$

Die Grenzen des bestimmten Integrals ergeben sich einerseits durch die gespiegelte Höhe des Gravimeterschwerpunktes mit 0,5 m und durch die Annahme, daß bei z_0 praktisch keine Krümmung mehr vorhanden ist; so sei für ein bestimmtes z_0 beispielsweise $G = 0,01 \cdot 10^{-3}$ mgal/m. Der innere Oberflächengradient G liefert für c' die Gleichung

$$G = \frac{2c'}{0,5} = 4c' \quad \dots 1,20$$

womit wir z_0 aus

$$0,01 = \frac{2c'}{z_0} \text{ erhalten.} \quad \dots 1,21$$

Für $\Delta\tau''$ erhalten wir

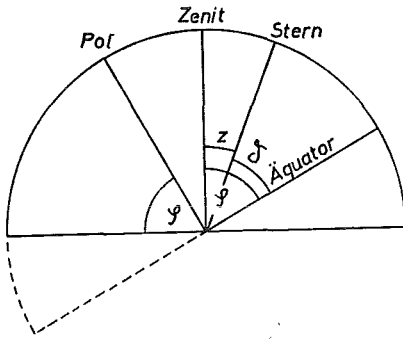
$$\Delta\tau'' = \frac{2c'\rho''}{g} \ln \frac{z_0}{0,5}$$

So betrug z. B. die gesamte Lotkrümmung am ca. 500 m hohen Buschberg (dort wurde Anfang der Sechzigerjahre ein Gravimeter-Versuchsfeld aufgebaut) etwa 0''5. Die Richtung der Schmiegungebene drehte von 129° an der Oberfläche auf 1° auf dem Geoid zurück.

Besonders im Gebirge wirkt sich die Lotkrümmung nicht nur bei der Projektion auf das Geoid, sondern auch bei der Reduktion eines gemessenen Azimutes aus. Es ist die Aufgabe der Höheren Geodäsie, zu zeigen, wann diese berücksichtigt werden muß.

Nun will ich über die nächste Messungsgruppe, über die geographische Orts-

bestimmung im Gebirge, sprechen. Als Assistent hatte ich die Ehre, einen Sommer lang im Rahmen des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen bei Polhöhen- und Azimutmessungen auf dem Rennfeld und auf der Hohen Veitsch bei Bruck a. d. Mur mitarbeiten zu dürfen. Die Polhöhe wurde aus Meridianzenitdistanzen bestimmt: (s. Abb. 10).



bei Oberer Kulmination
 Stern im Süden : $\varphi = \delta_1 + z_1$
 im Norden : $\varphi = \delta_2 - z_2$
 bei Unterer Kulmination:
 $\varphi = 180 - (\delta_3 + z_3)$

Abb. 10

Das Azimut wurde vom Polstern abgeleitet. In Verwendung stand ein Repsold-Universalinstrument mit einem Gewicht von ca. 30 kg (ein modernes Instrument dieser Art wiegt 25 kg), ein UKW-Empfänger und zwei Chronometer. Alle Lasten einschließlich zweier Zelte wurden erst mit einem Pferdewagen und dann mit Trägern an einem Reisetag auf den Berg geschleppt.

Damals unbelastet von allen klassischen Methoden kam ich von dem Gedanken nicht los, es müßte doch möglich sein, diese Ortsbestimmungen mit einem guten geodätischen Instrument, so wie es auf Bergen zur Beobachtung von Punkten 1. Ordnung verwendet wird, durchzuführen. Das heißt also, man müßte aus reinen Horizontalbeobachtungen, ohne Zenitdistanzen, Polhöhe und Azimut ableiten können. Im darauffolgenden Herbst hatte ich dann den folgenden Gedanken:

Es gibt in der Sternbahn eine Stellung, die heißt die größte Digression. Sie entsteht dann, wenn die Vertikalebene die Sternbahn berührt. (s. Abb. 11).

Es gibt also zwei solche Stellungen, bei denen der parallaktische Winkel 90° ist. In diesem Fall ist

$$\sin a = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} \quad \dots 2,0$$

Es wird die Summe der von Norden aus gezählten absoluten Azimute zweier Digressionssterne gemessen, aus den bekannten Deklinationen dieser Sterne läßt sich der Quotient der Sinusse ihrer Azimute ableiten und schließlich mit Hilfe der Formel

$$\tan \frac{a_2 - a_1}{2} = \frac{m - 1}{m + 1} \tan \frac{a_2 + a_1}{2} \quad \dots 2,1$$

wobei

$$m = \frac{\sin a_1}{\sin a_2} = \frac{\cos \delta_1}{\cos \delta_2} \quad \dots 2,2$$

bedeutet, das Azimut der Sterne berechnen; ferner erhält man aus dem bekannten Azimut die Polhöhe. Der Zeitpunkt der Digression wurde, wenn nicht zufällig ein Radiogerät zum Zeitvergleich vorhanden war, graphisch ermittelt. Die Abbildung 12 zeigt anschaulich diese Zeitbestimmung. Die abgelesenen Zeiten sind die Abszissen, die Lesungen am Horizontalkreis die Ordinaten und das Minimum der Kurve gibt die Digressionszeit.

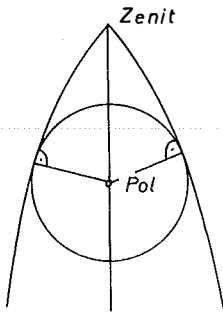


Abb. 11

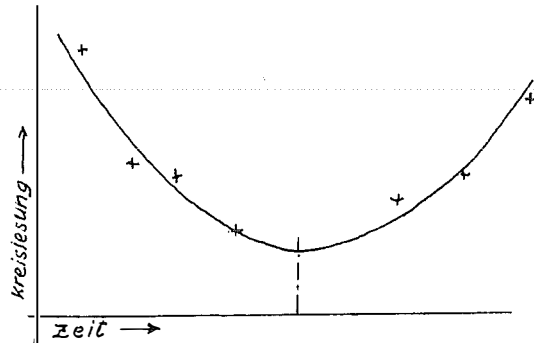


Abb. 12

Der aus allen zenitalen Sternen auf diese Art abgeleitete Stand der Uhr ergab sich mit einem mittleren Fehler von etwa ± 1 s. Diese Genauigkeit genügt zur Reduktion der Horizontallesungen aller Beobachtungen auf den Zeitpunkt der größten Digression.

Dieser Gedanke wurde von mir durch Fehleruntersuchungen und graphische Erstellung von Sternprogrammen zu meiner Habilitationsarbeit ausgebaut und 1952 in der Österr. Zeitschrift für Vermessungswesen in den Heften 1, 2 und 3 veröffentlicht. Sie wird heute hauptsächlich in Ostdeutschland verwendet, sogar eine Dissertation wurde bereits darüber geschrieben. Ich bin stolz darauf, daß sie nach 17 Jahren, Ende 1968, im Bulletin géodésique erschienen ist. Allerdings zeichnet als Verfasser ein Herr P. Gleinsvik aus Norwegen, der vergessen hat, meinen Namen in der Literatur anzuführen. Auf die Parallelität der Gedankengänge und der Formeln machten mich Herr Prof. Fuchs, Vorstand des Institutes für Astronomie unserer Universität, und Herr Dr. Bretterbauer von der Technischen Hochschule Wien aufmerksam. Ich danke beiden Herren dafür.

Aus dem Beispiel des Astronomen Richer sehen wir eine Möglichkeit zur Schweremessung über die Zeitmessung der Pendelschwingung. Sie gehört zu den sogenannten dynamischen Methoden. Es wird dabei entweder die Fallgeschwindigkeit (Atwood'sche Fallmaschine) oder die Ausflußgeschwindigkeit durch eine enge Öffnung oder die Schwingungsdauer eines Pendels gemessen.

Eine Möglichkeit, nicht die Schwerkraft, sondern ihre Ableitungen zu messen, bietet die Drehwaage von Eötvös. Sie beruht auf der Nichtparallelität der Lotlinien und hat eine Genauigkeit von 10^{-9} gal. Im Gegensatz zu der dynamischen Schweremessung wurden die statischen Schweremesser, die Gravimeter, entwickelt. Sie beruhen auf der Beobachtung der Gleichgewichtslage einer Masse, deren Schwere eine Gegenkraft als Vergleichskraft entgegenwirkt.

Soll noch 0,01 mgal meßbar sein, so ist eine Längenänderung auf $0,002 \mu$ genau zu messen. Die Ableitung für die Torsionsfederwaage ergibt für die Messung von 0,01 mgal einen Winkel von $0,013''$.

Von den vielen Gravimetertypen sollen hier zwei gezeigt werden: (Abb. 13 und Abb. 14).

Askaniagravimeter

Quarzgravimeter

mit photoelektrischer Ablesung
und Thermostat

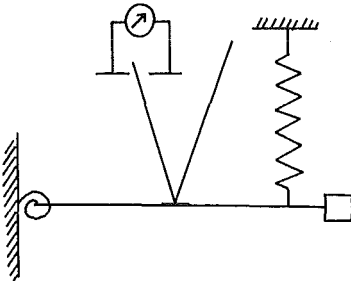


Abb. 13

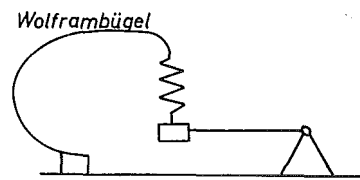


Abb. 14

Das Wordengravimeter ist ein Quarzgravimeter und fast vollständig temperaturkompensiert. Daher ist sein Ausmaß auch wesentlich kleiner. Die horizontale Lage des Waagebalkens bleibt auf Grund der Kompensation unverändert.

Die Reduktion des beobachteten Schwerewertes ist nur bei bekannter Dichte des Untergrundes möglich. Die Freiluftreduktion beträgt für 10 m Höhenunterschied etwa 3mgal. Die Bouguer-Reduktion berücksichtigt die über einem Punkt liegende Masse und beträgt für die ebene Platte $2\pi k^2 \sigma$. Bei der Reduktion von Prey wird die ebene Platte wieder aufgesetzt.

Bei Schweremessungen im Gebirge sind schräge Flächen vorhanden. Es muß in diesem Fall der Berg erst eingeebnet werden, d. h. die Anziehung der Massen über dem Messungspunkt und die der Massen unter dem Messungspunkt muß erst berücksichtigt werden. Diese topographische Reduktion ist äußerst kompliziert und im Hochgebirge nicht exakt durchführbar, da das umliegende Gelände nicht genau erfaßt werden kann und die Dichte des Untergrundes nicht bekannt ist.

Ich habe aus diesem Grund in den letzten Jahren eine Methode zur Dichtebestimmung aus Schweremessungen entwickelt, bei welcher die topographische Reduktion nicht berücksichtigt werden braucht.

Die Bruns'schen Formeln werden als bekannt vorausgesetzt:

$$\left. \begin{aligned} H_i - H_a &= -4\pi k^2 \sigma \cos \delta \sin \delta \\ V_i - V_a &= -4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta \end{aligned} \right\} \dots 3,00$$

Es werden zwei Annahmen gemacht:

1. Die Falllinie eines schrägen Hanges soll eine Gerade sein:

2. Es soll

$$\frac{\Delta g}{h} = V_i - V_a = -4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta \quad \dots 3,01$$

und

$$\frac{\Delta g}{s} = H_i - H_a = -4\pi k^2 \sigma \cos \delta \sin \delta \text{ sein.} \quad \dots 3,02$$

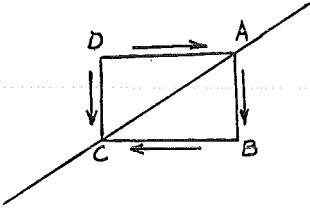


Abb. 15

In den vier Punkten A, B, C, D der Abb. 15 an der schrägen Grenzfläche zweier Räume mit dem Dichteunterschied σ seien die Schwerewerte g_A , g_B , g_C und g_D gemessen. So ist die Differenz der Vertikalgradienten

$$V_i - V_a = g_B - g_A - g_C + g_D \quad \dots 3,03$$

Wollen wir die Differenz der Gradienten durch $g_A - g_C$ ausdrücken, so müssen wir die rechte Seite der Gleichung mit $+g_A$ und $-g_A$ erweitern, d. h. es wäre dann

$$g_B + g_D = 2g_A \quad \dots 3,04$$

und g_A ist der Mittelwert zwischen g_B und g_D .

Aus dem Gradientenbild sieht man, daß es grundsätzlich möglich ist, daß g_A der Mittelwert aus g_B und g_D sein kann, denn die Schwerkraft nimmt von D nach A und von A nach B zu.

Im Innenraum suchen wir zunächst den Zusammenhang von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$. Bekanntlich finden wir die Darstellung von $\frac{\partial v}{\partial x}$ für innere Punkte als Summe zweier Potentiale

$$U = \iiint \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \frac{dv}{r}; \quad W = - \iint \frac{\sigma \cos(N, \xi)}{r} do \quad \dots 3,05$$

und damit

$$\frac{\partial V}{\partial x} = W + U \quad \dots 3,06$$

Es ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \quad \dots 3,07$$

also

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - \iint \frac{\sigma \cos(N, \xi) (\xi - x)}{r^3} do + \iint \int \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \frac{(\xi - x)}{r^3} dv \quad \dots 3,08$$

$$\text{und } \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \dots 3,09$$

somit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = - \int \int \frac{\sigma \cos(N, \xi) (\zeta - z)}{r^3} do + \int \int \int \frac{\partial \sigma (\zeta - z)}{\partial \xi} \frac{1}{r^3} dv \quad \dots 3,10$$

Wir können für Schichten in der Nähe der Trennfläche δ fast konstant setzen und es gilt mit großer Annäherung

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + r \cos \delta; \zeta = z + r \sin \delta \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \cos \delta = \frac{\xi - x}{r}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial r} = \sin \delta = \frac{\zeta - z}{r} \end{aligned} \right\} \quad \dots 3,11$$

daher ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = - \int \int \frac{\sigma \cos(N, \xi) \cos \delta}{r^2} do + \int \int \int \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \cdot \frac{\cos \delta}{r^2} dv \quad \dots 3,12$$

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = - \int \int \frac{\sigma \cos(N, \xi) \sin \delta}{r^2} do + \int \int \int \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \cdot \frac{\sin \delta}{r^2} dv \quad \dots 3,13$$

somit ist im Innenraum

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \operatorname{ctg} \delta \quad \dots 3,14$$

Wir wollen nun wieder den Vertikalgradienten im Außenraum mit V_a und im Innenraum mit V_i , den Horizontalgradienten $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ im Außenraum mit H_a und im Innenraum mit H_i bezeichnen.

Für den Innenraum gilt die Poisson'sche Gleichung.

Wir setzen den Wert für $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ aus Gleichung (3,14) in diese ein und erhalten bei Vernachlässigung von $2\omega^2$

$$H_i \operatorname{ctg} \delta - V_i = -4\pi k^2 \sigma \quad \dots 3,15$$

oder für H_i die Bruns'sche Formel eingesetzt:

$$H_a \operatorname{ctg} \delta - 4\pi k^2 \sigma \cos^2 \delta - V_i = -4\pi k^2 \sigma \quad \dots 3,16$$

also

$$H_a \operatorname{ctg} \delta + 4\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta = V_i \quad \dots 3,17$$

Setzen wir nun für V_i die Bruns'sche Gleichung ein, so erhalten wir

$$H_a \operatorname{ctg} \delta - V_a = -4\pi k^2 \sigma \quad \dots 3,18$$

Betrachten wir die Abbildung und dazu die Gleichungen (3,04), so wissen wir, daß nur dann die Gleichung (3,01) gilt, wenn die Zunahme der Schwerkraft von D nach A und von A nach B gleich groß ist. Nun ist aber die Zunahme der Schwerkraft von Punkt D nach Punkt B laut Gleichung (3,17) gleich

$$2 H_a \operatorname{ctg} \delta + 4\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta$$

Wir müssen also Δg um $2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta$ verbessern, um im Mittel zwischen D und B zu liegen. Also lautet die verbesserte Gleichung (3,01), da Δg negativ ist:

$$\sigma = \frac{\Delta g + 2\pi k^2 \sigma \sin^2 \delta}{-4\pi k^2 \cos^2 \delta} = \frac{\Delta g}{-4\pi k^2 \cos^2 \delta} - \frac{\sigma'}{2} \tan^2 \delta \quad \dots 3,19$$

$$\text{wenn } \sigma' = \frac{\Delta g}{-4\pi k^2 \cos^2 \delta} \text{ ist.} \quad \dots 3,20$$

Es liegt auf der Hand, daß diese Dichtebestimmung zur Ermittlung des unterirdischen Felsverlaufes unter Aufschüttungen verwendet werden kann. Man braucht nur über der Aufschüttung bis hinauf zum anstehenden Felsen in der Falllinie Gravimetermeßpunkte anlegen und dann die Dichtewerte vergleichen.

Diese Methode wurde schon vielfach erprobt: am Katschberg, am Wolfsbergtunnel und am geplanten Brententunnel im Salztal. Probebohrungen haben die Richtigkeit von Felsmutungen bestätigt. In der Gasteinerklamm war die Felsmutung nicht richtig, obwohl die berechneten Dichtewerte stimmten, da durch das unsichtbare mächtige Felsgeröll keine eindeutigen Aussagen über den Felsverlauf gemacht werden konnten.

In den letzten 3 Jahren hatte ich pro Jahr höchstens 2—3 Wochen ein Gravimeter leihweise zur Verfügung, ich könnte mir vorstellen, daß ich diese Methode der Dichtebestimmung im Gebirge noch wesentlich verbessern und ausbauen könnte, hätte ich hier in Innsbruck ein Gravimeter an meinem Institut.

Das war ein kurzer Bericht über Arbeiten aus eigener Werkstatt über das Messen und Wägen im Gebirge.

Ich freue mich heute schon, wenn unsere Jugend durch eigene Leistung Anschluß an unsere Arbeit findet, um dann durch neue Gedanken und in Diskussionen mit uns über uns hinauszuwachsen.

Geodimeter-Vergleichsmessungen auf der Prüfbasis Wien, Prater-Hauptallee

von *Josef Zeger*, Wien

(Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen)

Zusammenfassung:

Die bei der Triangulierungsabteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen in Verwendung stehenden Geodimeter werden immer wieder durch Vergleichsmessungen auf der Prüfbasis Wien, Prater-Hauptallee kontrolliert. Die bisher auf der Prüfbasis gemessenen 1165 Serien bilden die Grundlage der Tabellen, welche u. a. die Verteilung der Maximaldifferenzen zwischen den drei Frequenzmessungen einer Serie, die Verteilung der Fehler der gemessenen Serien gegenüber den Sollwerten sowie eine Zusammenstellung der inneren und äußeren Genauigkeit dieser Vergleichsmessungen beinhalten. Aus allen auf der Prüfbasis durchgeführten Vergleichsmessungen ergibt sich in Bezug auf den Sollwert ein mittlerer Fehler von $\pm 14,3$ mm für eine Serie.