

Paper-ID: VGI_197313



Aufgaben der mathematischen und numerischen Geodäsie

Peter Meissl ¹

¹ TH Graz, A-8010 Graz, Technikerstraße 4

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **61** (3), S.
89–94

1973

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Meissl_VGI_197313,  
Title = {Aufgaben der mathematischen und numerischen Geod{"a}sie},  
Author = {Meissl, Peter},  
Journal = {"Österreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {89--94},  
Number = {3},  
Year = {1973},  
Volume = {61}  
}
```



Behinderungen durch den Stadtverkehr ausgeschaltet. Zusätzlich bietet das Gerät die Möglichkeit zur Reduktion der Strecken und zur direkten Berechnung der Höhenunterschiede.

Über die Vor- und Nachteile des Baukastenprinzipes kann man vielleicht geteilter Meinung sein, doch ist die Möglichkeit des Austausches bzw. der Verwendung bereits vorhandener Ausrüstungsgegenstände wie Theodolite, Reflektoren, Stative und Zwangszentrierungen und die damit gegebene Verbilligung, nicht zuletzt auch das Gewicht der verschiedenen Geräteteile sicher für die gesamte Konzeption ausschlaggebend gewesen.

Bei der praktischen Erprobung wurde nicht nur die Verwendbarkeit im Stadtgebiet bei stärkstem Verkehr unter Beweis gestellt, sondern vor allem eine Genauigkeit erreicht, die den Anforderungen bei einem Minimum an Zeitaufwand völlig entspricht.

Auf dem Wege zur rein elektronischen Tachymetrie bzw. Detailvermessung kann der Distomat WILD DI 3 als richtungweisend für die laufende und künftige Entwicklung angesehen werden.

Literaturhinweis:

Aschauer H.: Drei Jahre elektronische Tachymetrie in der Bayerischen Vermessungsverwaltung. Mitteilungen d. DVW., Landesverein Bayern, München 1972, Heft 4, S. 246–259.

Straßer, G.: Der reduzierende Distomat DI 3 und einige Bemerkungen zur Aufnahmetechnik. ZfV, 98 (1973), Heft 8, S. 356–362.

WILD Heerbrugg AG.: Gebrauchsanweisung des Infrarot-Distanzmessers Distomat WILD DI 3.

Aufgaben der mathematischen und numerischen Geodäsie

(Teilwiedergabe der Antrittsvorlesung von o. Prof. *Dipl.-Ing. Dr. techn. Peter Meissl* am 24. Mai 1973 an der Technischen Hochschule in Graz)

1. Der Fluß geodätischer Information

Die Geodäsie ist eine Wissenschaft mit einer sehr scharf formulierten Aufgabe. Ihre Aufgabe ist, Information über die Gestalt der Erdoberfläche und der äußeren Niveaufläche des Schwerepotentials zu vermitteln.

Am Anfang des geodätischen Informationsflusses steht die Messung. Messen ist ein physikalischer Vorgang, daher ist die Physik eines der Fundamente der Geodäsie.

In der Form direkter Meßresultate ist geodätische Information für den Verbraucher ungeeignet. Die Meßdaten müssen verarbeitet werden. Die Verarbeitung vollzieht sich meist in Form numerischer Rechnungen anhand mathematischer Modelle. Hier liegen die Aufgaben der mathematischen und numerischen Geodäsie. Sie ist dafür verantwortlich, daß die verwendeten mathematischen Modelle gut sind und daß die numerischen Algorithmen sowohl ökonomisch als auch stabil, d. h. unempfindlich gegenüber störenden Einflüssen wie z. B. Rundungsfehlern, sind. Natürlich werden umfangreiche Zahlenrechnungen einem Computer anvertraut.

Nach ihrer Verarbeitung muß die geodätische Information verteilt werden. Bei der Verteilung wurde bisher hauptsächlich Papier als Datenträger verwendet.

In Zukunft können die Speicher- und Übertragungsmedien der elektronischen Datenverarbeitung teilweise diese Rolle übernehmen. Die Entwicklung von Programmsystemen für den Zweck der Archivierung, Evidenzhaltung und Verteilung großer Datenbestände hat in den letzten Jahren große Fortschritte gemacht. Solche Programmsysteme können logisch sehr kompliziert sein, obwohl dabei numerisch wenig gerechnet wird. Die sogen. nicht-numerische Datenverarbeitung wird einen wesentlichen Beitrag zur besseren und rascheren Verteilung der geodätischen Information leisten.

2. Zur Problematik der Koordinaten

Exakte geodätische Ortsangaben werden durch sogen. Koordinaten gemacht. Zu den 3 Raumkoordinaten gesellt sich auch noch eine Zeitangabe, da sich die Gestalt der Erde verändert. Liegen die Koordinaten einer Anzahl von Punkten in einem wohldefinierten Koordinatensystem vor, so sollten alle gegenseitigen Lagebeziehungen des Punktsystems exakt berechenbar sein. Verwendet man als Koordinaten geographische Länge, geographische Breite sowie die Höhe über dem Meeresniveau, so gilt das Geforderte nur dann, wenn die Gestalt des Meeresniveaus genau bekannt ist. Dies ist derzeit noch nicht der Fall. Großräumliche Variationen des Meeresniveaus (Geoids) sind heute nur mit einer Unsicherheit von etwa 5–10 m bekannt. Das Koordinatensystem ist daher bezüglich einer unbekannt Fläche definiert. Das System ist zur eindeutigen Identifizierung von Punkten geeignet, nicht jedoch beispielsweise zur Berechnung der genauen Entfernung zweier Punkte.

Eine der Aufgaben der mathematischen Geodäsie ist es, Formeln anzugeben, die die Berechnung von Koordinaten aus ursprünglichen Messungen gestatten. Angefangen von den einfachen Rechenvorschriften, wie Vorwärtsschnitt, Rückwärtsschnitt und dergleichen, bis zu den mathematischen Modellen der ellipsoidischen oder der Satellitengeodäsie ist hier ein großer Formelapparat zu betreuen, d. h. zu entwickeln oder zu modernisieren bzw. für die Computerprogrammierung zu perfektionieren.

3. Ausgleichsrechnung und Statistik

Ich will nun nicht versuchen, einen Überblick über sämtliche Modelle der mathematischen und numerischen Geodäsie zu geben, dafür aber trachten, einige Akzente zu setzen, selbst auf die Gefahr hin, dabei das Gesamtbild etwas zu verzeichnen. Es wird dadurch vielleicht der Eindruck entstehen, daß größtmögliche Genauigkeit ein Prinzip ist, dem sich alles andere unterordnen muß, während jedoch wirtschaftliche Gesichtspunkte vielfach nach rascher Information verlangen, und sei es auch auf Kosten der Genauigkeit. Trotzdem ist es interessant zu fragen, wie genau mit den heutigen Meß- und Rechenhilfsmitteln die Gestalt der Erde bestimmt werden kann. Der heute sich vollziehende Zusammenschluß von Landesnetzen zu kontinentalen Netzen verlangt nach größtmöglicher Genauigkeit.

In der Geodäsie wird mehr gemessen als zur Bestimmung der Koordinaten unbedingt notwendig ist. Die überschüssigen Messungen dienen einerseits zur Vermeidung grober Fehler, andererseits zur Herabminderung des Einflusses kleiner

zufälliger und unvermeidlicher Meßfehler. Mit letzterem Aspekt befaßt sich die Ausgleichsrechnung. Sie wird dominiert von dem sogenannten Prinzip der kleinsten Quadrate, welches auf C. F. Gauß zurückgeht. Man hört mitunter das Argument, daß Gauß damit alles vorweggenommen hätte und die Ausgleichsrechnung seitdem kaum bereichert worden wäre. Ich will versuchen anzudeuten, welcher Art der Fortschritt in der Ausgleichsrechnung seit Gauß gewesen ist. Revolutionäre Entdeckungen oder Ideen verdienen oft deshalb so große Bewunderung, weil sie unter Verwendung inadäquater Hilfsmittel zustandekommen. Die geistigen Werkzeuge, welche die Mathematik bis zur Zeit Gauß' erarbeitet hatte, gestatteten nur eine sehr komplizierte Beschreibung seiner Gedanken. Für große Ideen werden die Werkzeuge zu ihrer geistigen Bewältigung vielfach erst im nachhinein entwickelt. Dies ist auch in der Ausgleichsrechnung geschehen. Als Beispiel erwähne ich das sogenannte Boltz'sche Entwicklungsverfahren, eine Technik zum Ausgleich großer Triangulationsnetze. Eine Gegenüberstellung dieses Verfahrens in Gauß'scher und in moderner Matrizen-Schreibweise zeigt, um wieviel effektiver die Werkzeuge der Ausgleichsrechnung geworden sind. In Matrizenschreibweise reduziert sich das Boltz'sche Entwicklungsverfahren zu einer Auflösung zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten, eine Aufgabe, die ein Maturant spielend bewältigt! Ein Student der Ausgleichsrechnung kann heute routinemäßig Ansätze machen, die vielleicht 50mal komplizierter sind als das Boltz'sche Verfahren. Damit soll die Leistung Boltz' aber keineswegs geschmälert werden.

Die Ausgleichsrechnung kann heute als ein Teilgebiet der mathematischen Statistik, und zwar der linearen Schätztheorie gesehen werden. Dies bringt nichts Neues, solange der Geodät nur um Koordinaten, nicht aber um deren Genauigkeit gefragt wird. Etwas boshaft ausgedrückt, kann man von den Koordinaten, die der Geodät liefert, nur eines mit Sicherheit behaupten, nämlich daß sie falsch sind. Die Ausgleichsrechnung ist ja nicht in der Lage, den Einfluß von Meßfehlern zu entfernen, sondern nur ihn herabzumindern. Völlig richtige Koordinaten wären ein reiner Zufall, dem die Wahrscheinlichkeit 0 zukommt. Seit langem ist es daher Gewohnheit, zusammen mit Koordinaten sogen. mittlere Fehler anzugeben. Diese wurden vielfach falsch verstanden und mißgedeutet und gaben oft nur zur Zeichnung formschöner Fehlerellipsen Anlaß. Die Statistik gestattet nun, zu den errechneten Koordinaten sogen. Vertrauensgrenzen zu berechnen, Grenzen, innerhalb derer die richtigen Koordinaten mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, z. B. 99 %, liegen.

Solche Vertrauensgrenzen sind u. a. nützlich, wenn nicht so sehr die Lage gewisser Punkte gemessen werden soll, als vielmehr die Lageveränderung innerhalb eines Zeitraumes. Deformationen von Staumauern, Setzungserscheinungen an künstlichen Dämmen, Kriechbewegungen der Bodenschichten in Hanglagen u. a. können durch periodische Messungen überwacht werden. Messungen dieser Art müssen einerseits sehr genau sein, andererseits dürfen sie systematisch verfälscht sein, solange die Verfälschung konstant bleibt. Auch mit einem ungeeichten Instrument kann man Veränderungen messen, solange man immer dasselbe Instrument verwendet. (Schwankungen des Wasserstandes eines Flusses können ja auch mittels eines Pegels gemessen werden, der nur einige grobe Strichmarken trägt.) Üblicher-

weise verlangt man, daß der unsystematische, d. h. nicht reproduzierbare Meßfehler etwa zehnmal kleiner ist als der Effekt, den man messen will. Man ist dann sicher, den Effekt nicht zu verfehlen. Ist man bescheidener und begnügt sich mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von z. B. 99%, so kann man auch bei einem ungünstigen Verhältnis von Effekt und Meßfehler statistisch untermauerte Aussagen machen.

Statistische Methoden schaffen einen gleitenden Übergang zwischen gesicherter Erkenntnis und völligem Unwissen. Das Gebiet von Wr.-Neustadt war in letzter Zeit Zentrum von zwei Erdbeben. In diesem Gebiet ist es nach Mitteilung der Abteilung K 2 (Erdmessung) des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen eindeutig zu Höhenveränderungen gekommen. Es wäre interessant zu wissen, ob es auch zu Lageveränderungen gekommen ist. Die Genauigkeit der heutigen Winkel- und Entfernungsmeßgeräte ist aber noch zu gering, um dies mit absoluter Sicherheit feststellen zu können. Statistische Aussagen auf Grund eines sorgfältig geplanten Experimentes müßten trotzdem möglich sein, da es sich um Messungen von Veränderungen handelt, bei denen man nur trachten müßte, systematische Einflüsse konstant zu halten, ohne sie notwendigerweise zu eliminieren.

4. Stabilitätsfragen

Die Mathematische Geodäsie hat nicht nur die Aufgabe, Koordinaten aus Messungen zu berechnen, sie muß, wie schon erwähnt, zusätzlich abschätzen, wie genau diese Koordinaten sind. Die Theorie dieser Abschätzungen ist, wie in vielen Fällen der Angewandten Mathematik, viel komplizierter, als die Theorie der ursprünglichen Formelsysteme.

Eine Meßanordnung ist stabil, wenn die Größen, die aus den Messungen abgeleitet werden sollen, unempfindlich gegenüber Meßfehlern sind. Lassen sie mich dies anhand eines Beispielles erklären. Das äußere Erdschwerefeld wäre eindeutig bekannt, wenn die Gestalt einer Niveaufläche bekannt wäre. Eine der Niveauflächen fällt annähernd mit dem Niveau des Meeresspiegels zusammen, das man sich unterhalb der Kontinente fortgesetzt denken muß. Diese Niveaufläche heißt Geoid. Das Geoid ist keine Kugel und auch kein Ellipsoid. Das Geoid wird angenähert durch eine Kugel vom Radius 6368 km. Noch besser angenähert wird es durch ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, welches von der Kugel maximal um etwa 10 km abweicht. Die unregelmäßigen Abweichungen des Geoids von diesem Ellipsoid betragen maximal etwa 100 m.

Bis in die späten 50er Jahre waren Schweremessungen auf der Erdoberfläche in Verbindung mit anderen Messungen geometrischer und astronomischer Art der einzige Weg, über die Unregelmäßigkeiten des Meeresniveaus Aussagen zu machen. Behindert war dies vor allem durch einen Mangel an Meßdaten über die ganze Erdoberfläche hin.

Mit dem Einsatz der Satelliten zeichnete sich folgender Weg ab. Die Satelliten unterliegen der Schwerkraft. Wäre das Geoid kugelförmig, so wäre die Satellitenbahn eine fast ungestörte Kepler'sche Ellipse. Abweichungen des Geoids von der Kugelgestalt verursachen Bahnstörungen der Satelliten. Es lag nahe, diese Bahnstörungen mittels optischer Geräte zu messen und daraus auf die Gestalt der Erdfigur rück-

zuschließen. Eine Zeitlang dachte man, auf diese Weise die Erdfigur etwa auf einen Meter genau bestimmen zu können. Leider ergab sich ein Stabilitätsproblem: Satellitenbahnen reagieren nicht auf alle Abweichungen von der Kugelgestalt in gleicher Weise. Abweichungen, die gebietsweise langsam variieren, stören den Satelliten empfindlich. Die Erdabplattung ist eine Größe, welche die Abweichung des vorhin erwähnten Ellipsoides von der Kugel mißt. Sie wurde durch Satellitenbeobachtungen wesentlich genauer bestimmt als vorher. Abweichungen des Geoides, die gebietsweise rasch variieren, stören die Satellitenbahn nur unwesentlich und können daher aus Bahnstörungen nicht rückgerechnet werden.

5. Zur Stabilität geodätischer Netze

Terrestrische Netze sind derzeit noch immer die genauesten geodätischen Meßanordnungen, die es gibt. Ihre Messung ist mühevoll und kann sich über viele Jahrzehnte erstrecken. Auch lassen sich Ozeane nicht überbrücken. Da die Winkelmeßgeräte früher genauer waren als die Streckenmeßgeräte, sind heute noch Winkelnetze mit wenig gemessenen Strecken vorherrschend. Winkelnetze sind nicht sehr stabil. Es fehlt ihnen die „lokale Stabilität“. Der lokale Maßstab kann gebietsweise variieren. Die Netze setzen einer konformen Verzerrung einen geringen Widerstand entgegen. Konforme Verzerrungen werden unterbunden, wenn zusätzlich Längen und Azimute gemessen werden. Dies geschieht derzeit in Österreich und das österreichische Netz wird dadurch viel stabiler werden. Bei Netzen mit vielen Distanzmessungen tritt ein anderes Problem auf. Es besteht auch für Winkelnetze, ist aber dort nicht so gravierend. Terrestrische Netze sind nur in 2 Dimensionen stabil. Daher muß man sie auf eine zweidimensionale Fläche beziehen, etwa das Meeresniveau (Geoid). Nun kennt man aber das Meeresniveau nicht genau. Fehlerhafte Abweichungen der verwendeten Bezugsfläche verursachen lokale Maßstabsverzerrungen. Diese Fehler sind systematisch. Sie sind konstant bei wiederholten Messungen des Netzes. Bei Messungen zeitlicher Veränderungen des Netzes spielen sie keine Rolle.

In der Triangulierung gibt es einen alten Meinungsstreit, ob Netze vom Großen ins Kleine oder vom Kleinen ins Große aufgebaut und ausgeglichen werden sollen. Beim Vorgehen vom Großen ins Kleine wird zuerst ein grobmaschiges Rahmennetz gemessen und berechnet, in welches später sukzessive feinere Netze hineingezwängt werden. Beim Netzaufbau vom Kleinen ins Große wird alles in einem Guß ausgeglichen. Es gibt keine andere Privilegierung von Netzpunkten und Messungen als deren Genauigkeit. Wenn systematische Fehler außer Betracht gelassen werden können, so ergibt sich ein eindeutiger Vorteil einer Vorgangsweise vom Kleinen ins Große.

Man kann weiters z. B. zeigen, daß die Genauigkeit eines streng ausgeglichenen Netzes, in dem Distanzen und Richtungen (Azimute) zwischen benachbarten Punkten gemessen wurden, etwa verkehrt proportional zum mittleren Punktabstand wächst.

Die theoretische Analyse eines flächigen homogenen Netzes¹⁾ führt unter An-

¹⁾ Eine genaue Beschreibung des verwendeten mathematischen Modelles wird in einem Sonderheft der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie erfolgen.

nahme eines zufälligen relativen Streckenfehlers von 1:100000 und eines Richtungsfehlers von $\pm 2''$ zu folgenden Fehlern für lange, aus dem ausgeglichenen Netz abgeleitete Distanzen:

	mittl. Punktabstand	
	1 km	33 km
10 km	$\pm 1,1$ cm	—
100 km	$\pm 1,4$ cm	± 26 cm
1000 km	$\pm 1,6$ cm	± 38 cm

Das erste Netz ist also etwa 25mal stabiler.

Selbst wenn man annimmt, daß das grobmaschige Netz von hochqualifiziertem Personal mit 10facher Genauigkeit gemessen wurde, ist seine Genauigkeit noch immer etwa 2–3mal kleiner.

Für einen Netzaufbau vom Großen ins Kleine sprechen organisatorische und wirtschaftliche Gründe. Es ist eine gewaltige organisatorische Aufgabe, ein großes Netz vom Kleinen ins Große nach einheitlichen Gesichtspunkten so aufzubauen, daß systematische Fehler ausgeschaltet werden. Ebenso gewaltig ist der Rechenaufwand, der vor der Zeit elektronischer Rechenanlagen völlig utopisch war.

6. Schluß

Die Geodäsie ist eine Wissenschaft, die durch ihre Aufgabe charakterisiert ist und weniger durch die verwendeten Methoden. In der Geodäsie wird der Spezialist aus Physik, Mathematik und Datenverarbeitung ebenso gebraucht wie der Beobachter, der unter extremen Verhältnissen messen kann, der Organisator und schließlich der Allrounder, der von jedem etwas hat. Die Vielseitigkeit der Methoden und Anforderungen bringt es mitunter mit sich, daß es in der Geodäsie zugeht wie beim Turmbau von Babel: der eine versteht die Sprache des anderen nicht mehr. Die Folge sind Spannungen zwischen Vertretern verschiedener Strömungen, aber auch zwischen Theoretikern und Praktikern. Ich glaube, die Aktivität eines Geodäten sollte gemessen werden an dem Beitrag, den er zur Erfüllung der Aufgabe der Geodäsie leistet, gleichgültig, ob er am Schreibtisch sitzt oder in Sturm und Eis Messungen ausführt. Ich glaube gezeigt zu haben, daß die mathematischen Modelle der Geodäsie eine wichtige Rolle bei der Verarbeitung geodätischer Informationen spielen. Der Däne Krarup, ein prominenter Vertreter der Mathematischen Geodäsie, hat einmal gesagt: „Der Nachteil der Ausgleichsrechnung ist der, daß sie eine Antwort selbst auf die dümmste Frage gibt, wenn sie nur in einer formal richtigen Weise gestellt wird.“ Daß dem nicht so ist, daß der Geodät die mathematischen Modelle, die seine Messungen in Koordinaten umwandeln, wirklich versteht, dazu möchte ich einen Beitrag leisten.