Klotoidenschnittpunkte

Gerhard Palfinger [1]

[1] *Technische Hochschule, Institut für allgemeine Geodäsie, 1040 Wien, Karlsplatz 13*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **60** (1), S. 5–10

1972

Die Gleichung des Kreises, der diesen Bereich begrenzt, lautet:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt innerhalb dieses Kreises auftritt, ist:

$$p(\lambda)=1-e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

λ ist eine Konstante mit folgender Bedeutung:

$$\lambda=\frac{R}{m} \text{ wobei } m_x=m_y=m \text{ ist.}$$

(mittlerer Fehler einer Zufallsgröße)

Die Werte für einige wichtige Radien lauten:

R	Anzahl der Treffer	Ausschuß
m	39%	61%
$M=m\sqrt{2}$	63%	37%
2,4 M	99,7%	0,3%
3 M	99,99%	0,01%

Da es sich hier um einen kreisförmigen Bereich handelt, bestehen einige kleine Abweichungen zum vorhergehenden Ergebnis.

Zusammenfassung von B:

Man kann die Bestimmung der Koordinaten eines Punktes als das Schießen auf eine Zielscheibe auffassen. In der Mitte dieser Zielscheibe ist der wahre Wert, den man treffen will.

Es wurde die Anzahl der Treffer für einige wichtige Radien der Zielscheibe berechnet.

Benützte Literatur:

Gnedenko, B. W.: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Akademie-Verlag, Berlin 1958.

Klotoidenschnittpunkte

Von *Gerhard Palfinger*, Wien

1. *Einführung*

Zur mathematischen Festlegung des Grundrisses projektierter Straßenachsen werden im allgemeinen drei Trassierungselemente verwendet. Entsprechend den einschlägigen Vorschriften sind dies die Gerade, der Kreis und die Klotoide. Neben der Einrechnung der Elemente sind auch die eventuell vorhandenen Schnittpunktberechnungen zwischen den Elementen oder auch den Fahrbahnrändern, die zu den Elementen gleichen oder variablen Abstand haben, vorzunehmen. Die Schnittpunkte zwischen den Elementen Gerade und Kreis erhält man nach den bekannten Formeln der analytischen Geometrie auf direktem Weg. Schneiden sich hingegen zwei Trassierungselemente, von denen zumindest ein Element eine Klotoide ist, so ist nur eine schrittweise Annäherung an die exakte Lösung möglich. Hat man geeignete Anfangsnäherungen zur Verfügung, so kann man die bekannten Iterationsverfahren, wie die Regula falsi, das quadratische Eingabeln [1], das Gregorysche Verfahren, das Newtonsche Verfahren [2] und andere Verfahren anwenden. Die Anfangsnäherungen erhält man durch graphische Entnahme aus einer Konstruktion. Ob in einem durch 2 Näherungswerte begrenzten Intervall j ein Schnittpunkt liegt, kann durch Rechnung festgestellt werden [3] und bedarf keiner Konstruktion. Um die Rechenzeit möglichst kurz zu halten, wird von den Benützern der EDV auch in diesen Fällen meist ein Näherungswert (Stationierung oder Näherungskoordinaten) verlangt. Sind hingegen 2 Schnittpunkte möglich, so dient der Näherungswert auch zur Festlegung, welcher der beiden Schnittpunkte berechnet werden soll. Dies bedeutet vor allem bei nahe beisammenliegenden Schnittpunkten eine beträchtliche Vorarbeit. Im folgenden werden Verfahren dargestellt, die es ermöglichen, Schnittpunktberechnungen mit der Klotoide ohne Näherungswert durchzuführen. Die entsprechenden Rechenprogramme wurden für den PHILIPS-Bürocomputer P350-S erstellt.

2. *Schnitt Gerade-Klotoide*

Im Gebrauchsbereich der Klotoide sind je nach Lage der Geraden zur Klotoide 4 Fälle zu unterscheiden: 1 Schnittpunkt, 2 Schnittpunkte, 1 Berührungspunkt und kein gemeinsamer Punkt.

2.1. 1 *Schnittpunkt*

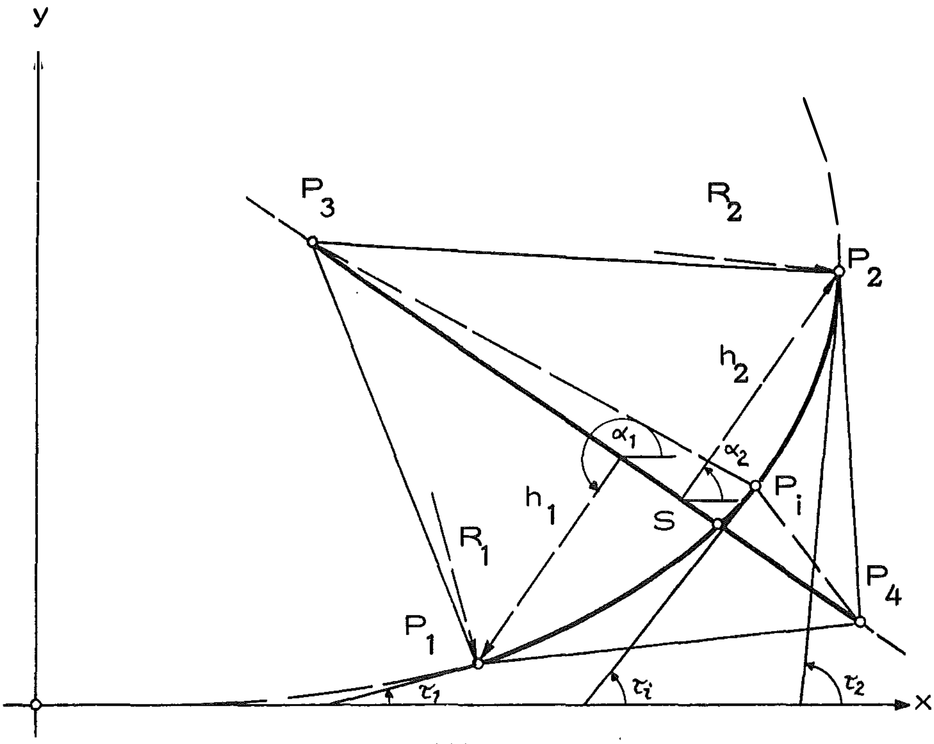

Abb. 1

Die Trassierungselemente Gerade und Klotoide sind durch die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 mit ihrer Stationierung sowie durch R_1, R_2 und A gegeben. Zur Festlegung, ob die Klotoide von der Geraden einmal geschnitten wird, bestimmt man h_1 und h_2 mit den zugehörigen Richtungswinkeln α_1 und α_2. Unter der Voraussetzung $h_1 \neq \emptyset$ und $h_2 \neq \emptyset$ wird h_1 und h_2 entgegengesetzt gerichtet sein, wenn ein Schnittpunkt vorliegt. (Bezeichnung siehe Abb. 1).

Zur Berechnung von h_1, α_1 und h_2, α_2 empfiehlt sich die Bestimmung der Flächen der Dreiecke $\triangle P_3, P_4, P_1$ und $\triangle P_3, P_4, P_2$

$$2F_1 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2F_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots(1)$$

Liegt im Intervall j $[l_1, l_2]$ der Klotoide ein Schnittpunkt, ist
sign $(F_1) \neq$ sign (F_2). Es ergibt sich

$$\pm h_1 = \frac{2F_1}{s_{34}} \qquad \mp h_2 = \frac{2F_2}{s_{34}} \qquad \ldots(2)$$

Der Richtungswinkelvergleich $\alpha_1 : \alpha_2$ wird hiemit ersetzt durch die verschiedene Aufeinanderfolge der Eckpunkte bei der Flächenberechnung. Die Berechnung des Näherungswertes l_i erfolgt proportional der Höhen $\pm h_1$ und $\mp h_2$:

$$k = \frac{|h_1|}{|h_1| + |h_2|} \qquad \ldots(3)$$

$$l_i = k \,.\, (l_2 - l_1) \qquad \ldots(4)$$

Dem Näherungswert l_i entspricht P_i (x_i, y_i) und damit

$$2F_i = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_i & y_i & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots(5)$$

Ist zufälligerweise $F_i = \emptyset$, ist der Schnittpunkt gefunden. Bei $F_i \neq \emptyset$, ist durch Vorzeichenabfrage festzustellen, ob der Schnittpunkt im Intervall j_1 $[l_1, l_i]$ einerseits oder j_2 $[l_i, l_3]$ andererseits zu suchen ist.

Die Anwendung der Gleichung (3) setzt voraus, daß $F_1 = \emptyset$ und $F_2 = \emptyset$ als triviale Lösungen durch Abfragen ausgeschieden werden.

Für k ergeben sich dann die Grenzen $\emptyset < k < 1$. Da $h_1 \ll h_2$ oder $h_2 \ll h_1$ sein kann, ist es aus numerischen Gründen erforderlich, die Grenzen für k noch etwas einzuengen.

Setzt man den eben beschriebenen Vorgang zur Bestimmung von F_i fort (Formeln (3), (4) und (5)), gelangt man durch ständiges Eingabeln und unter Beachtung der erwünschten Genauigkeit zum Schnittpunkt. Die Anzahl der erforderlichen Schritte (l_i und F_i) wird je nach Lage der Geraden zur Klotoide verschieden sein. Soll der Millimeter für die Schnittpunktskoordinaten gesichert sein, ist mit durchschnittlich 6 Iterationsschritten zu rechnen.

Die Wahl des Koordinatensystems in Abb. 1 entspricht dem bekannten Tafelwerk [4]. Die Transformation in das rechtsdrehende Landeskoordinatensystem Gauß-Krüger erfordert die Abfrage der Krümmung der Klotoide (rechtsgekrümmt $+R$, linksgekrümmt $-R$), der Längendifferenz $\triangle l = l_2 - l_1$, sowie den Vergleich der Richtungswinkel der entsprechenden Tangenten an die Klotoide im lokalen System und im Landessystem.

2.1. 1 *Fahrbahnränder*

Die Berechnung des Schnittpunktes der Klotoide mit Fahrbahnrändern, die zur Geraden $P_3 P_4$ parallel sind oder einen sich linear mit der Stationierung ändernden Abstand von dieser Geraden besitzen (Abb. 2), kann nach 2.1. erfolgen.

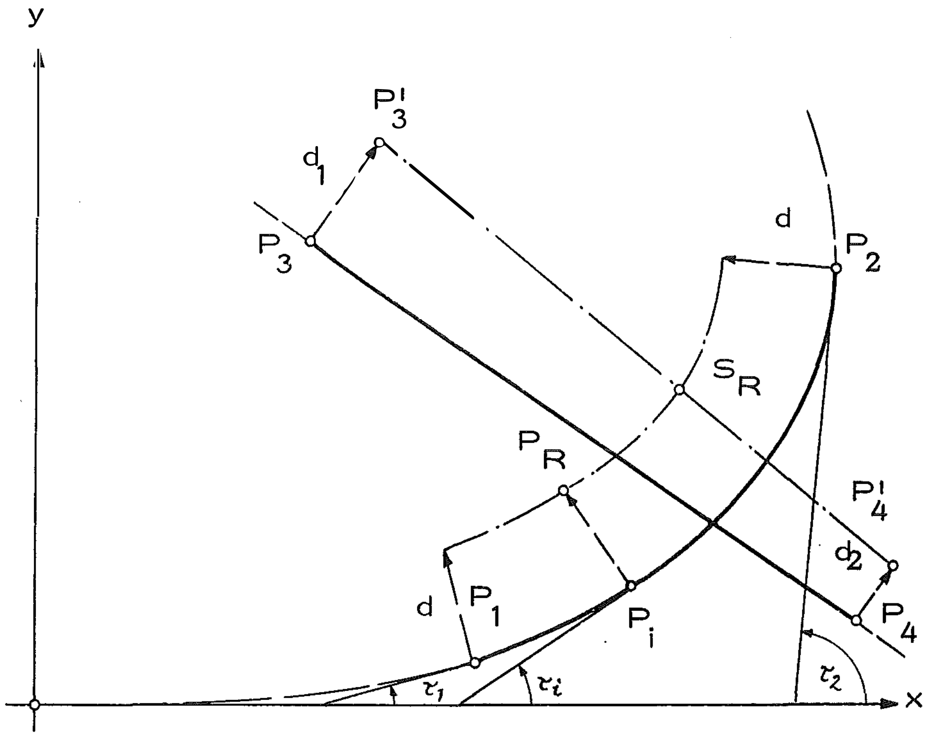

Abb. 2

Die Festlegung der Fahrbahnränder erfolgt durch

$$\left.\begin{aligned} x'_3 &= x_3 \pm d_1 \cdot a_{34} \\ y'_3 &= y_3 \mp d_1 \cdot o_{34} \end{aligned}\right\} P'_3 \qquad \left.\begin{aligned} x'_4 &= x_4 \pm d_2 \cdot a_{34} \\ y'_4 &= y_4 \mp d_2 \cdot o_{34} \end{aligned}\right\} P'_4 \qquad \ldots (6)$$

wobei $d_1 = d_2 = d$ eine parallele Gerade ergibt. sign $(d) = +$ oder sign $(d) = -$ bedeutet den rechts- oder linksliegenden Fahrbahnrand.

Will man Fahrbahnränder, die parallel zur Klotoide sind oder die einen in Funktion der Stationierung der Klotoide sich ändernden Abstand besitzen, mit einer Geraden schneiden, kann man ebenfalls nach 2.1. vorgehen.

Die rechtwinkeligen Koordinaten der Fahrbahnränder ergeben sich mit

$$\left.\begin{aligned} x'_i &= x_i \pm d \,.\, \cos \tau_i \\ y'_i &= y_i \pm d \,.\, \sin \tau_i \end{aligned}\right\} P'_i \qquad \text{mit } \pm d = f(l)_i \qquad \ldots(7)$$

$d =$ konst. ergibt als Sonderfall die Parallelklotoide.

Hinsichtlich der Genauigkeit des Verfahrens ist zu erwähnen, daß keine Rundungsfehler zu befürchten sind, da die P_i jeweils von den Ausgangswerten ausgehend berechnet werden.

2.2. 2 *Schnittpunkte*

Sind im Intervall j $[l_1, l_2]$ der Klotoide zwei Schnittpunkte mit einer Geraden vorhanden, so ist sign (F_1) = sign (F_2). Vorerst hat man ein Kriterium für die Bezeichnung der Schnittpunkte zu suchen. Versteht man unter β_1 und β_2 die jeweiligen Schnittwinkel, so wird sign $(\sin \beta_1) \neq$ sign $(\sin \beta_2)$ sein. Wird weiter ε_1 als Winkel zwischen der Klotoidentangente in P_1 und der Parallelen zur Geraden $P_3 P_4$ definiert und wird für ε_2 im Punkt P_2 wbenso verfahren, so gilt:

$$\text{sign}\,(\sin \varepsilon_1) = \text{sign}\,(\sin \beta_1) \text{ und sign}\,(\sin \varepsilon_2) = \text{sign}\,(\sin \beta_2).$$

Für die in der Praxis üblichen Werte für $\triangle \tau_{max} = (\tau_2 - \tau_1) \leq 2{,}4$ ist damit eine eindeutige Zuordnung der Schnittpunkte gefunden.

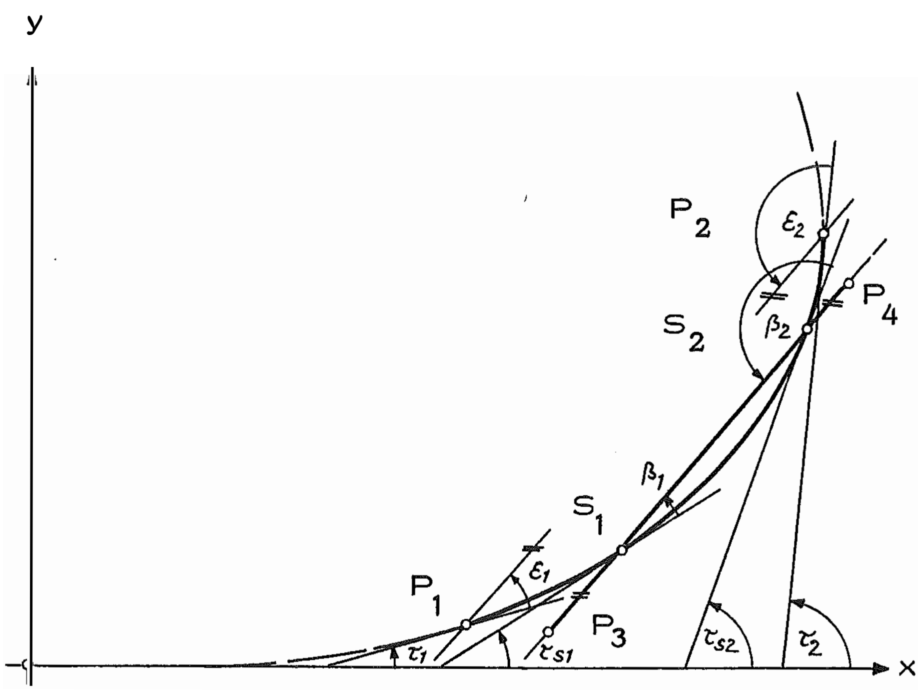

Abb. 3

Die Berechnung des Näherungswertes geschieht analog 2.1. Mit l_i wird P_i (x_i, y_i) berechnet und damit F_i bestimmt.

Ist nun sign $(F_i) \neq$ sign (F_1), so liegt P_i zwischen den beiden Schnittpunkten und man kann nach der Wahl des Schnittpunktes wie in 2.1. verfahren, da in den Intervallen j_1 $[l_1, l_i]$ und j_2 $[l_i, l_2]$ jeweils ein Schnittpunkt liegt. Wenn hingegen $F_i = \emptyset$ ist, so hat man entweder S_1 oder S_2 gefunden. Man vergleicht nun sign $(\sin \beta_i)$ mit sign $(\sin \varepsilon_1)$ und findet damit, ob der errechnete Schnittpunkt auch der gewünschte ist oder der zweite Schnittpunkt noch nach 2.1. zu bestimmen ist.

Schließlich kann sign $(F_i) =$ sign (F_1) sein. Das bedeutet, daß P_i auf der Klotoide entweder zwischen P_1 und S_1 oder S_2 und P_2 liegt. Zur Festlegung, ob die beiden Schnittpunkte in den Intervallen j_1 $[l_1, l_i]$ oder j_2 $[l_i, l_2]$ liegen, hat man wieder sign $(\sin \beta_i)$ mit sign $(\sin \varepsilon_1)$ zu vergleichen. Anschließend wird ein weiterer Näherungswert berechnet und dieses Verfahren bis zum gewünschten Schnittpunkt fortgesetzt. Hier sind für Millimetergenauigkeit der Schnittpunktkoordinaten im Durchschnitt 10 Schritte erforderlich.

2.2.1. 1 *Berührungspunkt*

Dieser Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß im Berührungspunkt $F_i = \emptyset$ und $\sin \beta_i = \emptyset$ sind.

2.2.2. *Kein gemeinsamer Punkt*

Wenn sign (F_1) = sign (F_2) ist, wird nach einer entsprechenden Anzahl von Iterationsschritten sign $(F_i) \neq$ sign (F_1). Ist dies nicht der Fall, wird die Iteration abgebrochen.

Eine direkte Bestimmung des Falles 2.2.2. aus den Ausgangswerten mit Hilfe der zur schneidenden Geraden parallelen Tangente an die Klotoide zeigt [2].

2.2.3. *Fahrbahnränder*

Zur Festlegung der Fahrbahnränder geht man wie in 2.1.1. vor. Die Bestimmung der Schnittpunkte erfolgt analog Abschnitt 2.2. (wird fortgesetzt)

Literatur

[1] *Hörnchen, Schulz:* Forschungsbericht „Allgemeine Bestimmung von Bauwerkskoordinaten aufgrund von Konstruktionselementen“. Straßenbau und Straßenverkehrstechnik 1971, Heft 111, S. 38.

[2] *Leuze:* Berechnung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Parallelklotoide. AVN 1971, Heft 11, S. 435—439.

[3] *Strubecker:* Einführung in die höhere Mathematik. R. Oldenburg München—Wien 1967. Bd. II, S. 617—688.

[4] *Kasper, Schürba, Lorenz:* Die Klotoide als Trassierungselement. 5. Auflage. F. Dümmler's Verlag, Bonn. 1968.