

Paper-ID: VGI\_197216



## Eine weitere Möglichkeit der Anwendung des Doppelverhältnisses

Fritz K. Brunner <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institut f. Geophysik an der TH Wien, Karlsplatz 13, A-1040 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen **60** (3), S. 96–101

1972

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Brunner_VGI_197216,  
Title = {Eine weitere Möglichkeit der Anwendung des Doppelverhältnisses},  
Author = {Brunner, Fritz K.},  
Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen},  
Pages = {96--101},  
Number = {3},  
Year = {1972},  
Volume = {60}  
}
```



#### 4. *Schlußfolgerungen*

An Hand der Ergebnisse sieht man deutlich, daß die maximalen Abweichungen der Istbahnen der beiden Fahrzeuge von der Sollbahn und voneinander in der Größenordnung von rund 1 m liegen und dies nach einer Übergangsbogenlänge von 32 m. Das Kurvenverhalten verschiedener Fahrzeuge ist so unterschiedlich, daß es nicht möglich erscheint, für die Trassierung Übergangsbogen, auch komplizierterer Formen, zu finden, die für alle Fahrzeuge optimal sind. Dabei wäre überdies noch zu berücksichtigen, daß das Lenkgesetz nicht generell vorgegeben werden kann. Gerade durch das individuelle Verhalten des Lenkers können jedoch die Abweichungen wie auch in Bild 5 gezeigt, stark beeinflußt werden.

Es wäre jedoch von der theoretischen Seite her möglich, den Trassierungsentwürfen ein Normfahrzeug mit einem bestimmten Lenkverhalten zu Grunde zu legen. Auch extreme Bahnabweichungen realer Fahrzeuge von der so ermittelten Sollbahn ließen sich rechnerisch erfassen und damit eventuell im Entwurf berücksichtigen. Andererseits könnten für ein Kollektiv von Fahrzeugen und Fahrzeuglenkern günstigste Übergangsbogen mit statistischen Methoden gefunden werden.

#### *Literatur*

[1] Kasper, *Schürba, Lorenz*: Die Klottoide als Trassierungselement. 5. Auflage. F. Dümmler's Verlag, Bonn 1968.

[2] *Blaschke*: Die Ausfahrt an Anschlußstellen, ein aktuelles Problem der Autobahntrassierung. Forschungsarbeiten aus dem Straßenwesen, Heft 26.

[3] *Petrović*: Übergangsbogen und Schleppekurve im Straßenbau, ÖJZ, 9 (1966), S. 200.

[4] *Gläser*: Grundsätze der Linienführung von Straßen. VR, 31 (1969), S. 161.

[5] *Klingenberg*: Bestimmung der Fahrbahnränder bei Einmündungen städtischer Straßen durch direkte photogrammetrische Darstellung der Fahrspuren. SZfV, 66 (1968), S. 166.

[6] *Auberlen*: Fahrt formt Fahrbahn. Forschungsarbeiten aus dem Straßenbau, Heft 59.

[7] *Desoyer und Slibar*: Kraftschlußbeanspruchung und Schräglauf der Räder eines Kraftfahrzeuges bei stationärer Kurvenfahrt. ATZ, 72 (1970), S. 206.

[8] *Lugner*: Untersuchungen über die Kurvenfahrt eines Kraftfahrzeuges. Dissertation TH Wien, Nov. á969.

[9] *Springer*: Untersuchungen der allgemeinen ebenen Bewegungen eines luftbereiften und rückangetriebenen Personenkraftfahrzeuges. Dissertation TH Wien, Mai á971.

[10] *Petrović*: Die richtige Berechnung der Straßenquerneigung. ÖJZ, 117 (1972), S. 1.

[11] *Spindler*: Wege und Querbeschleunigung bei der Kurvenfahrt von Kraftfahrzeugen. ATZ, 67 (1965), S. 150.

## **Eine weitere Möglichkeit der Anwendung des Doppelverhältnisses**

Von *Friedrich K. Brunner*, Wien

### *Zusammenfassung*

Es wird gezeigt, daß das Doppelverhältnis  $\lambda$  von 4 Punkten einer Geraden (diese bilden drei aneinanderliegende Strecken  $x$ ,  $a$  und  $b$ ) dazu benützt werden kann, eine dieser drei Strecken ( $x$ ) als Unbekannte zu errechnen, wenn man die beiden anderen Strecken ( $a$ ,  $b$ ) kennt. Man rechnet sich dann das Doppelverhältnis  $\lambda$  mit Hilfe der Winkel ( $\alpha$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ), die man von einem Winkelmeßpunkt (0) aus zu den 4 Punkten bestimmt hat, siehe dazu Abb. 1. Es werden die Fehlerformeln der

Methode abgeleitet und im folgenden Abschätzungen zur Anlage der Meßmethode gebracht. An einem praktischen Beispiel wird sodann die Brauchbarkeit der Methode bewiesen. Als materialisierte Gerade wurde eine Invarbandmire benützt und die notwendigen Winkel wurden mit einem Sekundentheodolit gemessen. Die Genauigkeit der Bestimmung der unbekanntenen Streckenlänge liegt innerhalb der Fehler der Nennwerte der als bekannt vorausgesetzten Streckenlängen. Die Methode kann zur feldmäßigen Bestimmung des Lattennullpunktfehlers einer Invarband-Nivellierlatte benützt werden, wobei zur Bestimmung lediglich ein Sekundentheodolit ausreicht und kein Vergleichsmaßstab notwendig ist. Die erreichbare Genauigkeit der Bestimmung des Lattennullpunktfehlers kann mit  $\pm 0,03$  mm für diese Methode angegeben werden.

#### Abstract

##### *Another possibility of the application of the duplicate ratio*

The duplicate ratio  $\lambda$  of 4 points on a straight line (these 4 points are the endpoints of three adjoining distances  $x$ ,  $a$  and  $b$ ) can be applied to determine one ( $x$ ) of these three distances, if the latter is unknown. Naturally, the value of the two other distances must be known. The duplicate ratio will be calculated from angular measurements ( $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) in the goniometric centre (see Fig. 1). The equations giving the errors inherent in the method are derived. Furthermore, guiding principles for the application of the method are deduced. Next, the utility of the method is demonstrated on an experimental example. An "invar" tape is used as a basic straight line and the necessary angles are measured with a theodolite with an accuracy to seconds. The accuracy of the determination of the unknown distance lies within the error limits of the given distances whose values are supposed as known. The method can be used in the field for the determination of the zero correction of a levelling rod; with our method, only one theodolite with an accuracy to seconds, but no comparison scale is needed. The determination of the zero correction of the levelling rod can be easily made by the described method with an accuracy of up to  $\pm 0,03$  mm.

#### 1. Theoretische Grundlagen

Das Doppelverhältnis  $\lambda$  von 4 Punkten ( $A, B, C, D$ ) einer Geraden (Bezeichnungen beziehen sich auf Abb. 1) ist nach Gleichung (1) sowohl durch das Verhältnis der Strecken ( $x, a, b$ ) als auch durch das Verhältnis der Sinusse der Winkel ( $\kappa, \alpha, \beta$ ) gegeben, siehe *Duschek* (1958, Seite 114).

$$\lambda = \frac{x+a}{a} : \frac{x+a+b}{a+b} = \frac{\sin(\kappa+\alpha)}{\sin\alpha} : \frac{\sin(\kappa+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}. \quad \dots(1)$$

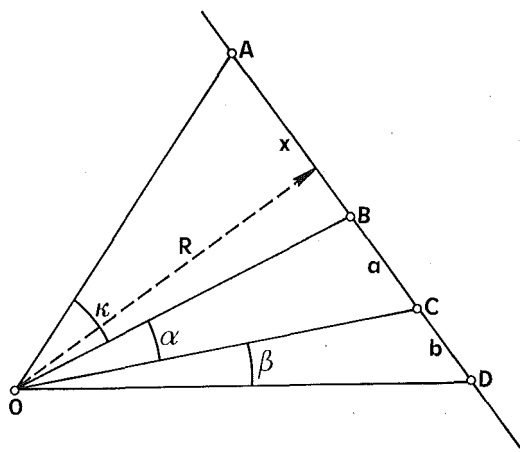


Abb. 1

Bekannt ist außerdem, daß das Doppelverhältnis  $\lambda$  invariant gegenüber Projektionen (auch Parallelprojektion) ist. Es ist also die Lage des Winkelmeßpunktes 0 bezüglich der Geraden ohne Einfluß auf die Bestimmung des Doppelverhältnisses  $\lambda$ . Sind nun 3 Winkel ( $\kappa, \alpha, \beta$ ) und 2 Strecken ( $a, b$ ) bekannt, so kann man damit aus Gleichung (1) die Formel (2) zur Berechnung der unbekanntenen Länge  $x$  ableiten.

$$x = \frac{a(a+b)(\lambda-1)}{(a+b-a\lambda)} \quad \dots(2)$$

Die gesuchte Strecke  $x$  ergibt sich somit als eindeutige Lösung der Gleichung (2), unabhängig von der Lage des Winkelmeßpunktes zur Geraden.

## 2. Genauigkeitsabschätzung

Bei der Bestimmung der unbekanntenen Länge  $x$  werden sowohl die Winkel  $\kappa, \alpha$  und  $\beta$  als auch die als bekannt vorausgesetzten Längen der Strecken  $a$  und  $b$  mit Fehlern ( $d\kappa, d\alpha, d\beta, da$  und  $db$ ) behaftet sein. Die Auswirkungen dieser Fehler auf die Länge  $x$  kann man daher durch Differentiation der Gleichung (2) ableiten.

$$dx_{\kappa} = \frac{(x+a)(x+a+b)}{b} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\kappa+\alpha) \cdot \sin(\kappa+\alpha+\beta)} \cdot d\kappa, \quad \dots(3)$$

$$dx_{\alpha} = \frac{(x+a)(x+a+b)}{b} \cdot \sin \kappa \left[ \frac{1}{\sin(\alpha+\beta) \sin(\kappa+\alpha+\beta)} - \frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin(\kappa+\alpha)} \right] d\alpha, \quad \dots(4)$$

$$dx_{\beta} = \frac{(x+a)(x+a+b)}{b} \cdot \frac{\sin \kappa}{\sin(\alpha+\beta) \sin(\kappa+\alpha+\beta)} \cdot d\beta, \quad \dots(5)$$

$$dx_a = \frac{x \cdot (b+x+2a)}{a \cdot (a+b)} \cdot da, \quad \dots(6)$$

$$dx_b = \frac{x \cdot (x+a)}{b \cdot (a+b)} \cdot db. \quad \dots(7)$$

Bekannt ist allerdings nur der mittlere Fehler der Winkelmessung  $\pm m_{\varphi}$  (gleichgroß für alle Winkel wegen der gleichgenauen Beobachtung) und der mittlere Fehler der Nennwerte der Streckenlängen  $\pm m_l$ . Nach dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz kann man nun die einzelnen Fehlereinflüsse zusammenziehen und zwar die der Winkelfehler zu  $\pm M_{\varphi}$  und die der Streckenfehler zu  $\pm M_l$ .

$$M_{\varphi} = \pm \frac{(x+a)(x+a+b)}{b} m_{\varphi} \sqrt{\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\kappa+\alpha) \cdot \sin^2(\kappa+\alpha+\beta)} + \frac{1}{\sin^2 \kappa} \left[ \frac{1}{\sin(\alpha+\beta) \sin(\kappa+\alpha+\beta)} - \frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin(\kappa+\alpha)} \right]^2 + \frac{\sin^2 \kappa}{\sin^2(\alpha+\beta) \sin^2(\kappa+\alpha+\beta)}}, \quad \dots(8)$$

$$M_l = \pm \frac{x}{a \cdot b \cdot (a + b)} m_l \sqrt{b^2 (b + x + 2a)^2 + a^2 (x + a)^2}. \quad \dots(9)$$

Man findet dann den Gesamtfehler  $M$  der Länge  $x$  nach Gleichung

$$M = \pm \sqrt{M_\varphi^2 + M_l^2}.$$

Die nächste Frage geht nun dahin, wie  $x$ ,  $a$  und  $b$  und damit auch  $\alpha$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  zu wählen sind, damit der mittlere Gesamtfehler  $M$  ein Minimum wird. Man läßt zunächst auch  $x$  noch variabel, damit man die günstigste Möglichkeit der Bestimmung einer Streckenlänge  $x$  kennenlernen kann. Die daraus folgende Extremwertaufgabe wird immerhin so verzwickelt und umfangreich, daß man hier auf Abschätzungen ausweichen wird. In erster Näherung kann man die Sinusse der Winkel durch die Quotienten der entsprechenden Strecken durch  $R$ , wenn  $R$  der Normalabstand des Winkelmeßpunktes 0 zur Geraden ist, ersetzen (z. B.  $\sin \alpha = a/R$ ). Damit findet man näherungsweise die mittleren Gruppenfehler mit

$$M_\varphi \approx \pm R \cdot m_\varphi \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} \left( \frac{2a + b + x}{a + b} \right)^2 + \frac{x^2}{b^2} \left( \frac{a + x}{a + b} \right)^2}, \quad \dots(10)$$

$$M_l \approx \pm \frac{x}{a \cdot b \cdot (a + b)} m_l \sqrt{b^2 (x + 2a + b)^2 + a^2 (x + a)^2}. \quad \dots(11)$$

Den ersten generellen Hinweis für die Anlage der Meßmethode gibt Gleichung (10), indem sie fordert,  $R$  besonders klein zu machen.

Weiters kommt in beiden Gleichungen  $x$  nur im Zähler der Brüche vor. Die Methode wird daher für kleine Längen  $x$  höhere Genauigkeiten bringen. Um nun eine Aussage über den Einfluß der Längen  $a$  und  $b$  auf die Genauigkeit von  $x$  zu bekommen, setzt man

$$b = k \cdot a$$

und vernachlässigt, wegen der Kleinheit der Werte,  $x$  in den Summen. Nach einigen Umformungen findet man dann

$$M_\varphi = \pm R \cdot m_\varphi \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} \left( \frac{2 + k}{1 + k} \right)^2 + \frac{x^2}{a^2 k^2} \left( \frac{1}{1 + k} \right)^2}, \quad \dots(12)$$

$$M_l = \pm \frac{x}{a} \cdot \frac{m_l}{k(1 + k)} \sqrt{1 + k^2 (2 + k)^2}. \quad \dots(13)$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich die Forderung nach einem großen Wert für das Verhältnis  $k$ . Schon für  $k = 1$  erhält man, immer unter der Bedingung für  $x \ll a = b$ , die folgende Abschätzung

$$M = \pm \sqrt{2 R^2 m_\varphi^2 + \frac{5}{2} \cdot \frac{x^2}{a^2} \cdot m_l^2} \quad \text{für } x \ll a = b. \quad \dots(14)$$

Man muß also trachten,  $a$  sehr viel größer als  $x$  und  $b$  größer als  $a$ , zumindest aber gleich groß zu machen. Für diesen Fall kann dann der zu erwartende Gesamtfehler mit Gleichung (14) abgeschätzt werden. Alle anderen Größenverhältnisse von  $a$ ,  $b$  und  $x$  werden einen größeren Fehler als (14) ergeben.

### 3. Praktische Erprobung

Zur Erprobung der angegebenen Meßmethode wurde eine Invarmire einer Nivellierlatte als materialisierte Gerade auf ein stabiles Eisenrohr aufgezogen. Die 3 Streckenlängen zwischen den 4 Marken ( $A$  war eine aufgeklebte Dreiecksmarke;  $B$ ,  $C$  und  $D$  waren Nivellierstriche der Invarmire) wurden entsprechend den erarbeiteten fehlertheoretischen Gesichtspunkten gewählt. Die 3 Längen wurden in einem Komparator auf Mikron genau ausgemessen (Meßergebnisse:  $x = 28,584$  mm;  $a = 124,976$  mm und  $b = 124,992$  mm, gegenüber dem Sollwert von je 125 mm). Die Winkel  $\kappa$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  wurden mit einem Sekundentheodolit TH2 in zweifacher Satzbeobachtung gemessen. Der Normalabstand ( $R$ ) des Winkelmeßpunktes von der Invarmire betrug 1,70 m. Die ausgeglichenen Winkel ergaben sich mit  $\kappa = 1^s 0930$ ,  $\alpha = 4^s 7563$  und  $\beta = 4^s 6868$ . Als mittleren Fehler eines ausgeglichenen Winkels konnte man  $\pm 5^{\text{cc}}$  errechnen.

Mit einem mittleren Fehler der Winkelmessung  $m_\varphi = \pm 5^{\text{cc}}$  und dem zufälligen Fehler  $m_l$  der Entfernungen  $a$  und  $b$  mit  $\pm 0,02$  mm hätte man unter den Meßbedingungen einen mittleren Fehler von  $\pm 0,021$  mm der Bestimmung nach Gleichung (14) zu erwarten gehabt. Tatsächlich errechnete sich  $x$  aus den Meßdaten mit 28,611 mm, das entspricht einem tatsächlichen Fehler von  $-0,027$  mm (selbstverständlich wurde die Rechnung mit den Nennwerten von je 125 mm für  $a$  und  $b$  ausgeführt). Es ist damit gezeigt, daß die theoretisch erarbeitete Methode auch in der Praxis die erwarteten Resultate zu liefern im Stande ist.

### 4. Eine Möglichkeit der Anwendung: Lattennullpunktfehlerbestimmung

Die besprochene Meßmethode stellt eine Möglichkeit zur feldmäßigen Bestimmung des Lattennullpunktfehlers einer Invarband-Nivellierlatte dar. Ein Lattennullpunktfehler entsteht durch eine Inhomogenität in der Verbindungsstelle von Invarmire und Lattenschuh, siehe *Mahrzahn* (1957). Zwischen der Nullmarke der Teilung und dem tatsächlichen Nullpunkt (Aufsetzpunkt der Latte) kann also eine merkliche (bis zu 0,4 mm) Differenz entstehen. Beim geometrischen Nivellement wird der Nullpunktfehler eines Lattenpaares durch geeignete Meßanordnung unschädlich gemacht. Doch kommt es des öfteren bei Ingenieurvermessungen vor, daß man den Lattennullpunktfehler einer Latte kennen muß. Die häufig verwendete Methode zur Bestimmung des Lattennullpunktfehlers besteht im Vergleich der Latte mit einem komparierten Präzisionsmaßstab. Ein anderes Verfahren wurde von *Finzel* (1971) beschrieben, doch scheint die geforderte Meßanlage im Aufbau für Ingenieuraufgaben zu aufwendig zu sein.

Dagegen bietet die hier beschriebene Methode folgende Vorteile: Man benötigt zur Messung bloß einen Sekundentheodolit und einen Zeiger. Mit dem Zeiger (günstig erscheint dazu die Schneide einer Rasierklinge) wird der Punkt  $A$ , das ist die Schnittlinie der Invarmire mit dem Lattenschuh, aufgezeigt, siehe dazu das Schnittbild eines Lattenschuhs einer Invarband-Nivellierlatte, dargestellt in Abb. 2. Die Punkte  $B$ ,  $C$  und  $D$  sind durch Strichmarken der Invarmire gegeben. Die Forderung,  $x$  klein gegenüber  $b$  zu machen, kann hier leicht eingehalten werden. In diesem Fall kann man dann den Einfluß des systematischen Lattenmeterfehlers auf das Ergebnis

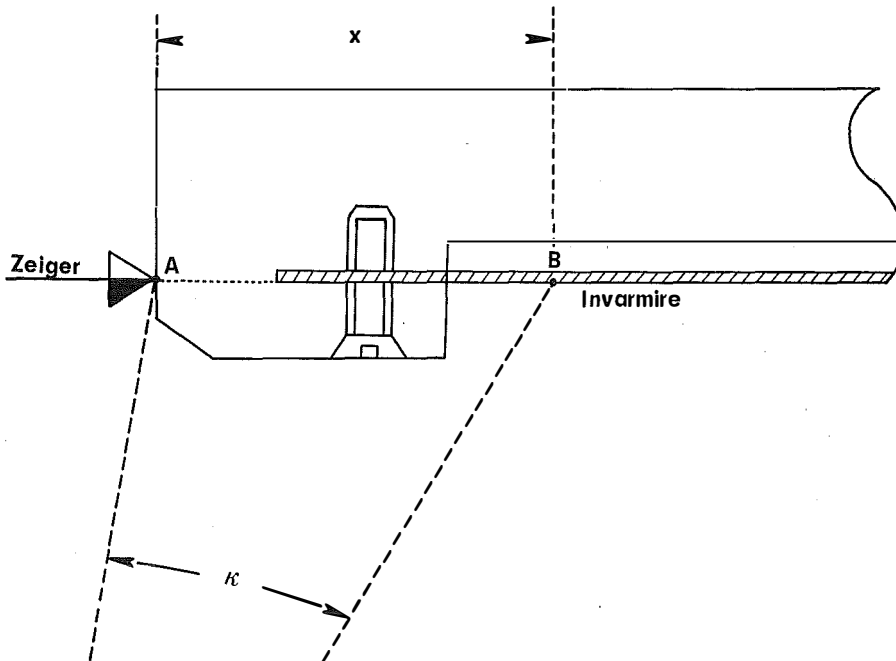


Abb. 2

vernachlässigen. Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses gegen Projektionen ist die genaue Horizontierung der Latte bedeutungslos. Die Differenz der Sollsetzung von Punkt  $B$  an der Mire gegen den errechneten Wert  $x$  nach Gleichung (1) ist dann der Lattennullpunktfehler. Zur Kontrolle wird man natürlich diese Bestimmung ein zweites Mal ausführen.

Somit konnte ein Verfahren zur Bestimmung des Lattennullpunktfehlers beschrieben werden, welches rasch und ohne besondere Hilfsmittel, da die Teilung der Invarmire der Nivellierlatte als exakter Maßstab zur Komparierung verwendet wird, ausgeführt werden kann. Die erreichbare Genauigkeit darf mit  $\pm 0,03$  mm für die meisten Ingenieuraufgaben als ausreichend angenommen werden.

#### Literatur

- Duschek, A.:* Vorlesungen über höhere Mathematik. 2. Band, Springer-Verlag, Wien 1958.  
*Finzel, H.:* Durchbiegungsmessungen an den Deckbalken eines Saales. Vermessungstechnik, 19 (1971), S. 10–12.  
*Marzahn, K.:* Untersuchungen an Invarband-Nivellierlatten. DGK, Reihe C, Heft Nr. 22, München 1957.