

Paper-ID: VGI\_197113



## Methoden der räumlichen Blockausgleichung und ihr numerischer Aufwand

Heinrich Ebner <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universität Stuttgart, 1, Keplerstraße 11, Institut für Photogrammetrie*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **59** (5), S. 129–139

1971

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Ebner_VGI_197113,  
Title = {Methoden der räumlichen Blockausgleichung und ihr numerischer  
Aufwand},  
Author = {Ebner, Heinrich},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen},  
Pages = {129--139},  
Number = {5},  
Year = {1971},  
Volume = {59}  
}
```



# ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN

Herausgegeben vom  
**Österreichischen Verein für Vermessungswesen**

Offizielles Organ

des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen),  
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung und  
der Österreichischen Gesellschaft für Photogrammetrie

REDAKTION:

emer. o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. H. Rohrer  
o. Prof. Hofrat Dr. phil., Dr. techn. h. c., Dr.-Ing. E. h. K. Ledersteger und  
Hochschuldozent Hofrat Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter

---

Nr. 5

Baden bei Wien, Ende Oktober 1971

59. Jg.

---

## **Methoden der räumlichen Blockausgleichung und ihr numerischer Aufwand**

Von *Heinrich Ebner*, Stuttgart

### *1. Einführung*

Seit dem Aufkommen der elektronischen Rechnung breitet sich die photogrammetrische Blocktriangulation in zunehmendem Maße aus. In vielen Anwendungsfällen erweist sie sich heute sowohl als die schnellste als auch die wirtschaftlichste Methode der Punktbestimmung. Im Bereich der kleinen Maßstäbe dient sie vor allem der Paßpunktbestimmung für die anschließende Kartierung. Dabei zeichnet sich ein Trend zu großen Blöcken mit mehreren 100 oder 1000 Modellen ab, die simultan ausgeglichen werden sollen. Daneben setzt sich die Blocktriangulation auch im großmaßstäblichen Bereich mit wachsendem Erfolg durch [1].

Für die mathematische Formulierung der Blockausgleichung und ihre praktische Realisierung stehen mehrere Wege offen und werden in der Praxis auch beschritten. Sie sollen zunächst in Form eines Überblicks aufgezeigt werden. Im Anschluß daran wird der numerische Aufwand einzelner Verfahren abgeschätzt.

### *2. Mathematische Modelle für die Blockausgleichung*

2.1 Die Bündelblockausgleichung ist die allgemeinste der bisher angewendeten Methoden und basiert auf der Messung von Bildkoordinaten in Komparatoren. Aus den Bildpunkten und den zugehörigen Projektionszentren, die durch Hauptpunkt und Kammerkonstante gegeben sind, werden die einzelnen Bildbündel aufgespannt. Die Orientierung aller Bündel relativ zueinander und in Bezug auf die terrestrischen Paßpunkte erfolgt in einer gemeinsamen Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Wählt man einen Ansatz nach dem zweiten

Standardproblem der Ausgleichsrechnung (vermittelnde Beobachtungen), so ergeben sich die folgenden nichtlinearen Fehlergleichungen

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_{i,j} = f_j \begin{bmatrix} \bar{x}/\bar{z} \\ \bar{y}/\bar{z} \end{bmatrix}_{i,j} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{i,j} \quad \dots (1)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}_{i,j} = R_j \begin{bmatrix} x_i - x_{0,j} \\ y_i - y_{0,j} \\ z_j - z_{0,j} \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

$$R_j = \frac{1}{1 + (a_j^2 + b_j^2 + c_j^2)/4} \begin{bmatrix} 1 + (a^2 - b^2 - c^2)/4 & -c + ab/2 \\ c + ab/2 & 1 + (-a^2 + b^2 - c^2)/4 \\ -b + ac/2 & a + bc/2 \\ b + ac/2 \\ -a + bc/2 \\ 1 + (-a^2 - b^2 + c^2)/4 \end{bmatrix}_j \quad \dots (3)$$

- $[x, y]^T_{i,j}$  = Koordinatenvektor des Punktes  $i$  im Bild  $j$ , bezogen auf den Hauptpunkt  
 $[v_x, v_y]^T_{i,j}$  = Vektor der Verbesserungen  
 $f_j$  = Kammerkonstante für das Bildbündel  $j$   
 $[x_i, y_i, z_i]^T$  = Vektor der Geländekoordinaten des Punktes  $i$   
 $[x_{0,j}, y_{0,j}, z_{0,j}]^T$  = Vektor der Geländekoordinaten des Projektionszentrums  $j$   
 $R_j$  = orthogonale Rodriguez-Matrix für das Bildbündel  $j$

Die Rodriguez-Matrix (3) ist bei der elektronischen Rechnung anderen Orthogonalmatrizen gegenüber etwas im Vorteil, da sie keine Winkelfunktionen enthält. Bei kleinen Drehungen entsprechen die Parameter  $a, b, c$  den Winkeln  $\omega, \psi, \kappa$ .

Die Fehlergleichungen werden für alle gemessenen Punkte aufgestellt. Unbekannte sind die 6 Orientierungsparameter  $a_j, b_j, c_j, x_{0,j}, y_{0,j}, z_{0,j}$  aller Bildbündel  $j$  und die Koordinaten aller Geländepunkte  $i$ . Wegen der Nichtlinearität der Fehlergleichungen muß die Bündelblockausgleichung iteriert werden, bis die geforderte Genauigkeit gewährleistet ist.

2.2 Die Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen setzt relativ orientierte Bildpaare voraus. Für die Messung können daher Präzisions-Stereokartiergeräte wie zum Beispiel der A 8 und der A 10 von Wild, der Planimat von Zeiss und die entsprechenden Konstruktionen anderer Firmen verwendet werden. Es ist aber auch möglich, die Modelle auf analytischem Wege zu gewinnen, wenn die Messung mit Komparatoren erfolgt. Damit ist die Methode auf breiter Basis anwendbar.

Die Verknüpfung der Modelle in Streifenrichtung erfolgt über gemeinsame Projektionszentren. Für ihre Bestimmung stehen je nach Gerätetyp verschiedene Methoden zur Verfügung [2]. Die Blockausgleichung besteht in der gemeinsamen Absolutorientierung aller Einzelmodelle bei gleichzeitiger Berücksichtigung der vorhandenen Paßpunkte und Modellverknüpfungen. In Bezug auf Allgemeinheit und Strenge kommt die Ausgleichung mit Modellen damit nahe an die Bündelmethode heran. Auch hier ist ein Ansatz nach vermittelnden Beobachtungen zweckmäßig. Die Fehlergleichungen erhalten dann die Form:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_i - m_j R_j \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{i,j} - \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_j \quad \dots (4)$$

- $[x, y, z]_{i,j}^T$  = Koordinatenvektor des Punktes  $i$  im Modell  $j$   
 $[v_x, v_y, v_z]_{i,j}^T$  = Vektor der Verbesserungen.  
 $[x, y, z]_i^T$  = Vektor der Geländekoordinaten des Punktes  $i$   
 $m_j$  = Maßstabsfaktor des Modells  $j$   
 $R_j$  = Orthogonale Rodriguez-Matrix für das Modell  $j$  siehe (3)  
 $[\Delta x, \Delta y, \Delta z]_j^T$  = Translationsvektor des Modells  $j$

Für alle Paßpunkte und Verknüpfungspunkte (Punkte, die in mindestens 2 Modellen erscheinen) werden die Fehlergleichungen (4) aufgestellt. Als Unbekannte treten die 7 Transformationsparameter  $a_j, b_j, c_j, m_j, \Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j$  aller Modelle  $j$  und die Geländekoordinaten der Verknüpfungspunkte  $i$  auf. Ist ein Punkt Lage-, Höhen- oder Vollpaßpunkt, so sind die entsprechenden Größen  $x_i, y_i$  und  $z_i$  bekannt.

Die je 7 Unbekannten für die räumlichen Ähnlichkeitstransformationen der einzelnen Modelle können bei der Ausgleichung entweder gemeinsam oder getrennt nach den Lageparametern  $m, c, \Delta x, \Delta y$  und den Höhenparametern  $a, b, \Delta z$  bestimmt werden. Immer aber ist die räumliche Blockausgleichung mit Modellen nichtlinear und erfordert eine iterative Behandlung.

2.3 Die Blockausgleichung mit Streifen setzt im Gegensatz zur Ausgleichung mit Bündeln oder Modellen eine analoge oder rechnerische Bildung einzelner Streifen voraus. Bei der Ausgleichung wird gewöhnlich für jeden Streifen ein eigenes Polynom 2. oder 3. Grades bestimmt. Nach diesem Verfahren arbeiten beispielsweise die Rechenprogramme von Schut [3], die an vielen Stellen praktisch angewendet werden. Die wesentlich geringere Anzahl der Transformationsparameter ergibt gegenüber der Blockausgleichung mit Bündeln oder Modellen zwar kürzere Rechenzeiten, aber auch eine verminderte Genauigkeit. Da heute an vielen Stellen leistungsfähige Computer zur Verfügung stehen, die eine wirtschaftliche Anwendung der allgemeineren Methoden ermöglichen, kann in den letzten Jahren eine gewisse Abkehr von den Polynomverfahren beobachtet werden. Bei der folgenden Abschätzung der Rechenzeiten wird auf die Blockausgleichung mit Streifen daher nicht mehr eingegangen.

### 3. Möglichkeiten der numerischen Behandlung

Bei gegebenen Fehlergleichungen ist für die Realisierung der nichtlinearen Blockausgleichung noch ein großer Spielraum vorhanden. Eine ausführliche Behandlung der verschiedenen Verfahren findet sich zum Beispiel in [4]. In der vorliegenden Arbeit können nur die wichtigsten unter ihnen und auch diese nur kurz genannt werden.

Zunächst seien die Verfahren ohne Bildung vollständiger Normalgleichungen innerhalb der einzelnen Iterationsschritte erwähnt. Sie gehen von einzelnen Gruppen der Normalgleichungen oder direkt von den Fehlergleichungen aus. Der Speicher-

bedarf ist relativ gering und die Programmierung vergleichsweise einfach. Die Anzahl der erforderlichen Iterationen ist zumeist groß und hängt in hohem Maße von der Güte der Näherungswerte für die Transformationsparameter und auch von der Paßpunktverteilung ab, die Rechenzeiten sind daher nicht genau kalkulierbar. Die Stärke dieser Verfahren kommt bei guten Bildflügen und bei günstigen Paßpunktanordnungen voll zum Tragen, bei schlechter Kondition der Blöcke aber kann der numerische Aufwand unangenehm stark anwachsen. Ein Problem für sich sind auch die Abbruchskriterien für den Iterationsprozeß. In diese Gruppe gehört das Rechenprogramm des Ordnance Survey in London [5] und das Programm von King [6], das im Büro Weißmann in Zürich angewendet wird. In beiden Fällen handelt es sich um Blockausgleichung mit Modellen.

Werden bei der Blockausgleichung die Fehlergleichungen jeweils linearisiert und daraus Normalgleichungen gebildet und gelöst, so ergibt sich eine ausgezeichnete Konvergenz mit nur wenigen Iterationsschritten. Aus Aufwandsgründen empfiehlt es sich immer eine Gruppe der Unbekannten zu eliminieren und nur das reduzierte System zu lösen. Eine Reduktion auf die Transformationsparameter bietet den Vorteil, daß der Aufwand für die Gleichungslösung von der Anzahl der Geländepunkte unabhängig ist und diese daher nicht unnötig verringert werden müssen. Die reduzierten Normalgleichungen für eine Iteration können entweder direkt oder wieder iterativ gelöst werden. Für diese iterativen Methoden gelten im Wesentlichen die Vor- und Nachteile der Verfahren ohne komplette Aufstellung der Normalgleichungen. Zu nennen ist hier das Programm für unabhängige Modelle des IGN in Paris, das für die Gleichungslösung die Methode der konjugierten Gradienten verwendet.

Eine direkte Lösung der Normalgleichungen erfordert gegenüber den iterativen Verfahren einen großen Programmieraufwand. Da die Gleichungssysteme für gewöhnlich zu groß sind, um unmittelbar im Kernspeicher einer Rechenanlage gelöst zu werden, wird die reduzierte Normalgleichungsmatrix als Hypermatrix aufgefaßt und, in Submatrizen unterteilt, im externen Speicher abgelegt. Die Gleichungslösung erfolgt nach einem verallgemeinerten Gauß-Verfahren, das auf die einzelnen Submatrizen angewendet wird. Bei effizienter Programmierung lassen sich recht günstige Rechenzeiten erreichen. Der numerische Aufwand ist von der Güte der Befliegung und von der Paßpunktanordnung nur schwach abhängig. Die praktische Anwendung unterliegt somit nahezu keinerlei Beschränkung. Nach diesem Prinzip arbeitet beispielsweise das Bündelprogramm COMBAT der D. Brown Association in Melbourne, USA [7] und das Programmpaket PAT-M für unabhängige Modelle, das am Institut für Photogrammetrie der Universität Stuttgart entwickelt wird [8].

#### 4. Grundlagen für eine Abschätzung des Rechenaufwands

4.1 Die Untersuchung erstreckt sich auf die Blockausgleichung mit Bündeln (B 6) und mit unabhängigen Modellen. Bei den Modellen werden zwei verschiedene Varianten behandelt. Die allgemeinere der beiden ermittelt alle  $7n$  Parameter der räumlichen Transformation gleichzeitig (M7), während die Variante M 43 eine Lage-

Höhe-Iteration vorsieht. Die Lageblockausgleichung verwendet hier nur die Fehlergleichungen der  $x$ ,  $y$ -Modellkoordinaten und ergibt die je 4 Parameter einer ebenen Ähnlichkeitstransformation. Die anschließende Höhen-Iteration dagegen arbeitet mit den Modellhöhen sowie den Projektionszentren und bestimmt die restlichen 3 Unbekannten  $a$ ,  $b$  und  $\Delta z$  pro Modell. Diese Vereinfachungen führen zu einer geringfügigen Genauigkeitseinbuße gegenüber der Variante M 7 (Näheres siehe zum Beispiel [8]).

Im Hinblick auf eine universelle Anwendbarkeit der Programme wird bei den Rechenzeitabschätzungen unterstellt, daß die Normalgleichungen auf das System der unbekanntenen Transformationsparameter reduziert und mit einem direkten Verfahren gelöst werden.

4.2 Die Komponenten des numerischen Aufwands können generell angegeben werden. Sie gelten für alle 3 Methoden der Blockausgleichung:

1. Einlesen der Daten.
2. Ermittlung der Verknüpfungen zwischen den einzelnen Bildern oder Modellen über gemeinsame Punkte.
3. Aufstellen der reduzierten Normalgleichungen.
4. Direkte Gleichungslösung.
5. Berechnung der unbekanntenen Geländekoordinaten.
6. Ausdrucken der Ergebnisse.

Die räumliche Blockausgleichung ist nichtlinear und erfordert daher eine Wiederholung der Einzelschritte 3 bis 5. Dagegen werden die Schritte 1, 2 und 6 nur einmal durchlaufen. Die Anzahl der Iterationen hängt von der Größe der Bildneigungen bei der Befliegung und von der Art der Vorprogramme für die Beschaffung von Näherungswerten der Unbekannten ab. Unter vergleichbaren Voraussetzungen kann für alle drei Blockausgleichungsmethoden, die hier untersucht werden, annähernd die gleiche Anzahl von Iterationsschritten erwartet werden. In den meisten Fällen werden es 2 bis 3 sein.

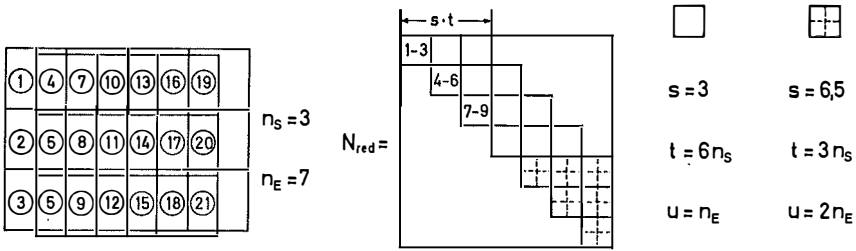
#### 4.3 Vereinfachungen bei der Aufwandsabschätzung.

Wenn größere Blöcke auszugleichen sind, entfällt der Hauptanteil der Rechenzeit auf die Lösung der reduzierten Normalgleichungen. Für eine direkte Gleichungslösung aber können Beziehungen gefunden werden, welche die Rechenzeit bei gegebener Struktur auf wenige Prozent genau erfassen. Der Zeitaufwand für die Lösung der reduzierten Normalgleichungen innerhalb eines Iterationsschrittes kann daher bei allen drei Methoden mit guter Genauigkeit abgeschätzt werden. Der numerische Gesamtaufwand der räumlichen Blockausgleichungen wird sodann durch den vierfachen Betrag dieser Rechenzeiten approximiert. Der Faktor 4 wurde aus dem Zeitaufwand für die einzelnen Programmschritte bei praktischen Blockausgleichungen abgeleitet, wobei angenommen war, daß durchschnittlich 2 bis 3 Iterationen notwendig sind. Er kann für alle drei Methoden als hinreichend realistisch gelten.

#### 4.4 Die Strukturen der reduzierten Normalgleichungen.

Legt man eine rechteckige Blockform zugrunde, so können die Strukturen der reduzierten Normalgleichungsmatrizen  $N_{red}$  unmittelbar angegeben werden.

1. Bündelausgleichung: B 6



- $n_s$  = Streifenanzahl
- $n_E$  = Anzahl der Einheiten pro Streifen (Bilder oder Modelle)
- $u$  = Anzahl der Hyperzeilen in  $N_{red}$
- $s$  = Anzahl der Submatrizen pro Hyperzeile
- $t$  = Spaltenzahl der Submatrizen

Abb. 1

Abbildung 1 zeigt einen regelmäßigen Bündelblock mit 3 Streifen à 7 Bildern und die zugehörige reduzierte Normalgleichungsmatrix. Die Struktur von  $N_{red}$  gilt aber auch für Blöcke, die weniger schematisch aufgebaut sind. Da die Matrix der reduzierten Normalgleichungen symmetrisch ist, wird in Abb. 1 auf die Darstellung der Elemente links der Hauptdiagonale verzichtet. Die Rechenzeit für die Lösung von  $N_{red}$  ist stark von der Bandbreite  $s \cdot t$  abhängig und damit von der Reihenfolge, in der die einzelnen Bilder behandelt werden. Solange  $n_s \leq n_E/2$  ist, empfiehlt es sich, die Bilder quer zur Streifenrichtung zu sortieren. Wenn die Transformationsparameter von jeweils  $n_s$  Bildern zusammengefaßt werden, ergeben sich in jeder Hyperzeile drei Submatrizen, da zum Beispiel die Bildgruppe 1, 2, 3 noch mit der Gruppe 7, 8, 9 über gemeinsame Punkte verknüpft ist.

Wird  $t = 6n_s$  größer, als es der Kernspeicher der Rechanlage erlaubt, so wird jede Submatrix in 4 kleinere zerlegt (in Abb. 1 gestrichelt dargestellt).

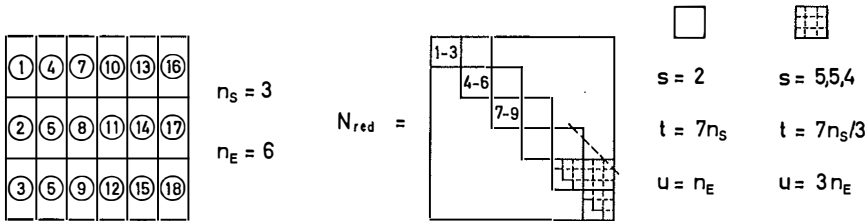


Abb. 2

## 2. Blockausgleichung mit 7 Parametern pro Modell: M 7

Bei unabhängigen Modellen ergeben sich nur zwei Submatrizen pro Hyperzeile, da die Gruppe der Modelle 1–3 beispielsweise mit 4–6, nicht aber mit der Modellgruppe 7–9 verknüpft (Abb. 2). Wird die maximale Dimension von  $t$  überschritten,

so erfolgt auch hier eine Zerlegung der Submatrizen. Neben 4 sind auch 9 Unter-  
matrizen möglich (in Abb. 2 gestrichelt dargestellt).

### 3. Blockausgleichung mit Lage-Höhe-Iteration: M 43

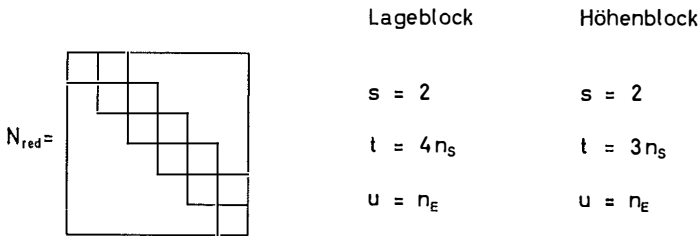


Abb. 3

Anstelle des großen Gleichungssystems von M 7 ergeben sich hier zwei kleinere  
Systeme mit erheblich geringerem Lösungsaufwand.

#### 4.5 Rechenzeiten für die direkte Gleichungslösung

Den Zeitabschätzungen für die Lösung der reduzierten Normalgleichungen  
wird das Rechenprogramm HYCHOL zugrundegelegt, das in Zusammenarbeit von  
Herrn Dipl.-Math. H. Klein und dem Verfasser am Institut für Photogrammetrie  
in Stuttgart entwickelt wurde. Die Lösung geht von einem Gauß-Cholesky-Verfahren  
aus, das mit dem bekannten Gauß'schen Algorithmus eng verwandt ist und bei  
gleichem numerischen Aufwand eine etwas bessere Rechenschärfe ergibt. Das Ver-  
fahren wird aber nicht auf einzelne Koeffizienten, sondern auf die Submatrizen  
einer Hypermatrix angewendet. Daher auch der Name HYCHOL = Hypercholesky  
(Näheres siehe [8]). Die Programmierung hat H. Klein in Fortran durchgeführt,  
lediglich die häufig wiederkehrenden Subroutinen für den Verkehr zwischen ex-  
ternem Speicher und Kernspeicher wurden in Assembler-Code für die Control  
Data CDC 6600 des Regionalen Rechenzentrums der Universität Stuttgart ge-  
schrieben.

Die Rechenzeit wird an dieser Großrechenanlage getrennt nach CP = Central  
Processor Time (Rechenzeit im Kernspeicher) und IO = Input-Output Time (Bean-  
spruchung des externen Plattenspeichers) ausgewiesen.

Bei der Gleichungslösung mit Hychol kann die CP-Zeit in guter Näherung als  
Funktion der Multiplikationsanzahl  $n_M$  und der Zahl  $n_T$  der auftretenden Sub-  
matrizen-Transporte zwischen Kern- und Plattenspeicher dargestellt werden. Die  
IO-Zeit ist nur von  $n_T$  abhängig.

Die Rechenzeiten für die Lösung von Gleichungssystemen unterschiedlicher  
Struktur und Größe wurden von Herrn Dipl.-Ing. H. Meixner, dem ich an dieser  
Stelle herzlich danken möchte, experimentell ermittelt und durch die folgenden  
Beziehungen approximiert.

$$CP[\text{sec}] = 3.8 \cdot 10^{-6} n_M + 2.5 \cdot 10^{-3} n_T \quad \dots (5)$$



$$IO_{[\text{sec}]} = 0.1 n_T \quad \dots (6)$$

$$n_M = \sum_1^u ((s^2/2 - s/2 + 1/3) t^3 + 2st^2) \quad \dots (7)$$

$$n_T = \sum_1^u (3s^2/2 + 15s/2) \quad \dots (8)$$

Die Gleichungen (7) und (8) sind über alle Hyperzeilen  $u$  zu summieren. Mit Formel (5) wird die CP-Zeit im Mittel auf  $\pm 9\%$  genau erfaßt, die Formel (6) für die IO-Zeit gilt ganz exakt. Der Gültigkeitsbereich von (5) und (6) ist durch  $2 \leq s \leq 6$  und  $30 \leq t \leq 120$  gegeben. Damit sind praktisch alle interessierenden Blockgrößen abgedeckt.

Aus CP und IO ergibt sich sodann die Systemzeit SS, die für die Verrechnung maßgebend ist. Es gilt

$$SS = CP + (CM/131072) IO \quad \dots (9)$$

CM = Anzahl der beanspruchten Kernspeicherplätze

131072 = Gesamtgröße des Kernspeichers in Worten à 60 bit

Die beanspruchte KernspeichergroÙe setzt sich aus Programmanteil und Arbeitsspeicher zusammen. Nach unseren Erfahrungen mit dem Paket PAT-M für unabhängige Modelle kann für das Rechenprogramm ein Bedarf von etwa 12.000 Worten angesetzt werden. Bei der Gleichungslösung mit HYCHOL befinden sich immer 3 Submatrizen der Dimension  $t$ .  $t$  gleichzeitig im Kernspeicher, der Arbeitsspeicher beträgt daher  $3t^2$  Worte. Die 128 K = 131072 Kernspeicherplätze der Stuttgarter CDC 6600 stehen voll nur dem Control-Data-Rechenzentrum zur Verfügung. Die Universität dagegen kann nur 56 K = 57344 Worte in Anspruch nehmen. Für CM gilt daher:

$$CM = 12000 + 3t^2 \leq 57344 \quad \dots (10)$$

Aus Gleichung (10) ergibt sich eine maximale Dimension der Submatrizen von 122 . 122.

### 5. Ergebnisse der Aufwandsabschätzung und Diskussion

5.1 Die bekannten Strukturen der reduzierten Normalgleichungen nach 4.4 und die Formeln (5) bis (10) machen es möglich, die Systemzeiten auf der CDC 6600 für die Gleichungslösungen innerhalb eines Iterationsschrittes abzuschätzen. Der vierfache Betrag dieser Rechenzeiten soll dann den numerischen Gesamtaufwand für die räumlichen Blockausgleichungen repräsentieren (siehe 4.3). Die Systemzeiten werden für Blöcke mit 8 bis 30 Streifen ermittelt. Die Sortierung der Bilder bzw. Modelle erfolgt quer zur Streifenrichtung, um die Bandbreite der Gleichungssysteme klein zu halten (siehe Abb. 1 und 2). Bei gegebener Streifenzahl  $n_s$  ist die Rechenzeit direkt proportional zur Streifenlänge. Wenn die Systemzeit in Sekunden

pro Bild oder Modell angegeben wird, was aus Gründen der Übersichtlichkeit als zweckmäßig erscheint, ergibt sich daher nur eine Abhängigkeit von  $n_s$ .

Tabelle 1 zeigt diese Ergebnisse für die Bündelausgleichung B 6 und für die beiden Methoden M 7 und M 43 der Blockausgleichung mit Modellen. Neben den Systemzeiten SS in sec sind auch die Multiplikationen  $n_M$  in Einheiten von  $10^6$  und die Submatrizen-Transporte  $n_T$  angegeben, die pro Bild oder Modell aufzuwenden sind. Alle Werte in Tabelle 1 gelten sowohl für 20% als auch für 60% Querüberdeckung.

Tabelle 1

Der numerische Aufwand der Blockausgleichungen pro Bild oder Modell

$n_s$	Bündel: B 6			Modelle: M 7			Modelle: M 43		
	$10^6 n_M$	$n_T$	SS	$10^6 n_M$	$n_T$	SS	$10^6 n_M$	$n_T$	SS
8	0.19	18	1.0	0.12	11	0.7	0.03	21	0.4
10	0.30	14	1.4	0.19	8	0.9	0.05	17	0.5
12	0.43	12	1.9	0.27	7	1.2	0.08	14	0.5
14	0.58	10	2.5	0.37	6	1.6	0.10	12	0.6
16	0.75	9	3.1	0.48	5	2.0	0.13	11	0.7
18	0.95	8	3.9	0.46	45	2.4	0.16	9	0.8
20	1.17	7	4.8	0.56	41	2.8	0.20	8	1.0
22	1.36	32	5.8	0.68	37	3.2	0.24	8	1.2
24	1.62	29	6.8	0.81	34	3.7	0.29	7	1.3
26	1.89	27	7.9	0.94	31	4.2	0.34	7	1.5
28	2.20	25	9.0	1.09	29	4.8	0.39	6	1.7
30	2.52	23	10.3	1.25	27	5.4	0.45	6	2.0

$n_M$  = Anzahl der notwendigen Einzelmultiplikationen.

$n_T$  = Anzahl der Submatrizentransporte zwischen Kern- und Plattenspeicher.

SS = Systemzeit auf der CDC 6600 in Sekunden.

## 5.2 Diskussion

Nach Tabelle 1 steigt der numerische Aufwand pro Bild oder Modell mit zunehmender Streifenanzahl  $n_s$  an. Die Blockausgleichung M 43 mit Lage-Höhe-Iteration gibt die kürzesten Rechenzeiten, sie liegen zwischen 0.4 und 2.0 Systemsekunden auf der CDC 6600. Die etwas allgemeinere Variante M 7 ergibt 0.7 bis 5.4 sec pro Modell, während die Zeiten bei der Bündelausgleichung 1.0 bis 10.3 sec pro Bild betragen. Diese Rechenzeiten sind durchaus akzeptabel. Für die Ausgleichung mittelgroßer Blöcke mit 8 bis 20 Streifen und 100 bis 1000 Modellen sind Systemzeiten zwischen 1 und 80 Minuten zu erwarten. Im Extremfall kann selbst ein Bündelblock mit beispielsweise 30 Streifen à 60 Bildern simultan ausgeglichen werden. Die Systemzeit beträgt in diesem Fall etwa 5 Stunden auf der CDC 6600. An dieser Stelle sei auch auf die Computer der nächsthöheren Leistungsstufe wie die CDC 7600 und die Typen 91 und 195 der 360er-Serie von IBM hingewiesen, die eine Ausgleichung dieses Bündelblocks mit 1800 Bildern in weniger als 1 Stunde ermöglichen würden.

Einer Wirtschaftlichkeitsbetrachtung ist ein Preis von DM 1,25 (etwa 9 ö. S) pro Systemsekunde zugrunde zu legen, den die Control Data Corporation für die CDC 6600 in Stuttgart derzeit verrechnet. Dazu kommt für Dateneinlesen und Ergebnisprotokoll nach unserer Erfahrung noch etwa 0,50 DM pro Modell. Betrachtet man beispielsweise einen mittelgroßen Block mit 18 Streifen, der mit Lage-Höhe-Iteration behandelt werden soll, so betragen die Rechenkosten etwa  $0,8 \cdot 1,25 + 0,50 = 1,50$  DM pro Modell und Ausgleichung. Wird nun eine dreimalige Durchrechnung wegen grober Datenfehler unterstellt, so ergeben sich insgesamt etwa 4,50 DM (30 ö. S) für jedes Modell. In Anbetracht der leistungsfähigen Ausgleichung und bezogen auf die gesamten Aerotriangulationskosten ist dieser Preis zweifellos sehr günstig. Selbstverständlich ist der personelle Aufwand für die Bearbeitung der Blockausgleichung darin noch nicht enthalten.

Als zweites, extremes Beispiel soll der oben diskutierte Bündelblock mit 30 Streifen betrachtet werden. Unter den gleichen Voraussetzungen wie zuvor sind die Rechenkosten für die gesamte Ausgleichung in der Höhe von  $3 (10,3 \cdot 1,25 + 0,50) =$  ca. 40 DM (280 ö. S) pro Bild zu erwarten. Gemessen am Gewinn an Arbeitszeit und Genauigkeit gegenüber einfacheren Verfahren der Blockausgleichung oder der Punktbestimmung überhaupt kann eine derartig große und allgemeine Ausgleichung aber auch bei diesen relativ hohen Kosten noch sehr wirtschaftlich sein. Im übrigen würde die Rechnung auf einer CDC 7600 nur etwa 15 DM bis 20 DM pro Bild kosten.

Die bisherigen Abschätzungen setzen ausgesprochene Großcomputer voraus. Der hohe numerische Aufwand der Blockausgleichung wird in diesem Fall durch die Leistungsfähigkeit der Rechenanlage weitgehend überspielt. Die 2,5 Millionen Einzelmultiplikationen und die 45 Submatrizentransporte, die pro Bild oder Modell im Maximum aufzuwenden sind, machen sich aber voll bemerkbar, wenn nur mittelschnelle Computer zur Verfügung stehen. Die Rechenzeiten auf solchen Anlagen können näherungsweise abgeschätzt werden, indem man ihre Leistungsdaten mit jenen der CDC 6600 vergleicht und die Zeitangaben in Tabelle 1 dementsprechend umrechnet. Danach ergeben sich beispielsweise für die IBM 360/65 etwa 5 bis 7mal so lange Rechenzeiten. Die Methode der Blockausgleichung spielt in diesem Fall sowohl was den Rechenzeitbedarf als auch was die Wirtschaftlichkeit betrifft, schon eine ganz entscheidende Rolle.

Nach Tabelle 1 ergibt sich für die drei Verfahren M 43, M 7 und B 6 ein mittleres Rechenzeitverhältnis von näherungsweise 1 : 3 : 5. Die Blockausgleichung mit Modellen und Lage-Höhe-Iteration erscheint daher bei Computern begrenzter Leistungsfähigkeit und damit verbundener schlechterer Wirtschaftlichkeit als ganz besonders empfehlenswert. Auch wenn die Rechenkosten um den Faktor 2 bis 3 höher sind als an der CDC 6600, kann diese Methode der Blockausgleichung noch erfolgreich angewendet werden.

#### *Zusammenfassung*

Die verschiedenen Methoden der räumlichen Blockausgleichung und die Wege der praktischen Verwirklichung werden zunächst in einem Überblick dargestellt. Im Anschluß daran wird der Rechenaufwand für die Bündelausgleichung und für 2 Verfahren der Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen abgeschätzt. Es zeigt sich, daß alle drei Methoden heute wirtschaftlich angewendet werden können, wenn entsprechend leistungsfähige Großcomputer zur Verfügung stehen. An mittelschnellen Rechenanlagen fällt der unterschiedliche numerische Aufwand der einzelnen Methoden allerdings

stark ins Gewicht. Hier ist die Blockausgleichung mit Modellen und Lage-Höhe-Iteration ganz besonders zu empfehlen.

#### *Literatur*

[1] *Ackermann, F.*: Lageblockausgleichungen mit großen Punktmengen, BuL 38, 232–240, 1970.

[2] *Ebner, H. und Wagner, W.*: Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen am Planimat von Zeiss — eine Geräteuntersuchung, BuL 38, 249–257, 1970.

[3] *Schut, G. H.*: Development of programs for strip and block adjustment at the National Research Council of Canada. NRC - 7632, 1963.

[4] *Kubik, K.*: Survey of methods in analytical block triangulation. ITC Publications A 39, 1967.

[5] *Proctor, D. W.*: The adjustment of aerial triangulation by electronic digital computers. The Photogrammetric Record, 24 – 33, 1962.

[6] *King, C. W. B.*: A Method of Block Adjustment. The Photogrammetric Record, 381–384, 1967.

[7] *Gyer, M. S. and Kenefick, J. F.*: Block Analytical Aerotriangulation for Commercial Mapping on a Medium Scale Computer. Proc. of Symposium on Comp. Phot., Syracuse/USA 1969.

[8] *Ebner, H.*: Das Programm-Paket PAT-M für die räumliche Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen. Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, in Druck.

## **Ein Versuch zur Bestimmung der absoluten Lotabweichung aus visuellen Satellitenbeobachtungen**

Von *Gottfried Gerstbach*, Wien

Die Satellitengeodäsie verfügt mit der „Bahnmethode“ [1] über ein Verfahren, das es gestattet, absolute, auf den Erdschwerpunkt bezogene Koordinaten der Beobachtungsstationen abzuleiten. Der Ort eines künstlichen Satelliten ergibt sich hierbei aus seinen Bahnelementen unter Berücksichtigung von Gravitationskoeffizienten und sonstigen Störungen, die Beobachtungen selbst aber liefern den Stationsort.

Legt man der Auswertung von Messungen einer Station ihre astronomische Breite  $\varphi'$  und Länge  $\lambda'$  zugrunde, so bedeutet die Existenz einer absoluten Lotabweichung fehlerhafte geozentrische Ausgangskordinaten. Dieser systematische Einfluß wird deutlich hervortreten, wenn man annimmt, daß restliche Bahnstörungen und Beobachtungsfehler durch ihren eher zufälligen Charakter im Mittel herausfallen. Im folgenden wird dieser Gedanke auf Beobachtungen im Netz des Smithsonian Astrophysical Observatory (SAO) angewandt.

### *1. Beobachtungsstationen und Bahnbestimmung*

Das SAO errechnet laufend die Bahnen von etwa 20 Satelliten und benützt dazu in erster Linie photographische Aufnahmen der 16 mit Baker-Nunn-Kameras ausgerüsteten Observatorien, aber auch Messungen der „Moonwatch“-Stationen. Moonwatch ist eine weltweite Vereinigung von Amateurbeobachtern, die in der Mehrzahl visuell arbeiten. In Österreich befinden sich drei Stationen.

Die in einem Zeitraum von 1–2 Wochen im SAO einlangenden Beobachtungen eines Satelliten werden der Auswertung durch das Differential Orbit Improvement