

Paper-ID: VGI_197213



Aufgaben der theoretischen Geodäsie

Helmut Moritz ¹

¹ *IV. Institut f. Geodäsie an der TH Graz, Dietrichsteinplatz 15, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **60** (3), S. 80–85

1972

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Moritz_VGI_197213,  
Title = {Aufgaben der theoretischen Geod{"a}sie},  
Author = {Moritz, Helmut},  
Journal = {"Österreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen"},  
Pages = {80--85},  
Number = {3},  
Year = {1972},  
Volume = {60}  
}
```



Im Jahre 1932 schrieb F. WINTER zur Würdigung des 70. Geburtstages von Prof. E. DOLEŽAL in unserer Zeitschrift: Ab 1907 übernahm Dolezal die Schriftleitung der ÖZfVW „und gab ihr jene Form, äußere Statur und stoffliche Gliederung, die sich sehr bewährt und bis heute unverändert erhalten hat“. Ab 1930 teilte DOLEŽAL die Redaktion der Zeitschrift, entsprechend seines Alters und den starken Interessen des Bundesamtes an der Zeitschrift als Organ zur Vereinheitlichung des gesamten österreichischen Vermessungswesens mit Prof. ROHRER, der nach dem Tode DOLEŽALs ab Herbst 1955 die Hauptschriftleitung übernahm. Daß der Österreichische Verein für Vermessungswesen nach 1945 wieder aktiviert und die Zeitschrift im August 1948 mit ihrem 36. Jahrgang wieder ins Leben gerufen werden konnte, ist neben DOLEŽAL und LEGO das Verdienst ROHRERs, der im besonderen nach seiner Emeritierung fast seine ganze Zeit und Energie dem Ausbau der Zeitschrift widmete. Der Erfolg spricht für ihn. Wenn die äußere Entwicklung der letzten Jahre den Fachzeitschriften mit einem scharf begrenzten Leserkreis nicht mehr zuträglich war, so hat er noch alles versucht, die Folgen aufzufangen. Wir danken ihm für seinen zähen Kampf um die alte Form und den Umfang in seinen letzten Lebensmonaten.

Faßt man Prof. ROHRERs Lebensbild und Werk zusammen, so müssen wir uns in Ehrfurcht vor seiner Persönlichkeit und seinen Leistungen für unseren Beruf verneigen. Sein Andenken ist uns Verpflichtung.

Josef Mitter

Aufgaben der theoretischen Geodäsie

Von *H. Moritz*, Graz¹⁾

Nach einer bekannten Definition Helmerts ist die Geodäsie die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche. Dies kommt auch in der Bezeichnung „Erdmessung“ zum Ausdruck; von Theorie ist nicht ausdrücklich die Rede. Was sind also die Aufgaben der theoretischen Geodäsie; handelt es sich etwa um ein neues Gebiet, das es früher nicht gab?

Nun, seit jeher hat im Verein mit der eigentlichen Messung die Theorie in der Geodäsie eine große Rolle gespielt; ja, zwei Jahrhunderte lang war die „Erdmessung“ oder „Höhere Geodäsie“ vorwiegend Theorie. Die großen französischen Mathematiker des 18. Jahrhunderts — etwa Clairaut, Legendre, Laplace — und der „princeps mathematicorum“, Carl Friedrich Gauß, legten die Grundsteine für eine Theorie der Geodäsie. In der Folge wurde sie zu hoher Vollkommenheit entwickelt und die Schule der Höheren Geodäsie unseres kleinen Landes war an dieser Entwicklung maßgeblich beteiligt.

Die Schaffung von Meßdaten für die Erdmessung hingegen blieb zunächst hinter der Theorie weit zurück. Seit den klassischen Gradmessungen des 17. und 18. Jahrhunderts kennt man zwar die Großform der Erde — das Erdellipsoid —

¹⁾ Antrittsvorlesung, gehalten am 8. März 1972 an der Technischen Hochschule in Graz.

mit einiger Genauigkeit, aber über die Abweichungen der genaueren Erdgestalt — des Geoides — von einem solchen Ellipsoid wußte man noch vor 25 Jahren recht wenig.

Das liegt vor allem daran, daß man zur messenden Erfassung der Erdgestalt grundsätzlich Daten braucht, die möglichst gleichmäßig über die ganze Erde verteilt sind, seien es geodätische Dreiecksnetze oder Messungen der Schwere. Solange die einzelnen Nationen weitgehend für sich und nebeneinander bestehen konnten, fehlten hierzu vielfach der Anreiz und auch die Möglichkeit. In den letzten Jahren aber, in einer Zeit enger Wechselwirkung in Wirtschaft und Verkehr zwischen den Völkern, ist auch ein „Geodätisches Weltsystem“ praktische Wirklichkeit, aber auch Notwendigkeit geworden. Die Raumfahrt stellt die Geodäsie vor neue Aufgaben; sie bringt ihr aber auch neue, höchst leistungsfähige Meßverfahren.

Heute kommen Meßdaten in manchmal beängstigender Fülle, wenn auch nicht immer in der wünschenswerten Verteilung und Qualität, auf den Geodäten zu; immer neue Meßverfahren werden entwickelt. Alle diese Meßdaten richtig, ja bestmöglich zu verarbeiten, stellt die Theorie vor ganz neue Aufgaben.

So kommt es, daß mit dem Aufschwung der praktisch-empirischen Seite der Erdmessung in den letzten Jahren auch die theoretische Geodäsie bewußt als solche hervortritt: neue Lehrstühle und Lehrkanzeln werden hierfür errichtet — darunter die IV. Lehrkanzel für Geodäsie der Technischen Hochschule in Graz —; und auf der letzten Generalversammlung der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik, die im August 1971 in Moskau stattfand, wurde die Internationale Assoziation für Geodäsie neu gegliedert: nunmehr bildet die theoretische Geodäsie eine der fünf Sektionen unserer Assoziation.

Nach dieser Einleitung möchte ich versuchen, Sie an Hand von drei herausgegriffenen, mir durch eigene Forschungsarbeit besonders nahestehenden Problemen mit heutigen Aufgaben der theoretischen Geodäsie bekannt zu machen.

Das erste Problem ist die gravimetrische Bestimmung der Erdoberfläche. Gelingt es, auf der ganzen Erdoberfläche die Schwerebeschleunigung g und die Lotrichtung zu messen und die Unregelmäßigkeiten der Erdoberfläche durch Nivellement (welches im wesentlichen das Schwerepotential W an der Erdoberfläche liefert) zu erfassen, so erhält man die Gestalt der Erdoberfläche S aus der Gleichung

$$- 2\pi W + \iint_S \left[W \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{l} \right) - \frac{1}{l} \frac{\partial W}{\partial n} \right] dS + 2\pi \omega^2 r^2 + \\ + 2\omega^2 \iiint_{\text{Erde}} \frac{dv}{l} = 0.$$

Hier bedeuten: ω die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, l den Abstand des Flächenelementes dS (oder des Volumenelementes dv) vom Aufpunkt, r den Abstand des Aufpunktes von der Drehachse und $\partial/\partial n$ die Ableitung senkrecht zur Fläche S .

Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine nichtlineare Funktionalgleichung für die Erdoberfläche S . Für den Sonderfall, daß die Erdoberfläche horizontal ist (also mit dem Geoid zusammenfällt), wird ihre Lösung durch die bekannte Formel

$$N = \text{const.} \iint \Delta g S(\psi) d\sigma,$$

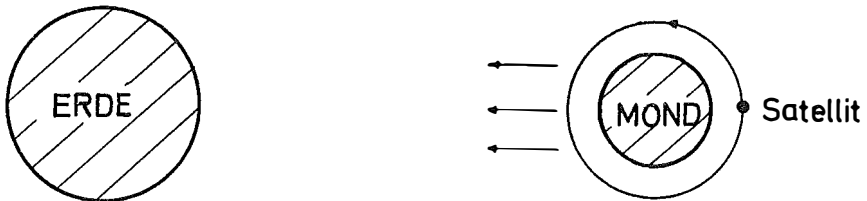
geliefert, die 1849 von dem bedeutenden englischen Physiker Stokes gefunden wurde. Die Stokessche Formel stellt die Höhe N des Geoides über dem Erdellipsoid dar als Integral von Δg (der Abweichung der Schwere g von einem Normalwert), erstreckt über die ganze Erde; $S(\psi)$ ist eine einfache analytische Funktion.

Im Allgemeinfall wurde das Problem erstmals vom russischen Geodäten und Geophysiker Molodenski im Jahr 1945 formuliert; dieser fand auch die erste Lösung als Reihenentwicklung, deren erstes Glied die Formel von Stokes bildet.

Dieses Problem steht seit einer Reihe von Jahren im Vordergrund des Interesses der theoretischen Geodäsie. Es wurden mehrere praktisch brauchbare Lösungen angegeben (darunter auch eine vom Vortragenden), aber die mathematische Feinstruktur ist noch nicht bis in die letzten Einzelheiten geklärt. Selbst in linearer Näherung führt das Problem von Molodenski nämlich auf ein sogenanntes schiefes Randwertproblem der Potentialtheorie, das wesentlich schwieriger ist als die bekannten klassischen Randwertaufgaben.

An diesem Problem sieht man auch die enge Durchdringung zwischen der Bestimmung der Erdgestalt und der des Erdschwerefeldes. In der Tat ist die Bestimmung des Schwerefeldes der Erde eine wesentliche Aufgabe der Geodäsie.

Das hier als zweites betrachtete Problem soll Ihnen zeigen, welche geodätischen Aufgaben die Raumfahrt stellen kann. Es handelt sich um die Bestimmung des Schwerefeldes des Mondes aus Dopplermessungen zu künstlichen Mondsatelliten (Lunar Orbiters). Dopplermessungen von der Erde aus liefern die Komponente der Geschwindigkeit des Mondsatelliten in Richtung Erde-Mond (siehe Abbildung), und durch Differentiation nach der Zeit folgt daraus die Beschleunigungskomponente



und damit die Kraftkomponente f in dieser Richtung. Das Problem besteht darin, das Gravitationspotential V des Mondes aus seiner Ableitung f nach einer (im wesentlichen) festen Richtung zu gewinnen.

Bereits durch eine erste Auswertung dieser Messungen haben die Amerikaner Muller und Sjögren die „Mascons“ entdeckt, nicht direkt sichtbare Massenkonzentrationen, die sich hauptsächlich unterhalb der Mondmaria (z. B. des Mare Imbrium) befinden.

Eine exaktere Auswertung ermöglicht eine Integralformel vom Typ der Stokes-schen Formel:

$$V = \text{const.} \iint fS_1 d\sigma,$$

die gleichzeitig vom Russen Browar und vom Verfasser gefunden wurde.

Während diese Frage spezielleren Charakter hat, wollen wir schließlich als drittes Problem die allgemeine Aufgabe der Kombination geodätischer Daten zur Bestimmung der Erdgestalt und des Erdschwerefeldes betrachten.

Es handelt sich hier um ein zentrales Problem der heutigen theoretischen Geodäsie. Wir haben bereits gesagt, daß heute Meßdaten für die Erdmessung in überwältigender Fülle, aber nicht immer in der besten Verteilung, anfallen. Es gibt eine Reihe von Meßverfahren für die Erdmessung, die alle für einen bestimmten Zweck geeignet sind, aber auch ihre Beschränkung haben. Es ist daher unumgänglich, alle Verfahren so miteinander zu kombinieren, daß das beste Ergebnis für Erdgestalt und Erdschwerefeld erhalten wird.

Welche Meßverfahren für die Erdmessung gibt es denn heute? Die klassischen Verfahren sind Triangulation und Trilateration, trigonometrische Höhenmessung, Nivellement und Gravimetrie, also die Messung der Schwere g . Dazu treten heute in wesentlichem Maß Verfahren, die auf der Raumfahrt beruhen: Messungen von Richtungen (durch Photogrammetrie), von Entfernungen (durch elektronische Verfahren wie Radar und Laser) und von Entfernungsänderungen (nach dem Dopplerprinzip) zu Satelliten; aber auch neue, in Entwicklung begriffene Verfahren, wie Satelliten-Altimetrie (direkte Bestimmung des Geoids durch Messung des Vertikalabstandes vom Satelliten), „Satellite-to-Satellite-Tracking“ (Entfernungs- oder Dopplermessung zwischen zwei Satelliten) und Gradiometrie (Messung der zweiten Ableitungen des Potentials).

Es scheint fast aussichtslos, zu versuchen, alle diese Messungen zu einem einheitlichen Ganzen zusammenzufassen, und doch ist es möglich, sogar in überraschend einfacher Weise.

Hat man in der Geodäsie, aber auch in der Astronomie oder Physik, viele Meßdaten miteinander zu verbinden, so bedient man sich der bereits von Gauß begründeten, auf statistischer Basis beruhenden Ausgleichsrechnung. Die Anwendung der Ausgleichsrechnung auf allgemeinere Probleme der Erdmessung stieß aber auf beträchtliche Schwierigkeiten, weil es ein einfaches (d. h. mit endlich vielen Parametern beschreibbares) Modell für Erdgestalt und Erdschwerefeld nicht gibt — die Ausgleichsrechnung setzt aber voraus, daß die Zahl der Parameter nicht nur endlich, sondern sogar kleiner ist als die Zahl der Beobachtungen.

Nun hat man schon vor einiger Zeit mit dem Versuch begonnen, die Unregelmäßigkeiten des Erdschwerefeldes statistisch, als sogenannten stochastischen Prozeß, aufzufassen. Das führte zur bekannten Methode der statistischen Interpolation von Schweremessungen, und im Jahr 1969 gelang es dem Dänen Krarup, die entscheidende Verallgemeinerung auf beliebige Meßdaten zu finden.

Der mathematische Apparat hierfür ist die Theorie des unendlichdimensionalen Hilbertraums, entsprechend der Tatsache, daß Erdgestalt und Erdschwerefeld nur durch unendlichviele Parameter zu beschreiben sind. In der Tat kann Krarups „Kollokationsmethode“ als Ausgleichsrechnung im Hilbertraum aufgefaßt werden, eine Entwicklung, die der Vortragende freilich nicht voraussah, als er 1958 in seiner Dissertation eine Fehlertheorie im Hilbertraum entwickelte.

Die Rechenformeln für die Kollokation sind übrigens überraschend einfach. Eine grundlegende Formel ist die Matrixgleichung

$$s = C_{sx} C_{xx}^{-1} x.$$

Hier umfaßt der Spaltenvektor x alle Meßdaten; die quadratische Matrix C_{xx} ist die Kovarianzmatrix des Beobachtungsvektors x (einschließlich der vom Schwerefeld herrührenden Kovarianzen); C_{sx} ist der Zeilenvektor, der aus den Kovarianzen zwischen der gesuchten Größe s und den Meßdaten x besteht. Nach dieser Formel erhält man den optimalen Schätzwert für die gesuchte Größe s , die irgend ein Element des Erdschwerefeldes (genauer des sogenannten Störfeldes) sein kann: etwa eine Geoidhöhe oder eine Lotabweichung.

Auf diese Weise kann man die verschiedenartigsten Messungen zur Gewinnung eines einheitlichen Erdschwerefeldes optimaler Genauigkeit zusammenfassen; die Kollokationsmethode hat ja wie die Ausgleichsrechnung die Eigenschaft kleinsten mittleren Fehlers der Ergebnisse. Es ist auch nicht schwer, diese Methode so zu erweitern, daß sie auch die Ausgleichung von Dreiecks- und Höhennetzen, Satellitentriangulationen u. dgl. in sich einbezieht und damit auch die optimale Bestimmung der Erdoberfläche ermöglicht. So erhalten wir ein bemerkenswert einfaches Schema für eine einheitliche gemeinsame Verwendung aller geometrischen und physikalischen Beobachtungen in der Erdmessung.

Selbstverständlich ist dieses Schema zur Zeit als übergeordnetes gedankliches Ziel aufzufassen, das nach Maßgabe der Gegebenheiten schrittweise zu realisieren ist. So ist die numerische Inversion der Matrix C_{xx} nur dann möglich, wenn sie nicht zu umfangreich ist.

Auch sonst ist auf diesem Gebiet noch viel Arbeit zu leisten und wir wollen uns auch in Graz weiter daran beteiligen.

Abschließend stellt sich die Frage nach dem Nutzen dieser verfeinerten Methoden. Noch vor hundert Jahren war die Genauigkeit der Erdmessung, überschlägig betrachtet, tausend Meter, vor fünfzig Jahren um die hundert Meter, heute ist sie zehn Meter (immer bezogen auf einen Erddurchmesser von über zehntausend Kilometern!), und immer steigen die Genauigkeitsanforderungen schneller als die gerade erreichte Genauigkeit. Mögen die heutigen zehn Meter für Verkehr, Wirtschaft und viele Zwecke der Raumfahrt ausreichen: man ist noch weit davon entfernt, die ganze Erdgestalt auf 10 m genau zu kennen. Und schon spricht man bereits ernsthaft von einem „10 cm World Geodetic System“, und man denkt daran, etwa Kontinentalverschiebungen auf einige Zentimeter und das Geoid auf zehn Zentimeter genau zu bestimmen. Von diesen und ähnlichen Ergebnissen erhofft man sich einen entscheidenden Fortschritt in unserem Wissen von der Tektonik, also von Aufbau und Veränderung unserer Erdkruste, und von den großen Meeresströmungen.

Dies könnte wiederum die Vorhersage von Erdbeben erleichtern, wesentliche Hinweise auf neue Bodenschätze geben, und die sinnvolle Nutzung der Weltmeere als Nahrungsmittelquelle, aber auch als Mittel zur unschädlichen Beseitigung gefährlicher Abfälle ermöglichen; das sind ja Fragen, die heute immer dringender werden.

Darüber hinaus war es schon seit jeher das Bestreben des Menschen, seinen Heimatplaneten immer besser kennen und verstehen zu lernen. Auch die theoretische Geodäsie hat hierzu ihren Beitrag zu leisten.

Der Allgemeinfall kosmographischer Perspektiven

Von Herbert Lichtenegger, Graz

Vorbemerkung

Als kosmographische Perspektiven werden perspektive Abbildungen von Kugelflächen aus großen Höhen definiert. In vorliegender Arbeit werden Formelsysteme für die Bildkoordinaten bei allgemeiner Lage der Abbildungsebene entwickelt, dabei ergeben sich durch Spezialisierung unmittelbar die in [1] angegebenen Systeme für Schräg- und Normalaufnahmen.

Bei der Entwicklung wird von der Grundgleichung der analytischen Photogrammetrie [2] ausgegangen, das Problem selbst ist auch in [3] in allgemeiner Form behandelt.

1. Grundlagen

Durch den Mittelpunkt O der abzubildenden Erdkugel mit dem Radius R sei ein Koordinatensystem gelegt, dessen e_3 -Achse zum Träger des Aufnahmesystems (Satellit S) weist, die e_2 -Achse liege orthogonal dazu in der Ebene des Ortsmeridians des Subsatellitenpunktes Su ($\varphi_0, \lambda_0 = 0$) und die e_1 -Achse bildet mit beiden ein Rechtssystem (Abb. 1).

In diesem System seien die Einheitsvektoren zum Aufnahmeort S und zum abzubildenden Punkt P (φ, λ) durch \underline{s}_0 bzw. \underline{s} dargestellt:

$$\underline{s}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{s} = \begin{bmatrix} \sin z \sin a \\ \sin z \cos a \\ \cos z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}. \quad \dots (1)$$

Dabei bedeutet a den Peilwinkel und z den Winkel zwischen \underline{s}_0 und \underline{s} .

Der Vektor \underline{s} kann aber auch in einem äquatorialem System (\underline{e}'_i) durch O dargestellt werden und sei dann mit \underline{s}' bezeichnet.

Wird eine orthogonale Matrix (Drehmatrix) R eingeführt, so bestehen nachfolgende Beziehungen:

$$\underline{s} = R \underline{s}', \quad \dots (2a)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \\ 0 & -\cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}' = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \lambda \\ -\cos \varphi \cos \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad \dots (2b)$$