Paper-ID: VGI_197110

Über die Äquivalenz von Lösungen des geodätischen Randwertproblems

Erhart Ecker [1]

[1] *Technische Universität Berlin, 12. Straße des 17. Juni 135*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **59** (4), S. 97–105

1971

BibTEX:

```
@ARTICLE{Ecker_VGI_197110,
Title = {{\"U}ber die {\"A}quivalenz von L{\"o}sungen des geod{\"a}tischen
   Randwertproblems},
Author = {Ecker, Erhart},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen},
Pages = {97--105},
Number = {4},
Year = {1971},
Volume = {59}
}
```

ÖSTERREICHISCHE

ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom

Österreichischen Verein für Vermessungswesen

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen), der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer
o. Prof. Hofrat Dr. phil., Dr. techn. h. c., Dr.-Ing. E. h. K. Ledersteger und
Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

Nr. 4 Baden bei Wien, Ende August 1971 59. Jg.

Über die Äquivalenz von Lösungen des geodätischen Randwertproblems

Von *Erhart Ecker*, Berlin

Zusammenfassung

Für das geodätische Randwertproblem existieren im wesentlichen zwei verschiedene Lösungen, entsprechend den Zugängen über die Formulierung und Lösung einer Integralgleichung einerseits und die analytische Fortsetzung der Schwereanomalien andererseits. Zwei für die unterschiedlichen Zugänge typische Lösungen werden in dieser Arbeit auf ihre gliedweise Äquivalenz untersucht und ein rechnerischer Äquivalenzbeweis für die ersten vier Glieder der Lösungsreihen gegeben.

1. *Die beiden Lösungen von Brovar und Moritz*

In diesem Abschnitt werden die beiden Lösungen des geodätischen Randwertproblems von Brovar und Moritz gegenübergestellt, um im 3. Abschnitt für die ersten vier Glieder der Lösungsreihen die Äquivalenz zeigen zu können. Daß diese Äquivalenz bestehen muß, wurde schon von Moritz festgestellt, denn beide Lösungen, so unterschiedlich sie gewonnen sind, stellen asymptotische Reihen derselben Funktion bezüglich desselben Parameters dar und müssen daher gliedweise äquivalent sein (Duschek, S. 26). Da in beiden Lösungsansätzen die planare Approximation eingeführt ist, müssen sich die Glieder der Lösungsreihen auch nur in planarer Approximation entsprechen.

Die Brovarsche Lösung: Anfangs der Sechzigerjahre hat Brovar das geodätische Randwertproblem im Anschluß an Molodensky über Formulierung und Lösung von Integralgleichungen in etlichen Variationen dargestellt. Wir beziehen uns hier auf die im Endergebnis einfachste Lösung (Brovar, S. 237—240), die folgende Gestalt hat:

$$T = \sum_{n=o}^{\infty} T_n^B, \qquad \dots (1)$$

$$T_n^B = S(G_n) + \sum_{\nu=1}^{p} \binom{-1/2}{\nu} \frac{R^2}{2\pi} \iint_\sigma \frac{(h - h_P)^{2\nu}}{l_0^{2\nu+1}} G_{n-2\nu}\, d\sigma, \qquad \dots (2)$$

$$G_0 = \Delta g, \qquad \dots (3')$$

$$G_n = \sum_{\nu=0}^{q} \binom{-3/2}{\nu} \frac{R^2}{2\pi} \iint_\sigma \frac{(h - h_P)^{2\nu+1}}{l_0^{2\nu+3}} G_{n-2\nu-1}\, d\sigma -$$

$$\sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu \tan^{2\nu}\beta \; G_{n-2\nu}\, d\sigma, \qquad \dots (3)$$

Hierin ist $S(f)$ das Stokessche Integral, angewandt auf f, also

$$S(f) = \frac{R}{4\pi} \iint_\sigma f\, S(\psi)\, d\sigma,$$

p der ganzzahlige der beiden Werte $n/2$, $(n - 1)/2$ und q der ganzzahlige der beiden Werte $(n - 1)/2$, $(n - 2)/2$. Alle anderen Bezeichnungen, wie T, Δg, h, l_0, β, σ, $S(\psi)$ usw. entsprechen dem Buch „Physical geodesy" von Heiskanen und Moritz.

Die Moritzsche Lösung: Moritz hat Ende der Sechzigerjahre eine Lösung des geodätischen Randwertproblems aus einem heuristischen Ansatzpunkt hergeleitet (Moritz, 1969, S. 18—22). Er schrieb eine Taylorreihe für die Fortsetzung der Schwereanomalien vom Geoid (Δg^*) auf die Topographie (Δg) an und formalisierte sie durch $\Delta g = U(\Delta g^*)$. Durch den der Fortsetzung nach unten entsprechenden Umkehransatz $\Delta g^* = D(\Delta g)$ bekam er aus $\Delta g^* = D[U(\Delta g^*)]$ die Operatoridentität $DU = \mathrm{I}$, aus der er mithilfe der Molodenskyschen Methode, h durch kh zu ersetzen und nach Potenzen von k zu sammeln, den die Fortsetzung nach unten bewirkenden Operator D aus U bestimmte. Durch Anwendung der Stokesschen Formel auf $\Delta g^* = D(\Delta g)$ erhält er das Störpotential T^* auf dem Geoid und durch Fortsetzung nach oben das Störpotential T auf der Topographie.

Das Ergebnis dieser Vorgangsweise (Moritz, 1969, S. 22) bei Fortsetzung der Schwereanomalien auf das Niveau des Punktes, in dem die Stokessche Formel angewandt wird, läßt sich durch folgende Gleichungen zusammenfassen:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n^M, \qquad \dots (4)$$

$$T_n^M = S(g_n), \qquad \dots (5)$$

$$g_0 = \Delta g, \qquad \dots (6')$$

$$g_n = -\sum_{k=1}^{n} z^k L_k (g_{n-k}), \; z = h - h_A. \qquad \dots (6)$$

Hierin ist h die Höhe des laufenden Punktes im Stokesschen Integral, während h_A die Höhe des Aufpunktes ist, in dem das Stokessche Integral zur Anwendung kommt. Für die linearen Operatoren L_n gilt

$$L_0 = \mathrm{I},$$

$$L_1(f) = \frac{R^2}{2\pi} \iint_\sigma \frac{f - f_P}{l_0^3} \, d\sigma, \qquad \ldots (7)$$

$$L_n(f) = \frac{1}{n} L_1 [L_{n-1}(f)] = \frac{1}{n!} L_1^n (f). \qquad \ldots (8)$$

Die Formeln (5), (6) lassen sich noch, wie sich allgemein zeigen läßt, im Hinblick auf die Ausrechnung vereinfachen. Ersetzt man die Rekursion in (6) durch

$$\overline{g}_0 = \Delta g, \ \overline{g}_n = - \sum_{k=1}^{n} h^k L_k (\overline{g}_{n-k}), \qquad \ldots (9)$$

so kann man die ursprünglichen g_n durch

$$g_0 = \overline{g}_0, \ g_n = - \sum_{k=1}^{n} (h^k - h_A^k) \, L_k (\overline{g}_{n-k}) \qquad \ldots (10)$$

darstellen. Dies kann man wie folgt deuten: durch $\overline{g} = \Sigma \, \overline{g}_n$ wird ja, entsprechend der Tatsache, daß das Moritzsche Verfahren in planarer Approximation als Taylorreihe deutbar ist, gerade die Fortsetzung der Schwereanomalien auf das Geoid vollzogen. Die restlichen Terme von (10) von der Form

$$\sum_{k=1}^{n} h_A^k \, L_k(\overline{g}_{n-k})$$

müssen also zwangsläufig für die Fortsetzung von $\overline{g}$ ins Aufpunktsniveau h_A verantwortlich sein.

Bilden wir nun T_n^M nach (5), so finden wir unter Verwendung von (10) und $S(h_s^n f) = h_A^n S(f)$, sowie den in planarer Approximation gültigen Formeln (Moritz, 1969, S. 10)

$$S[L_1(f)] = L_1 [S(f)] = -f, \qquad \ldots (11)$$

die wir natürlich auch in der Form $S[L_n(f)] = S[\frac{1}{n} L_1 L_{n-1}(f)] = - \frac{1}{n} L_{n-1}(f)$ anwenden können,

$$T_n^M = S(\overline{g}_n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k} L_{k-1} (\overline{g}_{n-k}). \qquad \ldots (12)$$

Darin kann der zweite Term vereinfacht werden, indem man aus der Summe das Glied für $k = 1$ herausnimmt, es mittels (9) als Summe schreibt und mit der nun ab 2 laufenden Summe zusammenzieht. Zwar ist die sich so ergebende Darstellung

$$T_n^M = S(\overline{g}_n) + \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) h^k \, L_{k-1} (\overline{g}_{n-k}) - h \Delta g \, \delta_{n,1} \qquad \ldots (13)$$

ein wenig komplizierter als (12), aber für die Ausrechnung praktischer. Schließlich benötigen wir für den Äquivalenzbeweis noch $L_1(T_n^M)$; aus (13) ergibt sich hierfür mit (11)

$$L_1(T_n^M) = -\bar{g}_n + \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) L_1 [h^k L_{k-1} (\bar{g}_{n-k})] - L_1(h\Delta g)\, \delta_{n,1}. \quad \ldots (14)$$

Damit sind wir mit der allgemeinen Umformung der Moritzschen Lösung am Ende und schreiben die ersten vier Terme an. Zunächst erhalten wir aus (9) die $\bar{g}_n$:

$$\begin{aligned} \bar{g}_0 &= \Delta g, \\ \bar{g}_1 &= -hL_1(\Delta g), \\ \bar{g}_2 &= hL_1[hL_1(\Delta g)] - h^2L_2(\Delta g), \qquad \ldots (15) \\ \bar{g}_3 &= -hL_1\{hL_1[hL_1(\Delta g)]\} + hL_1[h^2L_2(\Delta g)] + h^2L_2[hL_1(\Delta g)] - h^3L_3(\Delta g) \end{aligned}$$

Damit folgt aus (14)

$$\begin{aligned} L_1(T_0^M) &= -\Delta g, \\ L_1(T_1^M) &= hL_1(\Delta g) - L_1(h\Delta g), \\ L_1(T_2^M) &= \frac{1}{2} h^2L_1^2(\Delta g) - hL_1[hL_1(\Delta g)] + \frac{1}{2}L_1[h^2L_1(\Delta g)], \qquad \ldots (16) \\ L_1(T_3^M) &= \frac{1}{6}h^3L_1^3(\Delta g) - \frac{1}{2}h^2L_1^2[hL_1(\Delta g)] - \frac{1}{2}hL_1[h^2L_1^2(\Delta g)] \\ &\quad + hL_1\{hL_1[hL_1(\Delta g)]\} + \frac{1}{3}L_1[h^3L_1^2(\Delta g)] - \frac{1}{2}L_1\{h^2L_1[hL_1(\Delta g)]\}. \end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir die Brovarsche Lösung einer ähnlichen Behandlung unterziehen, um schließlich im 3. Abschnitt die Äquivalenz der Glieder bis $n = 3$ zeigen zu können.

2. *Umformung der Brovarschen Lösung*

Um in die durch die Überschrift angekündigte Materie einsteigen zu können, müssen wir einige weitere Operatoren, Integralsätze und Operatorbeziehungen anführen. Im weiteren werden wir uns damit beschäftigen, wie man diese Kenntnisse anwenden kann, um Integrale mit $1/l_0^{2n+1}$ im Integranden in Linearkombinationen von L_k-Operatoren umzuformen. Dies wird uns schließlich die Umformung der Brovarschen Lösung gestatten.

Einige Operatoren: Der durch (8) und (7) definierte Operator $L_2 = \frac{1}{2}L_1^2$ kann in planarer Approximation durch den tangentialen Anteil Δ_2 des Laplaceoperators Δ ausgedrückt werden. Für Δ_2, wirksam auf der Kugel $r = R$, gelten folgende Darstellungen:

$$\Delta_2 = \frac{1}{R^2}\left(\cot\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right), \qquad \ldots (17)$$

$$= \frac{1}{R_2}\left(\cot\psi \frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + \frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right), \qquad \ldots (17')$$

$$\doteq \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}, \qquad \ldots (17'')$$

worin ϑ, λ und ψ, α zwei Paare sphärischer Polarkoordinaten und $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ topozentrische Koordinaten auf der Kugel $r = R$ sind, mit $\bar{x}$ nach Süden, $\bar{y}$ nach Osten und $\bar{z}$ nach oben.

In planarer Approximation gilt nun $L_1{}^2 + \Delta_2 = \Delta$, und daraus folgt in bezug auf eine auf $r = R$ gegebene Flächenfunktion die Beziehung

$$\Delta_2 = -L_1{}^2 = -2L_2. \qquad \ldots (18)$$

Nun gibt es für Flächenfunktionen einen Integralsatz (Mc Connell, S. 189; Moritz, 1968, S. 8), der für die Kugel spezialisiert die Gestalt

$$-\iint_\sigma D(U, V)\, d\sigma = \iint_\sigma U \Delta_2 V\, d\sigma = \iint_\sigma V \Delta_2 U\, d\sigma$$

hat. Hierin ist D ein Operator, der in topozentrischen Koordinaten durch

$$D(U, V) = \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} \frac{\partial V}{\partial \bar{y}} \qquad \ldots (19)$$

definiert ist. In Zusammenhang mit dem Integralsatz brauchen wir den Operator D aber nicht, denn von der Integralformel nützen wir nur das rechte Gleichheitszeichen aus; berücksichtigt man $\Delta_2 = -2L_2$, so kann man die Integralformel in der Form

$$\iint_\sigma U L_2 V\, d\sigma = \iint_\sigma V L_2 U\, d\sigma \qquad \ldots (20)$$

schreiben. Diese Formel wird für die Umformung der Brovarschen Lösung grundlegend sein. Man kann sie auch direkt leicht bestätigen, wenn man U, V als in konvergente Kugelflächenfunktionsreihen entwickelbare Funktionen voraussetzt und für $L_2 = \frac{1}{2} L_1{}^2$ die Beziehung (Heiskanen und Moritz, S. 39 (1—102))

$$f = \Sigma f_n \qquad \Longrightarrow \qquad L_1(f) = -\frac{1}{R} \Sigma\, n f_n \qquad \ldots (21)$$

verwendet.

Aus (17''), (18) und (19) leitet man leicht folgende, für spätere Anwendungen nützliche Beziehungen her:

$$L_1{}^2(UV) = UL_1{}^2(V) + VL_1{}^2(U) - 2D(U, V), \qquad \ldots (22)$$

$$D(U^n, V) = n\, U^{n-1}\, D(U, V), \qquad \ldots (23)$$

$$U D(V, V) = -\frac{1}{2} L_1{}^2(UV^2) + UL_1{}^2(UV) - \frac{1}{2} U^2 L_1{}^2(V); \qquad \ldots (24)$$

letztere dient insbesondere zur Umformung von Gliedern wie $G_k \tan^2\beta$, denn es kann für $\tan^2\beta = D(h, h)$ geschrieben werden, wie man sogleich einsieht, wenn man für die Topographie im topozentrischen System die Gleichung $\bar{z} - h(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ ansetzt und die maximale Geländeneigung β als Winkel zwischen der Flächennormale und der $\bar{z}$-Achse mit Hilfe des Gradienten bestimmt.

Abwälzung der Potenzen von $1/l_0$*:* In der Brovarschen Lösung kommen Integrale der Form

$$\frac{R^2}{2\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{(h-h_P)^{2n+1}}{l_0^{2n+3}}\,G_k\,d\sigma$$

vor. Wir müssen nun versuchen, die Potenzen von l_0 mit Hilfe der Integralformel (20) so abwälzen, daß am Schluß

$$\frac{R^2}{2\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{1}{l_0^3}\,\partial\,[(h-h_P)^{2n+1}G_k]\,d\sigma$$

steht; dabei ist ∂ irgendein Differentialoperator, der sich aus der Abwälzung bestimmen muß und der irgendwie aus L_k-Operatoren zusammengesetzt sein muß, um auf eine mit der Moritzschen Lösung vergleichbare Darstellung zu kommen.

Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir zuerst versuchen, $1/l_0^n$ mit Hilfe der L_2-Operatoren auf $1/l_0$ oder $1/l_0^3$ zurückzuführen. Zunächst findet man mittels (17′) aus $l_0 = 2R\sin\frac{\psi}{2}$

$$\Delta_2\left(\frac{1}{l_0^n}\right)=\frac{n^2}{l_0^{n+2}}-\frac{n\,(n-2)}{4\,R^2 l_0^n}$$

und daraus in planarer Approximation, mit $\Delta_2 = -2L_2$,

$$L_2\left(\frac{1}{l_0^n}\right)\doteq-\frac{1}{2}\,\frac{n^2}{l_0^{n+2}}, \qquad \text{. . . (25)}$$

und für $n = 1$

$$L_2\left(\frac{1}{l_0}\right)=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{l_0^3}. \qquad \text{. . . (25′)}$$

Durch wiederholte Anwendung von L_2 auf $1/l_0$ findet man aus (25′) mit (25)

$$\overset{n}{L}_2\left(\frac{1}{l_0}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\frac{[(2n-1)!!]^2}{l_0^{2n+1}}. \qquad \text{. . . (26)}$$

Hierin kann man auf der linken Seite $\overset{n}{L}_2 = \overset{n-1}{L}_2 L_2$ schreiben und (25′) einsetzen; dann erhält man, nach $1/l_0^{2n+1}$ aufgelöst,

$$\frac{1}{l_0^{2n+1}}=\frac{(-2)^{n-1}}{[(2n-1)!!]^2}\,\overset{n-1}{L}_2\left(\frac{1}{l_0^3}\right). \qquad \text{. . . (27)}$$

Diese Formel leistet zusammen mit der Integralformel (20) die Abwälzung der Potenzen von $1/l_0$. Als Beispiel wollen wir die in der Brovarschen Lösung vorkommenden Integrale umformen.

In (2) und (3) kommen die Integrale

$$J=\binom{-1/2}{\nu}\frac{R^2}{2\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{(h-h_P)^{2\nu}}{l_0^{2\nu+1}}G_{n-2\nu}\,d\sigma, \qquad \text{. . . (28)}$$

$$K = \binom{-3/2}{\nu} \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{(h - h_P)^{2\nu+1}}{l_0^{2\nu+3}} G_{n-2\nu-1} \, d\sigma \qquad \ldots (29)$$

vor. Setzt man hierin für $1/l_0^k$ die Formel (27) ein, so kann man über wiederholte Anwendung der Integralformel (20) die Potenzen von $1/l_0$ bis auf $1/l_0^3$ abwälzen, wonach die L_1-Definition angewendet werden kann. Unter Verwendung von (7) und (8) bekommt man

$$J = -\frac{1}{2\nu} L_{2\nu-1} [(h - h_P)^{2\nu} G_{n-2\nu}], \qquad \ldots (28')$$

$$K = L_{2\nu+1} [(h - h_P)^{2\nu+1} G_{n-2\nu-1}]. \qquad \ldots (29')$$

Später brauchen wir noch

$$L_1(J) = - L_{2\nu} [(h - h_P)^{2\nu} G_{n-2\nu}]. \qquad \ldots (28'')$$

Nun können wir an die Umformung der Brovarschen Lösung herangehen.

Umformung der Brovarschen Lösung: Aus (2) und (28′) folgt

$$\overset{B}{T}_n = S(G_n) - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{2\nu} L_{2\nu-1} [(h - h_P)^{2\nu} G_{n-2\nu}], \qquad \ldots (30)$$

und aus (3) mit (29′)

$$G_n = \sum_{\nu=0}^{q} L_{2\nu+1} [h - h_P)^{2\nu+1} G_{n-2\nu-1}] - \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu \tan^{2\nu}\beta \, G_{n-2\nu} + \Delta g \, \delta_{n,0}.$$
$$\ldots (31)$$

Analog zur Vorgangsweise bei der Moritzschen Lösung bilden wir aus (30)

$$L_1(\overset{B}{T}_n) = - G_n - \sum_{\nu=1}^{p} L_{2\nu} [(h - h_P)^{2\nu} G_{n-2\nu}], \qquad \ldots (32)$$

worin wir aus (31) für G_n einsetzen können; das ergibt

$$L_1(\overset{B}{T}_n) = - \sum_{\nu=1}^{n} L_\nu [h - h_P)^\nu G_{n-\nu}] + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu \tan^{2\nu}\beta \, G_{n-2\nu} - \Delta g \, \delta_{n,0}.$$
$$\ldots (32')$$

Hierin widersetzt sich vor allem die zweite Summe einer Umformung in Richtung auf einen allgemeinen gliedweisen Äquivalenzbeweis. Im Einzelfall macht jedoch die Umformung der Glieder dieser Summe mittels (24) keine Schwierigkeiten. Zunächst ergibt sich aus (31) für $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} G_0 &= \Delta g, \\ G_1 &= L_1 [(h - h_P) G_0] = L_1 (h \Delta g) - h L_1 (\Delta g), \\ G_2 &= L_1 [(h - h_P) G_1] + G_0 \tan^2\beta, \\ G_3 &= L_1 [(h - h_P) G_2] + L_3 [(h - h_P)^3 G_0] + G_1 \tan^2\beta. \end{aligned} \qquad \ldots (33)$$

Zur Umformung der Terme $G_0 \tan^2\beta$, $G_1 \tan^2\beta$ steht uns die Formel (24) zur Verfügung. Schwierigkeiten erwachsen hierin allein aus dem Term $L_3\,[(h - h_P)^3 G_0]$. Hier landet man bei korrekter Anwendung der Rechenregeln für die L_k-Operatoren in einer Sackgasse, wenn man die Umformung nicht in einer ganz bestimmten Weise vornimmt; und zwar muß man L_3 als $\frac{1}{3}\,L_1 L_2$ schreiben und sich bei der Berechnung von $L_2\,[(h - h_P)^3\,\Delta g]$ von der Definition (17″) des Operators $\Delta_2 = -\,2\,L_2$ leiten lassen. Dann bekommt man

$$G_2 = L_1\,[hL_1\,(h\Delta g)] - L_1\,[h^2 L_1\,(\Delta g)] + hL_1\,[hL_1\,(\Delta g)] - \frac{1}{2}\,L_1{}^2\,(h^2\Delta g) - \\ -\frac{1}{2}\,h^2 L_1{}^2\,(\Delta g), \qquad \ldots (33')$$

$$G_3 = L_1\{hL_1\,[hL_1\,(h\Delta g)]\} - L_1\{hL_1\,[h^2L_1\,(\Delta g)]\} + L_1\{h^2L_1\,[hL_1\,(\Delta g)]\} \\ -\frac{1}{3}L_1\,[h^3L_1{}^2\,(\Delta g)] - hL_1\{hL_1\,[hL_1\,(\Delta g)]\} + \frac{1}{2}hL_1\,[h^2L_1{}^2\,(\Delta g)] \\ -\frac{1}{2}L_1\,[h^2L_1{}^2\,(h\Delta g)] - \frac{1}{6}h^3L_1{}^3\,(\Delta g) - \frac{1}{2}L^2{}_1\,[h^2L_1\,(h\Delta g)] \\ +\frac{1}{2}L^2{}_1\,[h^3L_1\,(\Delta g)] + \frac{1}{2}h^2L_1{}^2\,[hL_1\,(\Delta g)].$$

Schließlich bekommt man aus (32)

$$L_1\,(T^B_0) = -\,G_0 = -\,\Delta g,$$
$$L_1\,(T^B_1) = -\,G_1, \qquad \ldots (34)$$
$$L_1\,(T^B_2) = -\,G_2 - L_2\,[h - h_P)^2 G_0],$$
$$L_1\,(T^B_3) = -\,G_3 - L_2\,[h - h_P)^2 G_1].$$

Setzt man darin aus (33) für G_k ein, so erhält man die rechten Seiten von (16). Somit haben wir als rechnerisches Endergebnis gefunden, daß

$$L_1\,(T^M_n) = L_1\,(T^B_n),\ n = 0, 1, 2, 3 \qquad \ldots (35)$$

gilt. Aus diesen Gleichungen werden wir im nächsten Abschnitt die Äquivalenz der Glieder folgern.

3. *Äquivalenz der Lösungen*

In (35) haben wir

$$L_1\,(T^M_n - T^B_n) = 0,\ n = 0, 1, 2, 3 \qquad \ldots (36)$$

gefunden. Wir müßten zeigen, daß daraus

$$T^M_n - T^B_n = 0$$

folgt. Leider folgt aber aus (36) nur

$$T_n^M - T_n^B = c_n = \text{konstant},\ n = 0, 1, 2, 3 \qquad \ldots (37)$$

Dies sieht man so ein: nehmen wir an, $f = T_n^M - T_n^B$ sei auf $r = R$ in eine konvergente Kugelflächenfunktionsreihe $f = \sum_{n=o}^{\infty} f_n$ entwickelbar. (Die Annahme der Konvergenz bedeutet hier, wie wir sehen werden, keine wesentliche Einschränkung, da es nur um den konstanten Anteil der Funktion f geht; ähnlich ist es mit der Annahme der Entwickelbarkeit.) Nach (21) folgt aus dem Ansatz

$$L_1(f) = -\frac{1}{R} \sum_{n=o}^{\infty} n f_n.$$

Wir haben gezeigt, daß $L_1(f) = 0$ ist, also gilt $n f_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und hieraus folgt wohl $f_n = 0$ für $n \neq 0$, aber nicht $f_0 = 0$. Es kann also $f_0 = a_0 P_0 (\cos \vartheta) = a_0 =$ konst. ohne weiteres ungleich Null sein, wie behauptet.

Dies mindert aber den Wert der „Äquivalenz" nicht wesentlich, da es ja bei einem Potential kaum jemals auf einen konstanten Anteil ankommt. Bezogen auf Höhenanomalien

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}$$

heißt diese Äquivalenz, daß die nach beiden Lösungsmethoden berechneten Geoidreliefs sich um einen konstanten Betrag der Höhe nach unterscheiden könnten. Dies ist an sich unwesentlich.

Abschließende Bemerkungen: Mit dem Formelsystemen (1) bis (3) und (4) bis (6) von Brovar und Moritz liegen zwei verschiedene Lösungen des geodätischen Randwertproblemes vor. Als asymptotische Entwicklungen derselben Funktion nach demselben Parameter sind sie, wie schon Moritz in seiner ersten Arbeit festgestellt hat, gliedweise äquivalent. Der praktische Äquivalenzbeweis bis T_2 wurde schon von Moritz gegeben; in dieser Arbeit wurde er in etwas strikterem Sinne gliedweise nachvollzogen und um die Äquivalenz für T_3 erweitert. Es wurden Formeln erarbeitet, die grundsätzlich die Grundlage für den praktischen Äquivalenzbeweis der höheren Glieder bieten, jedoch würde vermutlich die Darstellung der Äquivalenz für T_4 sogar für Leser von überdurchschnittlicher Geduld eine kaum zumutbare Belastung sein.

Literatur

Brovar, V. V. (1963): Solution of the Molodenskiy boundary problem. English translation of the Russian journal "Geodesy and Aerophotography" by AGU.

Duschek, A. (1961): Vorlesungen über höhere Mathematik. Band IV. Springer, Wien.

Heiskanen, W. A. und *Moritz, H.* (1967): Physical geodesy. Freeman, San Francisco.

McConnell, A. J. (1957): Applications of the tensor analysis. Dover, New York.

Moritz, H. (1968): Linear solutions of the geodetic boundary-value problem. DGK, Reihe A, Heft 58, München.

Moritz, H. (1969): Nonlinear solutions of the geodetic boundary-value problem. Report Nr. 126, Department of geodetic science, Ohio State University.

Moritz, H. (1970): Molodensky's series and analytical continuation. Report Nr. 145, Department of geodetic science, Ohio State University.