



Trigonometrisches Nivellement – Geometrisches Nivellement. Ein Genauigkeitsvergleich der beiden Methoden für große Höhenunterschiede

Fritz K. Brunner ¹

¹ *Institut für Geophysik an der Technischen Hochschule Wien, A-1040 Wien, Gußhausstraße 27-29*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **62** (2), S. 49–60

1974

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Brunner_VGI_197405,  
Title = {Trigonometrisches Nivellement -- Geometrisches Nivellement. Ein  
Genauigkeitsvergleich der beiden Methoden für große  
Höhenunterschiede},  
Author = {Brunner, Fritz K.},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {49--60},  
Number = {2},  
Year = {1974},  
Volume = {62}  
}
```



ÖSTERREICHISCHE ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN UND PHOTOGRAMMETRIE

Herausgegeben vom
Österreichischen Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen)
und der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung

SCHRIFTFLEITUNG:

ao. Prof. W. Hofrat i. R. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter
o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hans Schmid
o. Prof. Dr. phil. Wolfgang Pillewizer
o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Helmut Moritz

Nr. 2

Baden bei Wien, Oktober 1974

62. Jg.

Trigonometrisches Nivellement — Geometrisches Nivellement

Ein Genauigkeitsvergleich der beiden Methoden für große Höhenunterschiede

Von *Friedrich K. Brunner*, Wien

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die erreichbaren Genauigkeiten des geometrischen und trigonometrischen Nivellements für große Höhenunterschiede verglichen. Die Bezeichnung „trigonometrisches Nivellement“ steht hier für das Zusammenschließen von mehreren trigonometrischen Höhenmessungen zur Bestimmung eines Gesamthöhenunterschiedes. Die Untersuchungen bleiben auf das trigonometrische Nivellement mit gegenseitigen Zenitdistanzbeobachtungen und schief (elektrooptisch) gemessenen Seiten beschränkt. Am Modell eines Hanges (schiefe Ebene) wird sodann gezeigt, daß das trigonometrische Nivellement schon ab rund 150 m Höhendifferenz dem geometrischen Nivellement genauigkeitsmäßig und auch arbeitstechnisch überlegen ist, aber ebenso wie das geometrische Nivellement rohe Nivellementhöhendifferenzen liefert.

Abstract

In this paper the accuracies of geometric and trigonometric levelling for large differences in height are compared. „Trigonometric levelling“ means the superposition of some trigonometric height measurements. The investigations of this paper are limited to the method of trigonometric levelling when the zenith distances are measured at both ends in connection with electrooptical slope ranges. For the model of a slope (inclined plane) it is shown that a height difference of more than 150 m will be measured with greater accuracy and less labor by trigonometric levelling than by geometric levelling; moreover, the trigonometric levelling method described yields uncorrected geometric height differences like the geometric levelling method.

1. Einleitung

Auf Grund der steigenden Aktualität des trigonometrischen Nivellements, vor allem durch die Neuentwicklung von geodätischen Meßgeräten, will diese Arbeit versuchen, einen Genauigkeitsvergleich zwischen dem trigonometrischen Nivellement und dem geometrischen Nivellement aufzustellen. Ähnlich dem geometrischen Nivellement soll das Zusammenschließen von mehreren trigonometrischen Höhen-

messungen zur Bestimmung eines Gesamthöhenunterschiedes trigonometrisches Nivellement genannt werden. Es soll im speziellen untersucht werden, ob das trigonometrische Nivellement im Stande ist, das geometrische Nivellement bei der Messung großer Höhenunterschiede im Gebirge zu ersetzen und in welcher theoretisch richtigen Art und Anlage das trigonometrische Nivellement dabei verwendet werden müßte. Es wird nur die Aufgabe der Messung von Einzelhöhendifferenzen betrachtet, also nur das spezielle Tal-Gipfel-Problem. Die erreichbare Genauigkeit bei der Bestimmung eines großen Höhenunterschiedes soll abgegrenzt werden.

Zum größten Teil werden im folgenden die theoretischen Grundlagen des trigonometrischen Nivellements ohne detaillierte Ableitungen aus [4] und [5] übernommen werden. Nach den Schlußfolgerungen in [5] kommt bei steilen Visuren nur die gegenseitige Zenitdistanzbeobachtung mit den direkt (elektrooptisch) gemessenen schiefen Entfernungen als Meßmethode in Frage. Denn nur diese trigonometrische Höhenmeßmethode liefert, im Gegensatz zur trigonometrischen Höhenmessung mit gemessenen horizontalen Seiten, unabhängig von der Visureneigung für den Grenzfall — die Entfernungen der trigonometrischen Höhenmessung gehen gegen die des geometrischen Nivellements — rohe unreduzierte geometrische Nivellementhöhenunterschiede. Wie schon vom geometrischen Nivellement her bekannt, kann auch dann das trigonometrische Nivellement in einem weiteren Arbeitsgang mittels Schweremessungen zu dynamischen oder orthometrischen Höhen reduziert werden. Doch soll dieser nachgeordnete Arbeitsgang nicht Thema der vorliegenden Arbeit sein.

2. Trigonometrisches Nivellement (Gegenseitig beobachtete Zenitdistanzen, gemessene schiefe Seite)

Wie schon erwähnt, werden beim trigonometrischen Nivellement die gemessenen Einzelhöhenunterschiede summiert und ergeben sodann den gesuchten Gesamthöhenunterschied H . Der Meßmethode folgend werden daher auch die Genauigkeitsbetrachtungen zuerst für den Einzelhöhenunterschied und erst danach für den resultierenden Gesamtfehler angestellt. Generell werden als vorläufige Einschränkung nur Visurlängen kleiner als 2 km betrachtet. Diese Visurlängenbeschränkung folgt in erster Linie aus der Reichweite der elektrooptischen Nahbereichs-Entfernungsmesser. Des weiteren ist bei allen folgenden Betrachtungen eine fehlerfreie Höhenzwangszentrierung zwischen Theodolit und Zieltafel vorausgesetzt, so daß keine Instrumenten- und Zielhöhen zu berücksichtigen sind.

2.1 Höhenformel

Hier wird ohne Ableitung — die Herleitung kann z. B. in [4] nachgelesen werden — eine Höhenformel für gegenseitig beobachtete Zenitdistanzen angegeben:

$$\overline{\Delta H}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot s_i (\cos z_{ij} - \cos z_{ji}) - \frac{(s_i \cdot \sin z_{ij})^2}{4r} (k_{ij} - k_{ji}) \quad \dots (1)$$

Die geometrischen Beziehungen des trigonometrischen Nivellements wie auch die verwendeten Bezeichnungen sind in Abb. 1 veranschaulicht. Zwischen den Refraktionswinkeln und den wirksamen Refraktionskoeffizienten besteht die Beziehung

$$\delta_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_i \cdot k_{ij} \quad \dots (2)$$

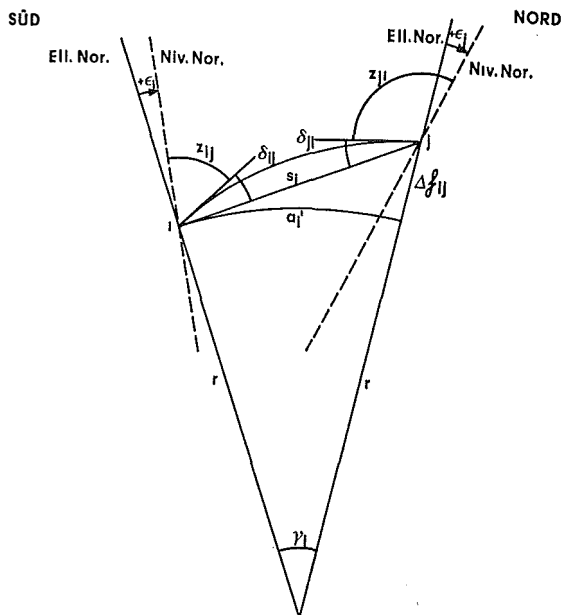


Abb. 1

Ein Höhenunterschied, gerechnet aus gegenseitig beobachteten Zenitdistanzen nach Gleichung (1), wird weitgehend unabhängig vom Wert des Krümmungsradius. Weiters ist nur die Differenz der wirksamen Refraktionskoeffizienten und nicht deren absolute Werte für die Höhenbestimmung von Bedeutung.

2.2 Einfluß der Lotabweichungen

In Gleichung (1) wurde vorausgesetzt, daß zur Berechnung des Höhenunterschiedes die beobachteten Zenitdistanzen verwendet werden. Den Zusammenhang mit der ellipsoidischen Höhendifferenz Δh ergeben die Lotabweichungskomponenten ϵ_i und ϵ_j der Standpunkte:

$$\overline{\Delta h}_{ij} = \overline{\Delta H}_{ij} + \frac{(\epsilon_i + \epsilon_j)}{2} (s_i \cdot \sin z_{ij}). \quad \dots (3)$$

Soll nun das trigonometrische Nivellement geometrische Nivellementhöhenunterschiede liefern, so findet man nach [5] durch einen Vergleich der Gleichung (3) mit der entsprechenden Formel für das geometrische Nivellement die Bedingung (4):

$$\int_0^a \epsilon \cdot dl = \sum a_i \frac{(\epsilon_i + \epsilon_j)}{2}. \quad \dots (4)$$

Nach Gleichung (4) wird also die Fläche unter der Lotabweichungskurve unabhängig von der Visurneigung durch Trapezflächen angenähert. Man kann darin ein Analogon zur numerischen Integrationsmethode nach der Sehnenrapezformel

¹⁾ Es sei hier ein Druckfehler in Abb. 2 in [5] korrigiert: der durch ϵ_i verursachte ellipsoidische „Höhenfehler“ des geometrischen Nivellements ist gleich $\epsilon_i dl$, in der Abbildung gleich dl.

sehen. Dieses Analogon wurde auch in [4] benützt, um aus dem bekannten Lotabweichungsprofil der Schweizer Alpen [9] eine Formel für die mittlere Differenz zwischen trigonometrisch und geometrisch nivellierten Höhenunterschieden zu berechnen. Wird der zu bestimmende Höhenunterschied in n Meßabschnitte mit der durchschnittlichen horizontalen Seitenlänge a_i (in km) unterteilt, so findet man nach [4] die mittlere Abweichung F (in mm):

$$F = 8 \cdot n \cdot a_i^3. \quad \dots (5)$$

Die Werte der Gleichung (5) wurden allerdings für das echte Hochgebirge ermittelt. Im Mittelgebirge (geringere Bewegtheit der Lotabweichungskurve) wird der Betrag (5) kaum erreicht werden. Zu bemerken ist noch, daß F ein systematischer Fehler bei einer Höhenbestimmung Tal-Gipfel ist, da die Lotabweichungskurve für Hangprofile die Form einer Kosinuslinie besitzt.

2.3 Fehlereinflüsse auf einen Teilhöhenunterschied

Zunächst werden nun die Fehlerformeln für einen Einzelhöhenunterschied aus Gleichung (1) abgeleitet. In den angegebenen Fehlerformeln sind Glieder höherer Ordnung nicht mehr enthalten. Da ein Höhenunterschied, bestimmt durch gegenseitige Zenitdistanzbeobachtungen, weitgehend unabhängig vom Wert des Krümmungsradius wird, soll dieser extrem kleine Fehler auch nicht näher untersucht werden. Es sind daher, da die systematisch wirkenden Lotabweichungseinflüsse schon behandelt wurden, nur mehr die mittleren Fehler des Höhenunterschiedes wegen der Zenitdistanzfehler, Entfernungsfehler und Refraktionsungleichheiten zu besprechen.

2.3.1 Einfluß der Zenitdistanzfehler

Gemessen werden die Zenitdistanzen mit Sekundentheodoliten vom Stativ aus. Mit allen auf dem Markt befindlichen Sekundentheodoliten können ohne großen Meßaufwand mittlere Fehler der Zenitdistanzen kleiner als $\pm 5^\circ$ erreicht werden. Bei gleicher Beobachtungsgenauigkeit m_z der gegenseitigen Zenitdistanzen ergibt sich somit der mittlere Höhenfehler des Einzelhöhenunterschiedes wegen der Zenitdistanzfehler nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz mit

$$m \overline{\Delta H}_z = \pm \frac{s_i \cdot \sin z_{ij}}{\sqrt{2}} \cdot m_z. \quad \dots (6)$$

Zur Steigerung der Genauigkeit der gegenseitigen Beobachtung der Zenitdistanzen ist es erforderlich, daß man Theodolit und Zieltafel zwangszentriert austauschen kann. Allerdings steht für das trigonometrische Nivellement die Höhenzwangszentrierung im Mittelpunkt des Interesses.

2.3.2 Einfluß des Fehlers der schiefen Seite

Hallermann [6] hat das Angebot des Marktes „Nahbereichs-Entfernungsmesser“ zusammengestellt, ohne auf die japanischen und amerikanischen Modelle näher eingegangen zu sein. Aber schon in dieser Zusammenstellung sieht man, daß sich der Genauigkeitsbereich der Entfernungsmessung von ± 4 mm des Tellurometers MA 100 bis ungefähr ± 10 mm des Di 10 von WILD spannt. Bei realistischer Einschätzung der atmosphärischen Umstände wird man den mittleren Fehler einer

Seitenmessung mit ± 1 cm annehmen können. Da es nicht notwendig ist, die schiefe Seite gegenseitig zu messen, muß diese aber unbedingt kontrolliert (von einem Standpunkt aus) gemessen werden. Man findet daher den mittleren Fehler eines Höhenunterschiedes verursacht durch den mittleren Fehler der schiefen Seite mit

$$m_{\overline{\Delta H}_s} = \pm \frac{1}{2} (\cos z_{ij} - \cos z_{ji}) m_s = \pm \cos z_{ij} \cdot m_s. \quad \dots (7)$$

Bis jetzt wurde stillschweigend die fehlerfreie, zwangszentrierte Ausführung der Winkel- und Seitenmessung in einem Arbeitsgang vorausgesetzt. In der Praxis wird man je nach den vorhandenen Geräten entscheiden, ob man Winkel und Seiten zwangszentriert mißt oder ob man unabhängig von der Winkelmessung die Seitenmessung ausführt. Wird die Seitenmessung nicht zwangszentriert mit der Winkelmessung ausgeführt, so wird man die gemessenen schiefen Seiten auf die ursprünglichen Zenitdistanzen mit Hilfe der Instrumenten- und Zielhöhendifferenzen zwischen der Winkel- und Seitenmessung reduzieren.

2.2.3 Einfluß des Refraktionsunterschiedes

Zahlreiche Literatur existiert zwar zur Refraktion bei langen Visuren (größer als 2 km), doch zur Refraktion bei kurzen Visuren (kleiner als 2 km) findet man nur spärlich Material. Die Gründe dafür sind bald gefunden. Kurze Visuren, von Stativen aus beobachtet, gehen fast immer durch die labile Unterschicht der Atmosphäre, da diese mit einer mittleren Höhe von ungefähr 20 Metern angenommen werden kann. Die Refraktion in dieser labilen Unterschicht unterliegt enormen Schwankungen und Anomalien, die, abgesehen von den wechselnden Strahlungseinflüssen (bedingt durch die wechselnde Bewölkung), noch zusätzlich von Topographie, Art des Oberflächenmaterials, Bewuchs und Richtung und Geschwindigkeit des Windes abhängen.

Bahnert [1, Seite 37] empfiehlt daher für kurze Visuren, gerade wegen der Nichterfaßbarkeit der wechselnden äußeren Einflüsse, das Kreisbogenmodell für die Lichtbahnkurve beizubehalten. Da auch der Gleichung (1) das Kreisbogenmodell zugrunde gelegt wurde, sollte theoretisch k_{ij} gleich k_{ji} sein. In der Praxis wird diese Bedingung auf Grund der verschiedenen Umstände (unsymmetrisches Höhenprofil, unterschiedliche Bodenbeschaffenheit, ungleiche Instrumentenhöhen, Windanomalien) nicht zutreffen, daher ist mit einer Differenz Δk der beiden Refraktionskoeffizienten, die man als mittleren zufälligen Fehler betrachten kann, zu rechnen. Es ergibt sich daher der mittlere Fehler eines Höhenunterschiedes wegen der mittleren Refraktionsungleichheit mit

$$m_{\overline{\Delta H}_{\Delta k}} = \pm \frac{(s_i \cdot \sin z_{ij})^2}{4 r} m_{\Delta k}. \quad \dots (8)$$

Zur Abschätzung der mittleren Refraktionsungleichheit $m_{\Delta k}$ gegenseitiger Visuren kann behelfsweise der mittlere Fehler des Refraktionskoeffizienten m_k benutzt werden. In der Literatur findet man für m_k für kurze Visuren ein Intervall von $\pm 0,1$ bis $\pm 0,35$ angegeben. Daraus folgt als obere Grenze für die mittlere Refraktionsdifferenz

$$m_{\Delta k} = \pm 0,5. \quad \dots (9)$$

Dieser Wert wurde durch die Untersuchungen von *Tegeler* [11, Seite 67–71] zur trigonometrischen Höhenbestimmung in Flachlandnetzen vollauf für kurze Visurlängen bestätigt.

Hatte der Verfasser in [4] $m\Delta k$ mit ± 0.1 vielleicht zu optimistisch angenommen, so darf schon hier vorweggenommen werden, daß auch der fünffache mittlere Refraktionsdifferenzbetrag nach Gleichung (9) am Gesamthöhenfehler wenig ändert, sondern nur die optimale Streckenlänge, mit der ein minimaler mittlerer Höhenfehler erzielt werden kann, verändert. Um die entfernungsunabhängige, hohe Streckenmeßgenauigkeit der elektrooptischen Nahbereichsentfernungsmeßgeräte auszunützen, werden die Visurlängen zwischen 400 m und 1000 m zu wählen sein. Gerade für diesen Bereich dürfte aber die Einschätzung des mittleren Fehlers der Refraktionsdifferenz zwischen der Hin- und Rückmessung bei gleichzeitigen, insbesondere aber bei zeitlich knapp aufeinanderfolgenden Messungen nach Gleichung (9) mit $\pm 0,5$ realistischer als mit $\pm 0,1$ sein.

2.3.4 Mittlere Fehler eines Teilhöhenunterschiedes

Der mittlere Fehler eines Teilhöhenunterschiedes wegen der zufälligen Beobachtungsfehler und des Unterschiedes der Refraktionskoeffizienten ergibt sich nach dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz für den Einzelhöhenabschnitt $\overline{\Delta H}$ mit

$$m_{\overline{\Delta H}}^2 = \left(\frac{s \cdot \sin z}{\sqrt{2}} \cdot m_z \right)^2 + (\cos z \cdot m_s)^2 + \left[\frac{(s \cdot \sin z)^2}{4r} m_{\Delta k} \right]^2. \quad \dots (10)$$

2.4 Gesamtfehler des trigonometrischen Nivellements

Beim trigonometrischen Nivellement werden die einzelnen Teilhöhenunterschiede aus den gegenseitig beobachteten Zenitdistanzen und der gemessenen schiefen Seite berechnet. Unter der Voraussetzung, daß die Messungen zwangszentriert ausgeführt werden, errechnet sich somit der Gesamthöhenunterschied als Summe der Einzelhöhenabschnitte (ohne Beachtung der unbekanntenen Refraktionsdifferenzen):

$$H = \sum_1^{n-1} \frac{s_i}{2} (\cos z_{i, i+1} - \cos z_{i+1, i}). \quad \dots (11)$$

Fehlertheoretisch ist das trigonometrische Nivellement ein Analogon zum Bussolenzug. Für den Bussolenzug wird in der Standardliteratur auf Grund der Fehlerfortpflanzung empfohlen, die Seiten kurz zu halten. Nun hat aber *Tarczy-Hornoch* [10] gezeigt, daß bei Kreiselpolygonzügen wenige lange Seiten, dafür aber mehrfache Orientierung in den Polygonpunkten fehlertheoretisch und arbeitstechnisch günstiger sind als kurze Seiten mit einfacher Orientierung. Auf den Höhenzug übertragen bedeutet dies, bei langen Seiten die Zenitdistanzen in mehreren Sätzen zu beobachten. Wie schon *Bahnert* [1, Seite 44] bemerkt hat, sind in jedem Beobachtungspunkt die Messungen unabhängig voneinander, höchstens durch gleiche Refraktionszustände korreliert. Daher kann man den mittleren Fehler des gesamten Höhenunterschiedes durch Anwendung des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes für unkorrelierte Beobachtungen finden. Durch Unterteilung der

Gesamthöhendifferenz in n gleiche Abschnitte findet man den zufälligen Gesamtfehler

$$M = \pm \sqrt{n} \cdot m_{\Delta H}. \quad \dots (12)$$

Für einen gegebenen Höhenunterschied soll nun das Minimum des zufälligen Gesamtfehlers M des Höhenunterschiedes gesucht werden. Als einfachstes Modell eines Berghanges bietet sich die schiefe Ebene an, gegeben durch Neigung α und Höhendifferenz H . Weicht man mit den Messungen, schematisch in Abb. 2 dargestellt, aus der Falllinie aus, so kann man die Zenitdistanzen variabel gestalten. Allerdings muß die Länge der schiefen Seite s zwischen der entsprechenden Falllinienstrecke und der Reichweite des Entfernungsmessgerätes liegen. Unter der theoretischen Annahme gleichlanger Seiten ergeben sich folgende, aus Abb. 2 leicht ablesbare Beziehungen:

$$\Delta H = \frac{H}{n} \quad \dots (13)$$

$$\cos z = \frac{H}{n \cdot s} \quad \dots (14)$$

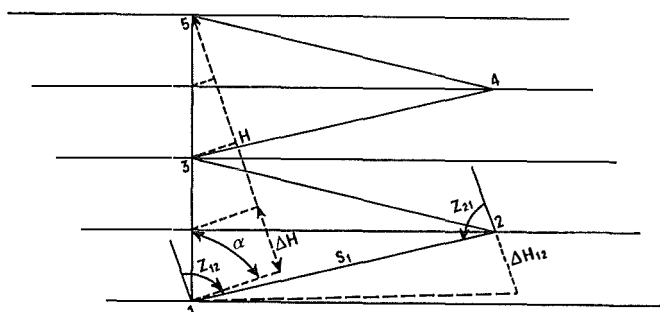


Abb. 2

Mit diesen Beziehungen findet man für das mittlere Fehlerquadrat des Höhenunterschiedes aus den Gleichungen (10) und (12) den Ausdruck (15).

$$M^2 = \frac{1}{n} \left[(n^2 s^2 - H^2) \frac{m_z^2}{2} + \frac{H^2}{s^2} m_s^2 + \frac{(n^2 s^2 - H^2)^2}{16 \cdot n^2 \cdot r^2} m_{\Delta k^2} \right] \quad \dots (15)$$

Ohne n vorläufig festzulegen, wird zunächst das Minimum für M^2 in Abhängigkeit von der Seitenlänge gesucht. Die erste Ableitung von M^2 Null gesetzt, ergibt Gleichung (16), eine Gleichung 6. Grades in s :

$$\frac{\partial (M^2)}{\partial s} = n^2 \cdot m_{\Delta k^2} \cdot s^6 - (m_{\Delta k^2} \cdot H^2 - 4 \cdot n^2 \cdot r^2 \cdot m_z^2) s^4 - 8 \cdot r^2 \cdot H^2 \cdot m_s^2 = 0 \quad \dots (16)$$

Gleichung (16) kann durch eine Substitution in eine Gleichung 3. Grades übergeführt werden, die ihrerseits wieder eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen hat. Mit Hilfe der 2. Ableitung kann gezeigt werden, daß für jeden reellen Wert von \bar{s} , gerechnet aus Gleichung (16), M^2 ein Minimum wird.

Werden die im Kapitel 2.3 erarbeiteten Werte

$$\frac{1}{r} = 16 \cdot 10^{-8}$$

$$m_{\Delta k} = \pm 0,5$$

$$m_z = 7,9 \cdot 10^{-6}$$

$$m_s = \pm 0,01$$

in Gleichung (16) eingesetzt, so ergibt sich damit die Gleichung (17).

$$64 \cdot 10^{-18} \cdot n^2 \cdot \bar{s}^6 - (64 \cdot 10^{-6} \cdot H^2 - 62 \cdot n^2) 10^{-12} \cdot \bar{s}^4 - 2 \cdot 10^{-4} \cdot H^2 = 0 \dots (17)$$

Die numerische Berechnung der Lösungen der Gleichung (17) wurde mittels einer Iterationsmethode ausgeführt und die Lösungen \bar{s} sind in Abb. 3 in Abhängigkeit von H für $n = 2, 4, 6, 8, 10$ und 12 dargestellt.

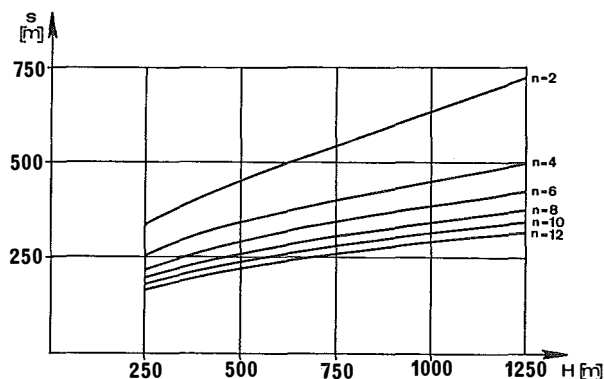


Abb. 3

Für einen gegebenen Gesamthöhenunterschied H und eine gewählte Unterteilungszahl n , die sich vor allem durch die topographischen Umstände und die Hangneigung (\bar{s} muß größer als die entsprechende Falllinienstrecke sein) ergeben wird, findet man in Abb. 3 jenes \bar{s} , bei dessen Verwendung dann der mittlere zufällige Fehler der Gesamthöhendifferenz ein Minimum wird. Sowohl die Fehler der An- und Abschlußmessungen als auch die Zwangszentrierungsfehler können gegenüber den Fehlern des trigonometrischen Nivellements so klein gehalten werden, daß man sie bei Fehlerabschätzungen nicht weiter zu berücksichtigen braucht. Der mittlere Gesamtfehler des trigonometrischen Nivellements kann daher nach Gleichung (15) unter Verwendung der \bar{s} aus Abb. 3 errechnet werden und ist in Abb. 4 in Abhängigkeit von der Gesamthöhe H bei einer Unterteilung in 2 und 12 Abschnitte dargestellt.

Untersucht man die Abhängigkeit des mittleren Fehlers der gesuchten Höhendifferenz von der Unterteilungszahl n , so kann im allgemeinen gesagt werden, daß der mittlere zufällige Fehler M des Gesamthöhenunterschiedes relativ unabhängig von der Wahl der Unterteilungszahl n ist, sofern die optimale Seitenlänge \bar{s} nach Abb. 3 gewählt wird. Die Erkenntnis, daß eine Erhöhung der Unterteilungszahl keine beachtenswerte Genauigkeitssteigerung bringt, unterstreicht besonders die Wirtschaftlichkeit des trigonometrischen Nivellements im Gebirge.

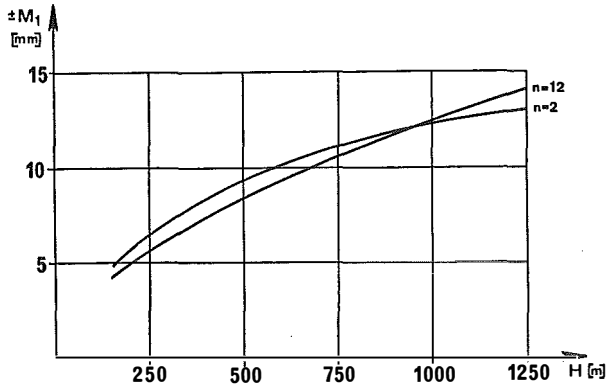


Abb. 4

Dem zufälligen Fehler M , zusammengesetzt aus den zufälligen Beobachtungs- und Refraktionsfehlern, addiert sich noch der systematische Fehler F , verursacht durch die nicht vollständige Erfassung des Lotabweichungseinflusses. F erreicht bei den relativ kurzen Distanzen \bar{s} zwischen den einzelnen Standpunkten (bedingt durch $m_k \Delta = \pm 0,5$) nur sehr kleine Werte. Der Gesamtfehler aus zufälligen und systematischen Fehlern errechnet sich dann nach Gleichung (18) und ist in Abb. 5 als Funktion des Gesamthöhenunterschiedes für $n = 4$ dargestellt.

$$M_T = \sqrt{M^2 + F^2} \quad \dots (18)$$

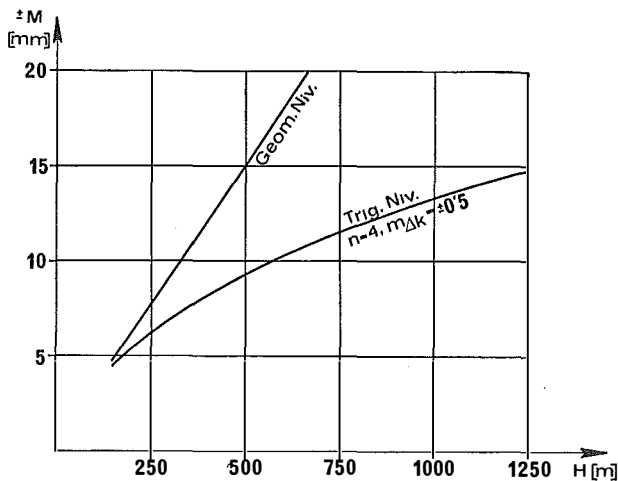


Abb. 5

3. Geometrisches Nivellement

Das geometrische Präzisionsnivellement, das im allgemeinen für Höhenunterschiedsmessungen benützt wird, liefert sofort die gewünschten unreduzierten Nivellementhöhendifferenzen. Die Fehler des geometrischen Präzisionsnivellements sind äußerst gering und werden als mittlere Fehler pro Kilometer ($\pm 0,4$ mm pro 1 km erreichbar) angegeben. Doch sind diese zu erwartenden Fehler für geringe

Höhenunterschiede bei langen Nivellementwegen gedacht. Bei großen Höhenunterschieden dagegen können diese Fehler ganz beträchtliche Werte erreichen, da die systematischen Fehler vorwiegend proportional zum Höhenunterschied eingehen.

Die Unsicherheit des geometrischen Nivellements wächst bei stärker geneigtem Meßprofil wegen der unsymmetrischen Refraktionseinflüsse im Vor- und Rückblick erheblich. Die dadurch entstehenden Höhenfehler kommen in den Schleifenschlüssen nur im geringen Maße zum Ausdruck. Dieser systematische Fehler durch die nivelitische Refraktion darf nach den Untersuchungen [3] und [8] mit durchschnittlich $- (0,06 \text{ bis } 0,10)$ mm pro 1 m Höhendifferenz bei Visurlängen von 50 m angenommen werden. Zwar kann dieser Einfluß mit Hilfe von vertikalen Temperaturgradientenmessungen rechnerisch erfaßt werden, doch sind diese Methoden im Hochgebirge, wo selbst schon das Nivellement schwierig genug auszuführen ist, nach dem Wissen des Verfassers noch nie angewendet worden. Vernachlässigt man die anderen systematischen Fehler des geometrischen Nivellements (Erdkrümmung, Einsinken von Instrument und Latte während der Messung, persönliche Fehler des Beobachters, mangelhafte Lotrechtstellung, so kann man das Quadrat des mittleren systematischen Fehlers eines Höhenunterschiedes mit

$$M_s^2 = 0,032 \cdot H^2_{[m]} \quad \text{in [mm}^2] \quad \dots (19)$$

angeben. Der Wert $- 0,03$ wurde wegen der kleineren Visurlängen (sicher kleiner als 50 m im Hochgebirge) nur mit der Hälfte des Wertes von *Brocks* [3] geschätzt, was voll durch die Untersuchungen von *Behrendt* [2] bestätigt wird.

Die rein zufälligen Nivellementfehler (zufällige Fehler der Lattenteilung, Ablesefehler an der Latte, Fehler der Horizontierung) wirken pro Beobachtung. Pro Standpunkt kann mit den 3 m langen Invarband-Nivellierlatten, wenn man die einfachsten Beobachtungsvorschriften beachtet, ein durchschnittlicher Höhengewinn von 2 m erreicht werden. Wird der mittlere zufällige Fehler pro Zielung überschlägig mit $\pm 0,1$ mm geschätzt, so findet man das Quadrat des zufälligen Fehlers eines Höhenunterschiedes H mit:

$$M_z^2 = 0,12 \cdot H_{[m]} \quad \text{in [mm}^2]. \quad \dots (20)$$

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz von systematischen und zufälligen Fehlern ergibt sich das Quadrat des mittleren Gesamtfehlers M_G^2 des geometrischen Nivellements mit:

$$M_G^2 = M_s^2 + M_z^2 = H (0,032 \cdot H + 0,12) \doteq 0,032 \cdot H^2_{[m]} \quad \text{in [mm}^2]. \quad \dots (21)$$

Gleichung (21) zeigt sehr eindringlich, daß die Refraktion im geometrischen Nivellement bei geneigtem Meßprofil den ermittelten Höhenunterschied beträchtlich, und zwar proportional zum Höhenunterschied, verfälscht.

4. Vergleich der Gesamtfehler und abschließende Bemerkungen

Wird das trigonometrische Nivellement zur Hanghöhenmessung angewendet, so wird es in seiner Meßanlage wieder variabel, wenn man aus der Fallinie des Hanges mit den Messungen abweicht. Das einfachste Modell eines Hanges stellt die schiefe Ebene dar. Für diesen Modellfall werden Genauigkeitsberechnungen durchgeführt, um dadurch Hinweise für die praktische Ausführung des trigonometrischen Nivelle-

ments zu bekommen. Man sucht daher das Minimum des zufälligen Fehlers eines Gesamthöhenunterschiedes in Funktion von der Seitenlänge und der Unterteilungszahl. Für einen gegebenen Gesamthöhenunterschied und bei gewählter Unterteilungszahl wird die optimale Seitenlänge, bei der dann der Gesamtfehler ein Minimum wird, aus Abb. 3 gewählt. Den zu erwartenden zufälligen Fehler der Gesamthöhendifferenz zeigt Abb. 4 (mittlerer Fehler der Zenitdistanzbeobachtung $m_z = \pm 5''$, mittlerer Fehler der Entfernungsmessung ± 10 mm, mittlerer Fehler der Refraktionsungleichheit $m_{\Delta k} = \pm 0,5$). Die Wirtschaftlichkeit der Methode wird dadurch unterstrichen, daß die Wahl der Unterteilungszahl nur geringen Einfluß auf den mittleren Gesamtfehler des Höhenunterschiedes hat. Wird diesem zufälligen Fehler noch der systematische Fehler der Nichterfassung der Lotabweichungseinflüsse überlagert, so ergibt sich schließlich der Fehler des gesamten Höhenunterschiedes nach Abb. 5. Zum Vergleich ist in Abb. 5 auch der tatsächliche Fehler des geometrischen Nivellements dargestellt, hauptsächlich durch den systematischen Fehler der unsymmetrischen Strahlenbrechung hervorgerufen. Man sieht aus Abb. 5 sofort, daß schon ab rund 150 m Gesamthöhenunterschied das trigonometrische Nivellement dem geometrischen Nivellement genauigkeitsmäßig überlegen ist. Vor allem aber überzeugt die Überlegenheit des trigonometrischen Nivellements im Hinblick auf den nötigen Arbeitsaufwand im Vergleich zum geometrischen Nivellement. Von jedem Praktiker wird nur zu gern bestätigt werden, daß es auf einem steilen Berghang leichter sein wird, über 4 Punkte ein trigonometrisches Nivellement zu messen als eine Höhengschleife zu nivellieren. Selbstverständlich muß das trigonometrische Nivellement nach den speziellen topographischen Eigenschaften des jeweiligen Hanges angelegt werden, doch sollten die theoretisch erarbeiteten Richtlinien soweit als möglich eingehalten werden, um die errechneten Genauigkeiten erreichen zu können.

Ein paar Worte zur Anwendung des trigonometrischen Nivellements seien jetzt erlaubt. *Hradilek* [7] hat die Übertragung von Talhöhen in die Gipfelflur mit elektrooptisch gemessenen Seiten ohne Unterteilung gezeigt, doch ist seine Übertragung auf rein ellipsoidische Höhen beschränkt. Die vorliegende Arbeit zeigt einen Weg, wie Nivellementhöhen mit großer Genauigkeit in die Gipfelflur übertragen werden können, ohne den geometrischen Nivellementhöhencharakter zu verlieren. Höhenreduktionen können beim trigonometrischen Nivellement (schiefe Seite) in analoger Weise zum geometrischen Nivellement auf Grund von Schweremessungen angebracht werden.

Die immer wieder geäußerte Ansicht, daß das geometrische Nivellement der trigonometrischen Höhenmessung auch im Hochgebirge überlegen ist, hat somit ihre Aktualität verloren. Denn mit dem trigonometrischen Nivellement (gemessene schiefe Seite, gegenseitige Zenitdistanzbeobachtung) wurde dem geometrischen Nivellement eine Meßmethode gegenübergestellt, die ebenso geometrische Nivellementhöhen liefert, diesem aber im Gebirge an Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit überlegen ist.

Literatur:

- [1] *Bahnert, G.*: Möglichkeiten und Grenzen der trigonometrischen Höhenmessung. 2. Teil, Arbeiten aus dem Vermessungs- und Kartenwesen der DDR, Band 25, Leipzig 1970.

- [2] *Behrendt, W.*: Ein Beitrag zur Refraktion im Nivellement. Deutsche geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 28, 1958.
- [3] *Brocks, K.*: Meteorologische Hilfsmittel für die geodätische Höhenmessung. Z. f. V., 75 (1950), S. 71–76, 110–116, 145–152.
- [4] *Brunner, F. K.*: Beiträge zum trigonometrischen Nivellement im Gebirge, Dissertation der Fakultät für Naturwissenschaften der Technischen Hochschule Wien, 1972.
- [5] *Brunner, F. K.*: Lotabweichungseinfluß bei der trigonometrischen Höhenmessung mit steilen Visuren. Ö.Z.f.V., 61 (1973), Nr. 4, S. 126–134.
- [6] *Hallermann, L.*: Überblick über die auf dem Markt befindlichen Nahbereichsentfernungsmesser und deren Einsatz bei der Punktaufnahme. AVN, 79 (1972), S. 41–59.
- [7] *Hradilek, L.*: Höhenbestimmung aus elektrooptisch gemessenen Längen. Studia geophysica et geodetica, 2 (1958), S. 206–211.
- [8] *Kukkamäki, T. J.*: Über die Nivellitische Refraktion. Veröff. d. Finn. Geod. Inst. Nr. 25, Helsinki 1938.
- [9] *Niethammer, Th.*: Das astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard — Die berechneten Geoiderhebungen und der Verlauf des Geoidschnittes. Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, 20/II, 1939.
- [10] *Tarczy-Hornoch, A.*: Über die mittleren Fehler des Endpunktes bei offenen Kreiselpolygonzügen. Mitteilungen aus dem Markscheidewesen, 76 (1969), S. 115–121.
- [11] *Tegeler, W.*: Untersuchungen zur Genauigkeit der trigonometrischen Höhenmessung im Flachland und Mittelgebirge. Dissertation; Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover Nr. 45, 1971.

Absolute und relative Genauigkeit beim Messen

Von *Kornelius Peters*, Wien

(Fortsetzung)

2.1.2. Flächenbestimmung

Auf die relativ schwierigen, besonders von *R. Förstner* [9] untersuchten Fehlerformeln für Flächen soll hier nicht eingegangen werden. Man soll jedenfalls auch von aus Koordinaten berechneten Flächen nicht zu viel erwarten.

Stimmen die Maße zwischen Grenzmarken auf ± 10 cm nicht mit den Koordinaten-Sperrmaßen überein, ist die aus Koordinaten gerechnete Fläche eines 50×15 m Bauplatzes unsicher auf $\pm 3,6$ m², d. s. $\pm 5\%$. Hier liegt offenbar eine „Unbestimmtheit der Meßgröße“ vor.

Flächen werden außerhalb des Vermessungswesens sehr häufig benötigt, sei es für Raumplanung, Geographie (Dichteangaben), Wasserbau (Einzugsgebiete) oder für alle Arten der graphischen Integration in Mathematik, Maschinenbau, Physik. Laut [13] S. 120 erreicht man mit den äußerst trivial klingenden Auswiege- bzw. Auszählverfahren bis zu 1%, sicher aber nur bei entsprechend großem Meßwert.

Auch mit Planimetern (Scheibenrollplanimetern) erreicht man diese Genauigkeit. Die Eichfehlergrenzen für Planimeter und auch Stoff- und Ledermeßmaschinen sind jeweils mit 1% festgesetzt ([8], S. 46, 48).