Über die Weiterentwicklung der Legendre'schen Reihen

Walter Welsch [1]

[1] *TH München, D-8 München 2, Arcisstraße 21*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **61** (4), S. 121–126

1973

Das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen kann mit berechtigtem Stolz auf die Leistungen zurückschauen, die es in den ersten 50 Jahren seines Bestehens erbracht hat. Das Amt wird aber auf Grund der menschlichen und wissenschaftlichen Qualitäten seines Personales und der Güte seiner technischen Ausstattung zweifellos im Stande sein, auch jenen ständig steigenden Ansprüchen zu entsprechen, die in den nächsten 50 Jahren seines Bestehens im Rahmen der modernen Industriegesellschaft gestellt werden. *Friedrich Blaschitz*

Über die Weiterentwicklung der Legendre'schen Reihen

Von *Walter Welsch*, München

I.

Der historische Überblick über die Entwicklung von Potenzreihen der geodätischen Linie zur Übertragung von Breite, Länge und Azimut beginnt 1806, als *Legendre* die später nach ihm benannten Reihen bis zur dritten Ordnung veröffentlichte [1]. Wie waren allerdings in den ellipsoidischen Anteilen nicht vollständig. *Levret* ergänzte 1873 die fehlenden Ausdrücke [2] und gab die vollständigen Glieder dritter Ordnung an. Im gleichen Jahr handelte *von Orff* eine Entwicklung ab [3], die bis zu sphärischen Gliedern der vierten und fünften Ordnung reicht. 1875 gab *Trepied* Formeln an [4], die ellipsoidische Glieder der vierten, jedoch keine Glieder fünfter Ordnung aufweisen.

Helmert faßte 1880 in seinem Werk [5] nach kritischer Musterung und Verbesserung die bisher vorliegenden Ergebnisse zusammen. Er vereinfachte auch die komplizierte Form der Formeln durch Einführung gewisser Abkürzungen. Die Arbeit *Helmerts* wurde 1890 von *Jordan* weitergeführt [6], der die Reihen in der fünften Potenz vollständig und in der sechsten noch sphärisch angibt. *Jordan* veröffentlichte seine Formeln in der heute noch gebräuchlichen Schreibweise.

Hier findet die Entwicklung zunächst ihren Abschluß, wobei gesagt sein soll, daß einige allgemein gehaltene Ableitungen, die den Fortschritt der Reihen nicht unmittelbar vorangetrieben hatten, nicht weiter ausgeführt sind, z. B. 1846 *Gauss* [7] und 1882 *Jordan-Steppes* [8].

1917 geht *Grabowsky* daran [9], die Potenzreihen in ihrer Systematik zu erforschen. Er stellt Schemata auf, mit denen die Entwicklungen ganz formal, also ohne fortgesetztes Differenzieren, vorangetrieben werden können. Er testet und verbessert mit seinen Erfahrungen die bekannten Reihenglieder.

Ähnliche Untersuchungen betreibt 1963 *Schödlbauer* [10], der Rekursionsformeln entwickelt, mit deren Hilfe er die sphärischen Terme der siebten und achten Ordnung aufstellt.

Als kleines Glied in dieser Entwicklung nach Potenzen der geodätischen Linie hat der Verfasser 1969 in [11] mit Hilfe des Verfahrens von *Grabowsky* noch die ellipsoidischen Ausdrücke sechster Ordnung angegeben, so daß im folgenden die *Legendre*'schen Reihen in ihren sphärischen Anteilen bis zur achten (für die Übertragung des Azimutes nur bis zur siebten) und in ihren ellipsoidischen Termen bis zur sechsten Ordnung vollständig dargestellt werden können.

II.

Die Symbole in den Formeln, deren mathematische Herleitung und Bedeutung hier als bekannt vorausgesetzt werden darf, haben die folgenden Bedeutungen:

N: Querkrümmungshalbmesser,

$$\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \varphi,$$
$$t = \operatorname{tang} \varphi,$$
$$p = \cos \alpha,$$
$$q = \sin \alpha.$$

Argument sind jeweils Ausgangsbreite bzw. -azimut. Die Schreibweise folgt mit einigen Bezeichnungsänderungen [9] bzw. (10].

Die *Legendre*'sche Reihe zur Übertragung der Breite:

$$\begin{aligned}
\varphi_2 - \varphi_1 = {} & \frac{s^1}{1!} \cdot \frac{1}{N^1} \cdot (1 + \eta^2) \cdot \{p^1 q^0\} + \\
& + \frac{s^2}{2!} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot (1 + \eta^2) \cdot \{p^0 q^2 \cdot (-t) + \\
& \qquad + p^2 q^0 \cdot (\eta^2 \cdot (-3t))\} + \\
& + \frac{s^3}{3!} \cdot \frac{1}{N^3} \cdot (1 + \eta^2) \cdot \{p^1 q^2 \cdot ((-1 - 3t^2) + \eta^2 \cdot (-1 + 9t^2)) + \\
& \qquad + p^3 q^0 \cdot (\eta^2 \cdot (-3 + 3t^2) + \eta^4 \cdot (-3 + 15t^2))\} + \\
& + \frac{s^4}{4!} \cdot \frac{1}{N^4} \cdot (1 + \eta^2) \cdot \{p^0 q^4 \cdot ((t + 3t^3) + \eta^2 \cdot (t - 9t^3)) + \\
& \qquad + p^2 q^2 \cdot ((-8t - 12t^3) + \eta^2 \cdot (26t + 18t^3) + \\
& \qquad\qquad + \eta^4 \cdot (34t - 90t^3)) + \\
& \qquad + p^4 q^0 \cdot (\eta^2 \cdot (12t) + \eta^4 \cdot (69t - 45t^3) + \\
& \qquad\qquad + \eta^6 \cdot (57t - 105t^3))\} + \\
& + \frac{s^5}{5!} \cdot \frac{1}{N^5} \cdot (1 + \eta^2) \cdot \{p^1 q^4 \cdot ((1 + 30t^2 + 45t^4) + \eta^2 \cdot (2 - 72t^2 - \\
& \qquad\qquad - 90t^4) + \eta^4 \cdot (1 - 102t^2 + 225t^4)) + \\
& \qquad + p^3 q^2 \cdot ((-8 - 60t^2 - 60t^4) + \eta^2 \cdot (18 + \\
& \qquad\qquad + 36t^2 + 90t^4) + \eta^4 \cdot (60 - 708t^2) + \\
& \qquad\qquad + \eta^6 \cdot (34 - 804t^2 + 1050t^4)) + \\
& \qquad + p^5 q^0 \cdot ((\eta^2 \cdot (12 - 12t^2) + \eta^4 \cdot (81 - 426t^2 + \\
& \qquad\qquad + 45t^4) + \eta^6 \cdot (126 - 1356t^2 + 630t^4) + \\
& \qquad\qquad + \eta^8 \cdot (57 - 942t^2 + 945t^4))\} +
\end{aligned}$$

$$+\frac{s^6}{6!}\cdot\frac{1}{N^6}\cdot(1+\eta^2)\cdot\{p^0q^6\cdot((-t-30t^3-45t^5)+\eta^2\cdot(-2t+$$
$$+72t^3+90t^5)+\eta^4\cdot(-t+102t^3-$$
$$-225t^5))+$$
$$+p^2q^4\cdot((88t+540t^3+540t^5)+\eta^2\cdot(-141t-$$
$$-726t^3-945t^5)+\eta^4\cdot(-546t+$$
$$+2964t^3+1350t^5)+\eta^6\cdot(-317t+$$
$$+4230t^3-4725t^5))+$$
$$+p^4q^2\cdot((-136t-480t^3-360t^5)+$$
$$+\eta^2\cdot(-52t+552t^3+540t^5)+$$
$$+\eta^4\cdot(-2031t+2238t^3-675t^5)+$$
$$+\eta^6\cdot(-4450t+18960t^3-3150t^5)+$$
$$+\eta^8\cdot(-2335t+17754t^3-14175t^5))$$
$$+p^6q^0\cdot(\eta^2\cdot(-48t)+\eta^4\cdot(-1308t+$$
$$+1116t^3)+\eta^6\cdot(-5211t+11958t^3-$$
$$-1575t^5)+\eta^8\cdot(-6690t+26868t^3-$$
$$-9450t^5)+\eta^{10}\cdot(-2739t+16026t^3-$$
$$-10395t^5))\}+$$

$$+\frac{s^7}{7!}\cdot\frac{1}{N^7}\cdot\{p^1q^6\cdot(-1-273t^2-1575t^4-1575t^6)+$$
$$+p^3q^4\cdot(88+2604t^2+8400t^4+6300t^6)+$$
$$+p^5q^2\cdot(-136-1848t^2-4200t^4-2520t^6)\}+$$

$$+\frac{s^8}{8!}\cdot\frac{1}{N^8}\cdot\{p^0q^8\cdot(t+273t^3+1575t^5+1575t^7)+$$
$$+p^2q^6\cdot(-816t-16296t^3-50400t^5-$$
$$-37800t^7)+$$
$$+p^4q^4\cdot(6240t+58464t^3+126000t^5+$$
$$+75600t^7)+$$
$$+p^6q^2\cdot(-3968t-24192t^3-40320t^5-$$
$$-20160t^7)\}.$$

Die *Legendre*'sche Reihe zur Übertragung der Länge:

$$\lambda_2-\lambda_1=\frac{s^1}{1!}\cdot\frac{1}{N^1}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\{p^0q^1\}+$$

$$+\frac{s^2}{2!}\cdot\frac{1}{N^2}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\{p^1q^1\cdot(2t)\}+$$

$$+\frac{s^3}{3!}\cdot\frac{1}{N^3}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\{p^0q^3\cdot(-2t^2)+$$
$$+p^2q^1\cdot((2+6t^2)+\eta^2\cdot(2))\}+$$

$$+\frac{s^4}{4!}\cdot\frac{1}{N^4}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\{p^1q^3\cdot((-8t-24t^3)+\eta^2\cdot(-8t))+$$
$$+p^3q^1\cdot((16t+24t^3)+\eta^2\cdot(8t)+\eta^4\cdot(-8t))\}+$$

$$+\frac{s^5}{5!}\cdot\frac{1}{N^5}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\{p^0q^5\cdot((8t^2+24t^4)+\eta^2\cdot(8t^2))+$$
$$+p^2q^3\cdot((-8-160t^2-240t^4)+\eta^2\cdot(-16-$$
$$-104t^2)+\eta^4\cdot(-8+56t^2))+$$
$$+p^4q^1\cdot((16+120t^2+120t^4)+\eta^2\cdot(24+$$
$$+48t^2)+\eta^4\cdot(-24t^2)+\eta^6\cdot(-8+$$
$$+48t^2))\}+$$

$$+\frac{s^6}{6!}\cdot\frac{1}{N^6}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\{p^1q^5\cdot((32t+480t^3+720t^5)+\eta^2\cdot(64t+$$
$$+336t^3)+\eta^4\cdot(32t-144t^3))+$$
$$+p^3q^3\cdot((-416t-2400t^3-2400t^5)+$$
$$+\eta^2\cdot(-624t-1248t^3)+\eta^4\cdot(624t^3)+$$
$$+\eta^6\cdot(208t-528t^3))+$$
$$+p^5q^1\cdot((272t+960t^3+720t^5)+\eta^2\cdot(272t+$$
$$+336t^3)+\eta^4\cdot(-96t-192t^3)+$$
$$+\eta^6\cdot(80t+48t^3)+\eta^8\cdot(176t-$$
$$-384t^3))\}+$$

$$+\frac{s^7}{7!}\cdot\frac{1}{N^7}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\{p^0q^7\cdot(-32t^2-480t^4-720t^6)+$$
$$+p^2q^5\cdot(32+2912t^2+15120t^4+15120t^6)+$$
$$+p^4q^3\cdot(-416-10640t^2-33600t^4-25200t^6)+$$
$$+p^6q^1\cdot(272+3696t^2+8400t^4+5040t^6)\}+$$

$$+\frac{s^8}{8!}\cdot\frac{1}{N^8}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\{p^1q^7\cdot(-128t-8064t^3-40320t^5-40320t^7)+$$
$$+p^3q^5\cdot(7680t+126336t^3+376320t^5+$$
$$+282240t^7)+$$
$$+p^5q^3\cdot(-24576t-220416t^3-470400t^5-$$
$$-282240t^7)+$$
$$+p^7q^1\cdot(7936t+48384t^3+80640t^5+$$
$$+40320t^7)\}.$$

Die *Legendre*'sche Reihe zur Übertragung des Azimutes:

$$\alpha_2-\alpha_1=\frac{s^1}{1!}\cdot\frac{1}{N^1}\cdot\{p^0q^1\cdot(t)\}+$$

$$+\frac{s^2}{2!}\cdot\frac{1}{N^2}\cdot\{p^1q^1\cdot((1+2t^2)+\eta^2)\}+$$

$$+\frac{s^3}{3!}\cdot\frac{1}{N^3}\cdot\{p^0q^3\cdot((-t-2t^3)+\eta^2\cdot(-t))+$$
$$+p^2q^1\cdot((5t+6t^3)+\eta^2\cdot(t)+\eta^4\cdot(-4t))\}+$$

$$+\frac{s^4}{4!}\cdot\frac{1}{N^4}\cdot\{p^1q^3\cdot((-1-20t^2-24t^4)+\eta^2\cdot(-2-8t^2)+$$
$$+\eta^4\cdot(-1+12t^2))+$$
$$+p^3q^1\cdot((5+28t^2+24t^4)+\eta^2\cdot(6+8t^2)+$$
$$+\eta^4\cdot(-3+4t^2)+\eta^6\cdot(-4+24t^2))\}+$$

$$
\begin{aligned}
+\frac{s^5}{5!}\cdot\frac{1}{N^5}\cdot\{ & p^0q^5\cdot((t+20t^3+24t^5)+\eta^2\cdot(2t+8t^3)+\\
& \quad +\eta^4\cdot(t-12t^3))+\\
& +p^2q^3\cdot((-58t-280t^3-240t^5)+\eta^2\cdot(-72t-\\
& \quad -104t^3)+\eta^4\cdot(30t+32t^3)+\eta^6\cdot(44t-\\
& \quad -144t^3))+\\
& +p^4q^1\cdot((61t+180t^3+120t^5)+\eta^2\cdot(46t+48t^3)+\\
& \quad +\eta^4\cdot(-3t-36t^3)+\eta^6\cdot(100t-96t^3)+\\
& \quad +\eta^8\cdot(88t-192t^3))\}+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+\frac{s^6}{6!}\cdot\frac{1}{N^6}\cdot\{ & p^1q^5\cdot((1+182t^2+840t^4+720t^6)+\eta^2\cdot(3+\\
& \quad +232t^2+336t^4)+\eta^4\cdot(3-82t^2-144t^4)+\\
& \quad +\eta^6\cdot(1-132t^2+360t^4))+\\
& +p^3q^3\cdot((-58-1316t^2-3600t^4-2400t^6)+\\
& \quad +\eta^2\cdot(-130-1248t^2-1248t^4)+\\
& \quad +\eta^4\cdot(-42+228t^2+624t^4)+\eta^6\cdot(74-\\
& \quad -1064t^2+192t^4)+\eta^8\cdot(44-1224t^2+\\
& \quad +1920t^4))+\\
& +p^5q^1\cdot((61+662t^2+1320t^4+720t^6)+\eta^2\cdot(107+\\
& \quad +440t^2+336t^4)+\eta^4\cdot(43-234t^2-\\
& \quad -192t^4)+\eta^6\cdot(97-772t^2+408t^4)+\\
& \quad +\eta^8\cdot(188-2392t^2+1536t^4)+\eta^{10}\cdot(88-\\
& \quad -1632t^2+1920t^4))\}+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+\frac{s^7}{7!}\cdot\frac{1}{N^7}\cdot\{ & p^0q^7\cdot(-t-182t^3-840t^5-720t^7)+\\
& +p^2q^5\cdot(543t+8582t^3+22680t^5+15120t^7)+\\
& +p^4q^3\cdot(-3111t-24290t^3-46200t^5-25200t^7)+\\
& +p^6q^1\cdot(1385t+7266t^3+10920t^5+5040t^7)\}.
\end{aligned}
$$

III.

Wenn auch der Anwendungsbereich der *Legendre'schen* Reihen bei der Behandlung größerer Entfernungen und zunehmender Polnähe beschränkt ist, so mag die Wiedergabe der bisher erfolgten Entwicklungen der Vollständigkeit halber und im Hinblick auf die heute problemlose numerische Behandlung durch Rechenautomaten, die mit Hilfe des Verfahrens von *Grabowsky* sogar zur automatischen Weiterentwicklung der Reihen programmiert werden könnten, für manche Zwecke doch von einiger Bedeutung sein.

Literatur

[1] *Legendre, A. M.:* Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroide. Tome VII de la 1°-série des memoires de l'Académie des Sciences, S. 131, Paris 1806.

[2] *Levret, H.:* Détermination des positions géographiques sur un ellipsoide. Comtes rendus de l'Académie des Sciences, Band 76, S. 410, Paris 1873.

[3] *Orff, C. von:* Übergang auf das Bessel'sche Sphäroid und Erweiterung der von Soldner aufgestellten Formeln.In „Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage", S. 539, München 1873.

[4] *Trepied, Ch.:* Sur le calcul des coordonnées géodésiques. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Band 80, S. 36, Paris 1875.

[5] *Helmert, F. R.:* Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. S. 296, Leipzig 1880.

[6] *Jordan, W.:* Landesvermessung und Grundaufgaben der Erdmessung. Handbuch der Vermessungskunde, 3. Band, S. 387, Stuttgart 1890.

[7] *Gauß, C. F.:* Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie — Zweite Abhandlung. Art. 26—32, Göttingen 1846.

[8] *Jordan, W.* und *K. Steppes:* Das Deutsche Vermessungswesen. Band 1, S. 113, Stuttgart 1882.

[9] *Grabowsky, L.:* Über die Potenzreihen zur sogenannten geodätischen Hauptaufgabe. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen *15* (1917) 9, S. 133 und *16* (1918) 1, S. 10.

[10] *Schödlbauer, A.:* Über eine neue numerische Lösung der 1. geodätischen Hauptaufgabe auf einem Referenzellipsoid der Erde für Seitenlängen bis 120 km. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 58, S. 8, München 1963.

[11] *Welsch, W.:* Beiträge zur Transformation geodätischer geographischer Koordinaten nach Hristow. S. 12, München 1969.

Lotabweichungseinfluß bei der trigonometrischen Höhenmessung mit steilen Visuren

Von *Friedrich K. Brunner*, Wien

Zusammenfassung

Es wird in dieser Arbeit untersucht, wie weit die trigonometrische Höhenmessung in der Lage ist, das geometrische Nivellement, besonders bei steilen Hängen im Gebirge, zu ersetzen. Es wird gezeigt, daß der Lotabweichungseinfluß (ellipsoidische minus beobachtete Zenitdistanz) auf den zu messenden Höhenunterschied bei gemessener horizontaler Distanz abhängig von der Visurneigung, dagegen aber bei gemessener schiefer Seite unabhängig von der Visurneigung ist. Im Gebirge mit seinen steilen Hängen kommt daher nur als trigonometrische Meßmethode die Zenitdistanzbeobachtung in Verbindung mit schief (elektrooptisch) gemessenen Entfernungen in Frage.

Abstract

The Effect of the Deflection of the Vertical on Trigonometric Levelling with Steep Sightings.

In this paper the problem is being investigated how far geometric levelling can be substituted by trigonometric levelling especially on steep slopes in mountain areas. It is shown that the effect of the deflection of the vertical (ellipsoidal minus true zenith distance) on the height difference to be measured depends on the inclination of the sighting in case the horizontal distance is measured, but is independet of the inclination when the slope distance is measured. Thus, in mountain areas with its steep slopes only the method of zenith distances in connection with electro-optical slope ranges is suitable.