Das Wesen der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn Ausgangsgrößen vorhanden sind

Wladimir K. Hristov [1]

[1] *Bulgarische Akademie der Wissenschaften, Sofia, ul. 7. Noemvri No. 1*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **62** (3), S. 97–110

1974


```
@ARTICLE{Hristov_VGI_197408,
Title = {Das Wesen der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate,
   wenn Ausgangsgr{\"o}{\ss}en vorhanden sind},
Author = {Hristov, Wladimir K.},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {97--110},
Number = {3},
Year = {1974},
Volume = {62}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN UND PHOTOGRAMMETRIE

Herausgegeben vom
Österreichischen Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Offizielles Organ
des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen (Gruppen f. Vermessungswesen)
und der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung

SCHRIFTLEITUNG:
ao. Prof. W. Hofrat i. R. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter
o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hans Schmid
o. Prof. Dr. phil. Wolfgang Pillewizer
o. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Helmut Moritz

Nr. 3 Baden bei Wien, Dezember 1974 62. Jg.

Das Wesen der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn Ausgangsgrößen vorhanden sind

Von *Wladimir K. Hristov*, Sofia

1.

Bei jeder Ausgleichung haben wir unbedingt: 1. *gesuchte Größen*, 2. *beobachtete Größen* und 3. ein *mathematisches Modell*, das die gesuchten Größen mit den beobachteten Größen verbindet, wobei das mathematische Modell unbedingt adäquat sein muß, selbstverständlich in den Grenzen der Genauigkeit, mit der wir ausgleichen.

Das Modell zwischen den gesuchten und den beobachteten Größen kann auch andere Größen enthalten — wir werden sie *parasitische Größen* nennen — z. B. die Parameter in dem Gesetz der systematischen Fehler.

Die gesuchten und die parasitischen Größen zusammen sind unsere *Unbekannten*.

Zuletzt können wir außer den unbekannten und den beobachteten Größen auch *gegebene Ausgangsgrößen* haben, die von einer *vorhergehenden Ausgleichung* erhalten worden sind.

Das Modell, das eine *mathematische Relation* ist, wird in der Regel *linearisiert*, so daß wir im folgenden nur lineare Relationen haben.

2.

Die Ausgleichung wird in *zwei* große Gruppen eingeteilt, die einen wesentlichen Unterschied zeigen:

A. *Ausgleichung ohne gegebene Ausgangsgrößen*,

B. Ausgleichung mit *gegebenen Ausgangsgrößen*.

Die Ausgleichung A ohne gegebene Ausgangsgrößen hat *a priori* sechs verschiedene Arten, die jedoch nur auf *zwei* verschiedene Arten zurückgeführt werden.

A a) *Ausgleichung direkter Beobachtungen*

Die Technik der Ausgleichung ist das verallgemeinerte Mittel.

A b) *Ausgleichung direkter Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten*

Die übliche Technik der Ausgleichung ist Ausgleichung nach Bedingungsgleichungen (Korrelaten). Es ist unrichtig von Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen oder von bedingter Ausgleichung zu sprechen, da solche Ausgleichungen nicht existieren.

A c) *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen*

Ein sehr verbreiteter Fall. Einen Spezialfall haben wir, wenn die Beobachtungsgleichungen nur eine Unbekannte enthalten — nämlich Ausgleichung direkter Beobachtungen, d. h. A a).

A d) *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten*

Verallgemeinerung des Falles A c). Einen Spezialfall haben wir, wenn die Beobachtungsgleichungen in Gruppen eingeteilt werden können, die je eine Unbekannte enthalten — nämlich Ausgleichung direkter Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten, d. h. A b).

A e) *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit mehreren beobachteten Größen*

Hier müssen wir unterstreichen, daß die als Beobachtungen bezeichneten Größen sich in einem Diapason zwischen den *ursprünglichen Beobachtungen* und den *verallgemeinerten Beobachtungen* befinden. Betrachten wir beispielsweise das Messen von Winkeln mit einem Mikroskoptheodolit. Als ursprüngliche Beobachtungen können wir einmal die Koinzidenz des Fadenpaares mit dem zugehörigen Teilstrich auffassen, wir können aber auch durch stufenweise Reduktion und Mittelbildungen auf das arithmetische Mittel des Winkels aus Hin- und Rückgang übergehen, und endlich können wir sogar das arithmetische Mittel aller Messungen des gegebenen Winkels bilden.

Wir führen hier die *verallgemeinerten Beobachtungen*

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = f_{11} l_1 + f_{12} l_2 + \dots + f_{1s} l_s \\ L_2 = f_{21} l_1 + f_{22} l_2 + \dots + f_{2s} l_s \\ \dotfill \\ L_n = f_{n1} l_1 + f_{n2} l_2 + \dots \quad f_{ns} l_s \end{array} \right.$$

und die *verallgemeinerten relativen Verbesserungen*

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} V_1 = f_{11} v_1 + f_{12} v_2 + \dots + f_{1s} v_s \\ V_2 = f_{21} v_1 + f_{22} v_2 + \dots + f_{2s} v_s \\ \dotfill \\ V_n = f_{n1} v_1 + f_{n2} v_2 + \dots + f_{ns} v_s, \end{array} \right.$$

an, wo die Bezeichnungen keiner Erklärung benötigen, und reduzieren den Fall auf Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen

$$[3] \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + \ldots + m_1 t = L_1 + V_1 \\ a_2 x + b_2 y + \ldots + m_2 t = L_2 + V_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y + \ldots + m_n t = L_n + V_n. \end{cases}$$

Af) *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit mehreren beobachteten Größen und mit Bedingungen zwischen den Unbekannten.*

Hier haben wir den Fall der Gleichung [3], wozu wir die Bedingungen

$$[4] \quad \begin{cases} p_1 x + p_2 y + \ldots + p_m t + p_0 = 0 \\ q_1 x + q_2 y + \ldots + q_m t + q_0 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_1 x + z_2 y + \ldots + z_m t + z_0 = 0, \end{cases}$$

hinzufügen, d. h. das Ganze haben wir auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten zurückgeführt.

In der Literatur wird der Fall A e) unrichtig als Ausgleichung bedingter Beobachtungen mit Unbekannten und auch als der allgemeinste Fall bezeichnet, was ebenfalls nicht richtig ist, da dieser nicht den Fall A f) als Spezialfall enthält.

Demnach, wenn Ausgangsgrößen fehlen, haben wir nur die beiden Fälle A c) und Ad), die wir bezeichnen werden mit:

A 1) Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, wenn das Modell die Unbekannten und die beobachteten Größen enthält;

A 2) Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten, wenn das Modell a) die unbekannten und die beobachteten Größen und außerdem b) nur die unbekannten Größen enthält.

3.

Wir gehen zur Betrachtung des Falles B) Ausgleichung mit gegebenen Ausgangsgrößen über, die, wie gesagt wurde, aus vorhergehenden Ausgleichungen herrühren, als Verallgemeinerungen von Fall A) Ausgleichung ohne gegebene Ausgangsgrößen. Es kommen die folgenden vier Fälle vor:

B 1) — wird aus A 1) erhalten, indem die gegebenen Größen hinzugefügt werden;

B 2) — wird aus A 2) erhalten, indem die gegebenen Größen nur zu den Beobachtungsgleichungen hinzugefügt werden;

B 3) — wird aus A 2) erhalten, indem die gegebenen Größen nur zu den Bedingungen hinzugefügt werden;

B 4) — wird aus A 2) erhalten, indem die gegebenen Größen sowohl zu den Beobachtungsgleichungen als auch zu den Bedingungen hinzugefügt werden.

Die möglichen Modellrelationen zwischen den verschiedenen Größen sind nur die obigen sechs Fälle: A 1), A 2), B 1), B 2), B 3) und B 4).

Es muß stark unterstrichen werden, daß gleichwertig der Methode der kleinsten Quadrate, wenn Ausgangsgrößen fehlen — A 1) und A 2) —, die beiden Forderungen sind:

a) die Forderung, daß die Unbekannten unverschobene Abschätzungen haben, was zu unendlich vielen Lösungen führt;

b) die Forderung, daß die Unbekannten nicht nur unverschobene Abschätzungen, sondern auch Abschätzungen mit kleinsten Dispersionen haben, was zu eindeutigen Lösungen führt.

4.

Mögen wir eine Ausgleichung haben, die zu den folgenden Beobachtungsgleichungen mit den entsprechenden Korrelationsmatrizen führt:

$$
\left|\begin{aligned}
&\underset{n.m}{A}\;\underset{m.1}{x} = \underset{n.1}{l'} + \underset{n.1}{v'}\,,\; \underset{n.n}{K_{l'}} \\
&\underset{q.m}{B}\;\underset{m.1}{x} + \underset{q.p}{C}\;\underset{p.1}{y} = \underset{q.1}{l''} + \underset{q.1}{v''}\,,\; \underset{q.q}{K_{l''}}\,.
\end{aligned}\right. \tag{5}
$$

Wir werden die folgenden drei Ausgleichungen betrachten:

A) *Gemeinsame Ausgleichung*

Das System der Normalgleichungen der gemeinsamen Ausgleichung lautet

$$
\left\{\begin{aligned}
&\left(\underset{m.n}{A^*}\;\underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n.m}{A} + \underset{m.q}{B^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.m}{B}\right)\cdot \underset{m.1}{x_A} + \\
&+ \underset{m.q}{B^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.p}{C}\;\underset{p.1}{y_A} = \underset{m.n}{A^*}\;\underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n.1}{l'} + \underset{m.q}{B^*}\;\underset{q.q}{K_{l'}}\;\underset{q.1}{l''} \\
&\underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.m}{B}\,.\,\underset{m.1}{x_A} + \underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.p}{C}\,.\,\underset{p.1}{y_A} = \\
&= \underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.1}{l''}\,.
\end{aligned}\right. \tag{6}
$$

Die Lösung führt zu

$$
\left\{\begin{aligned}
&\Big[\underset{m.n}{A^*}\;\underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n.m}{A} + \underset{m.q}{B^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.m}{B} - \underset{m.q}{B^*}\;\underset{q.q}{K_{l}^{-1}}\;\underset{q.p}{C}\,. \\
&.\left(\underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.p}{C}\right)^{-1}\underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.m}{B}\Big]\,.\,\underset{m.1}{x_A} = \\
&= \underset{m.n}{A^*}\;\underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n.1}{l'} + \underset{m.q}{B^*}\;\underset{q.q}{K_{l'}}\;\underset{q.1}{l''} - \\
&- \underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.m}{B}\left(\underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.p}{C}\right)^{-1}\underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.1}{l''}
\end{aligned}\right. \tag{7}
$$

$$
\left\{\begin{aligned}
&\Big[\underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.p}{C} - \underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.m}{B}\Big(\underset{m.n}{A^*}\;\underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n.m}{A} + \\
&+ \underset{m.q}{B^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.m}{B}\Big)^{-1}\underset{m.q}{B^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.p}{C}\Big]\,.\,\underset{p.1}{y_A} = \underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.1}{l''} - \\
&- \underset{p.q}{C^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.m}{B}\left(\underset{m.n}{A^*}\;\underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n.m}{A} + \underset{m.q}{B^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.m}{B}\right)^{-1}. \\
&.\left(\underset{m.n}{A^*}\;\underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n.1}{l'} + \underset{m.q}{B^*}\;\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q.1}{l''}\right).
\end{aligned}\right. \tag{8}
$$

B. *Ausgleichung nach Ordnungen*

Die Ausgleichung nach Ordnungen widerspricht dem Geiste der Methode der kleinsten Quadrate. Sie ist aber praktisch notwendig.

Ausgleichung der ersten Ordnung

Als erste Ordnung werden wir die erste Gruppe der Beobachtungsgleichungen [5] betrachten.

[9] $$\underset{n\,.\,m}{A}\ \underset{m\,.\,1}{x_B} = \underset{n\,.\,1}{l'} + \underset{n\,.\,1}{v'_B},\qquad \underset{n\,.\,n}{K_{l'}}\ .$$

Das System der Normalgleichungen ist

[10] $$\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\ \underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n\,.\,m}{A}\right) . \underset{m\,.\,1}{x_B} = \underset{m\,.\,n}{A^*}\ \underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n\,.\,1}{l'}$$

mit der Lösung

[11] $$\underset{m\,.\,1}{x_B} = \left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\ \underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n\,.\,m}{A}\right)^{-1} \underset{m\,.\,n}{A^*}\ \underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n\,.\,1}{l'}\ ,$$

die natürlich von [7] verschieden ist.

Ausgleichung der zweiten Ordnung

Wir setzen [11] in die zweite Gruppe Beobachtungsgleichungen [5] und erhalten mit modifizierten Absolutgliedern

[12] $$\underset{q\,.\,p}{C}\ \underset{p\,.\,1}{y_B} = \left(\underset{q\,.\,1}{l''} - \underset{q\,.\,m}{B}\ \underset{m\,.\,1}{x_B}\right) + \underset{q\,.\,1}{v''_B}.$$

Die Werte dieser Absolutglieder können auch unmittelbar erhalten werden, wenn sie, nachdem die Ausgleichung der ersten Gruppe Beobachtungsgleichungen durchgeführt worden ist, berechnet werden.

Ausgleichung der zweiten Ordnung nach der klassischen Weise.

Die Ausgleichung der zweiten Ordnung nach der klassischen Weise geschieht nach [12] mit Korrelationsmatrix *nur* für l''

[13] $$\underset{q\,.\,p}{C}\ \underset{p\,.\,1}{y_B} = \left(\underset{q\,.\,1}{l''} - \underset{q\,.\,m}{B}\ \underset{m\,.\,1}{x_B}\right) + \underset{q\,.\,1}{v''_B}.\qquad \underset{q\,.\,q}{K_{l''}}.$$

Demnach lautet die Normalgleichung

[14] $$\left(\underset{p\,.\,q}{C^*}\ \underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q\,.\,p}{C}\right) . \underset{p\,.\,1}{y_B} = \underset{p\,.\,q}{C^*}\ \underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}} \left(\underset{q\,.\,1}{l''} - \underset{q\,.\,m}{B}\ \underset{m\,.\,1}{x_B}\right)$$

mit der Lösung

[15] $$\underset{p\,.\,1}{y_B} = \left(\underset{p\,.\,q}{C^*}\ \underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q\,.\,p}{C}\right)^{-1} \underset{p\,.\,q}{C^*}\ \underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}} \left(\underset{q\,.\,1}{l''} - \underset{q\,.\,m}{B}\ \underset{m\,.\,1}{x_B}\right),$$

die zweifelsohne verschieden von [8], d. h. von jenen Werten ist, die man nach der gemeinsamen Ausgleichung erhält und die mit minimalen Dispersionen verbunden sind. Außerdem haben die nach der klassischen Weise erhaltenen mittleren Fehler keinen Sinn.

Ausgleichung der zweiten Ordnung nach der vom Verfasser vorgeschlagenen richtigen Art

Die Gründe, weshalb die Ausgleichung nach der vom Verfasser vorgeschlagenen Art richtig genannt wird, sind aus dem folgenden zu ersehen.

Wir gehen *ebenfalls* von den Beobachtungsgleichungen [13] aus, jedoch mit einer Korrelationsmatrix, die sich auf die *vollständigen* Absolutglieder bezieht:

[16]
$$\underset{q\,.\,p}{C}\;\underset{p\,.\,1}{y_{B1}} = \left(\underset{q\,.\,1}{l''} - \underset{q\,.\,m}{B}\;\underset{m\,.\,1}{x_B}\right) + \underset{q\,.\,1}{v''_{B1}}$$

mit

[17]
$$\underset{q\,.\,q}{K_{(l''-Bx_B)}} = \underset{q\,.\,q}{K_{l''}} + \underset{q\,.\,m}{B}\;\underset{m\,.\,m}{K_{x_B}}\;\underset{m\,.\,q}{B^*} =$$
$$= \underset{q\,.\,q}{K_{l''}} + \underset{q\,.\,m}{B}\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\;\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n\,.\,m}{A}\right)^{-1}\underset{m\,.\,n}{A^*}\;\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\,.\,\underset{n\,.\,n}{K_{l'}}\,.\,\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\,.$$
$$.\,\underset{n\,.\,m}{A}\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\;\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n\,.\,m}{A}\right)^{-1}\underset{m\,.\,q}{B^*} = \underset{q\,.\,q}{K_{l''}} + \underset{q\,.\,m}{B}\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\;\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n\,.\,m}{A}\right)^{-1}\underset{m\,.\,q}{B^*},$$

wobei wir [11] benutzt haben.

Demnach lautet die Normalgleichung

[18]
$$\underset{p\,.\,q}{C^*}\left[\underset{q\,.\,q}{K_{l''}} + \underset{q\,.\,m}{B}\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\;\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n\,.\,m}{A}\right)^{-1}\underset{m\,.\,p}{B^*}\right]^{-1}\underset{q\,.\,p}{C}\,.\,\underset{p\,.\,1}{y_{B1}} =$$
$$= \underset{p\,.\,q}{C^*}\left[\underset{q\,.\,q}{K_{l'}} + \underset{q\,.\,m}{B}\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\;\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n\,.\,m}{A}\right)^{-1}\underset{m\,.\,p}{B^*}\right]^{-1}.$$
$$.\left[\underset{q\,.\,1}{l''} - \underset{q\,.\,m}{B}\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\;\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n\,.\,m}{A}\right)^{-1}\underset{m\,.\,n}{A^*}\;\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n\,.\,1}{l'}\right],$$

wozu wir ebenfalls [11] benutzt haben.

Nun vergleichen wir die Koeffizienten vor y_A und y_{B1} in [8] und [18]

[19]
$$\left\{\begin{array}{l} \underset{p\,.\,q}{C^*}\left[\underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}} - \underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q\,.\,m}{B}\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\;\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n\,.\,m}{A} + \right.\right. \\ \left.\left. + \underset{m\,.\,q}{B^*}\;\underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}}\;\underset{q\,.\,m}{B}\right)^{-1}\underset{m\,.\,q}{B^*}\;\underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}}\right]\underset{q\,.\,p}{C} \\ \underset{p\,.\,q}{C^*}\left[\underset{q\,.\,q}{K_{l''}} + \underset{q\,.\,m}{B}\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\;\underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\;\underset{n\,.\,m}{A}\right)^{-1}\underset{m\,.\,p}{B^*}\right]^{-1}\underset{q\,.\,p}{C}\,. \end{array}\right.$$

Hier wenden wir auf den zweiten Ausdruck in [19] die allgemeine Formel

[20]
$$\left\{\begin{array}{l} D = E + FGF^* \\ D^{-1} = E^{-1} - E^{-1}F\,(G^{-1} + F^*E^{-1}F)^{-1}F^*E^{-1} \end{array}\right.$$

an — die man durch Ausmultiplizieren verifizieren kann — und erhalten gerade den ersten Ausdruck in [19].

Jetzt vergleichen wir die rechten Seiten von [8] und [18]

$$[21]\quad \begin{cases} \underset{p.q}{C^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.1}{l''} - \underset{p.q}{C^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} + \\ \quad + \underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big)^{-1} \cdot \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.1}{l'} + \underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.1}{l''} \Big) \\ \underset{p.q}{C^*} \Big[\underset{q.q}{K_{l''}} + \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} \Big)^{-1} \underset{m.p}{B^*} \Big]^{-1} \cdot \\ \quad \cdot \Big[\underset{q.1}{l''} - \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} \Big)^{-1} \underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.1}{l'} \Big]. \end{cases}$$

Hier wenden wir auf den zweiten Ausdruck in [21] die allgemeine Formel [20] an

$$[22]\quad \Big[\underset{q.q}{K_{l''}} + \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} \Big)^{-1} \underset{m.q}{B^*} \Big]^{-1} = \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}} -$$

$$\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} + \underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big)^{-1} \underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}$$

und erhalten

$$[23]\quad \underset{p.q}{C^*} \Big[\underset{q.q}{K_{l''}^{-1}} - \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} +$$

$$\underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big)^{-1} \underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}} \Big] \cdot \Big[\underset{q.1}{l''} -$$

$$- \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} \Big)^{-1} \underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.1}{l'} \Big] =$$

$$= \underset{p.q}{C^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.1}{l''} - \underset{p.q}{C^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} +$$

$$\underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big)^{-1} \underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.1}{l''} -$$

$$- \underset{p.q}{C^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} \Big)^{-1} \underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.1}{l'} +$$

$$+ \underset{p.q}{C^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} +$$

$$+ \underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big)^{-1} \underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} \Big)^{-1} \underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{n.1}{l'} =$$

$$= \underset{p.q}{C^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.1}{l''} - \underset{p.q}{C^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} +$$

$$+ \underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big)^{-1} \cdot \Big[\underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.1}{l''} + \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} +$$

$$+ \underset{m.q}{B^*}\ \underset{q.q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q.m}{B} \Big) \Big(\underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.m}{A} \Big)^{-1} \underset{m.n}{A^*}\ \underset{n.n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n.1}{l'} -$$

$$- \underset{m\,.\,q}{B^*}\ \underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q\,.\,m}{B}\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\ \underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n\,.\,m}{A}\right)^{-1}\underset{m\,.\,n}{A^*}\ \underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n\,.\,1}{l'}\Big] =$$

$$= \underset{p\,.\,q}{C^*}\ \underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q\,.\,1}{l''} -$$

$$- \underset{p\,.\,q}{C^*}\ \underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q\,.\,m}{B}\left(\underset{m\,.\,n}{A^*}\ \underset{n\,.\,n}{K_{l}^{-1}}\ \underset{n\,.\,m}{A} + \underset{m\,.\,q}{B^*}\ \underset{q\,.\,q}{K_{l''}^{-1}}\ \underset{q\,.\,m}{B}\right)^{-1} .$$

$$.\left(\underset{m\,.\,q}{B^*}\ \underset{q\,.\,q}{K_{l''}}\ \underset{q\,.\,1}{l''} + \underset{m\,.\,n}{A^*}\ \underset{n\,.\,n}{K_{l'}^{-1}}\ \underset{n\,.\,1}{l'}\right).$$

Daraus ersieht man, daß

$$y_{B1} = y_A \tag{24}$$

ist, d. h. die Ausgleichung der zweiten Ordnung, obwohl die Ausgleichung der ersten Ordnung schon *fixiert* ist, gibt uns jene Werte, die wir bei der *gemeinsamen Ausgleichung* erhalten würden, weshalb wir nämlich diese Art der Ausgleichung *die richtige Art* genannt haben.

Beim Fall B1), wo wir eine Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Ausgangsgrößen haben, die aus einer vorherigen Ausgleichung herrühren, erscheinen demnach die Unbekannten mit *minimalen Dispersionen*, sofern man die Ausgleichung nach der richtigen Art durchgeführt hat.

5.

Es ist nicht schwer zu beweisen, daß es auch beim Fall B2), wo wir eine Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten haben, wenn in den Bedingungen die gegebenen Größen *nicht auftreten*, möglich ist, die Unbekannten mit den kleinsten Dispersionen zu erhalten.

Ganz anders ist die Lage bei einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten, wenn in den Bedingungen gegebene Größen *auftreten;* dann ist es nicht möglich, *alle* Unbekannten mit den kleinsten Dispersionen zu erhalten.

In der Tat mögen wir eine Ausgleichung mit den folgenden Beobachtungsgleichungen und den folgenden Bedingungen haben

$$\left|\begin{array}{lllllll}
\underset{n\,.\,m}{A} & \underset{m\,.\,1}{x} & & & = \underset{n\,.\,1}{l'} & + \underset{n\,.\,1}{v'}\,, & \underset{n\,.\,n}{K_{l'}} \\[2ex]
\underset{q\,.\,m}{B} & \underset{m\,.\,1}{x} & + \underset{q\,.\,p}{C} & \underset{p\,.\,1}{y} & = \underset{q\,.\,1}{l''} & + \underset{q\,.\,1}{v''}\,, & \underset{q\,.\,q}{K_{l''}} \\[2ex]
\underset{z\,.\,m}{D^*} & \underset{m\,.\,1}{x} & + \underset{z\,.\,p}{E^*} & \underset{p\,.\,1}{y} & + \underset{z\,.\,1}{c} & \underset{z\,.\,1}{= 0.} &
\end{array}\right. \tag{25}$$

Die gemeinsame Ausgleichung führt zu den Größen x und y mit kleinsten Dispersionen.

Wir haben die Ausgleichung der *ersten Ordnung* durchgeführt

$$[26]\qquad \underset{m\,.\,n}{A}\ \underset{n\,.\,m}{K_{l'}}\ \underset{n\,.\,m}{A}\ .\ \underset{m\,.\,1}{x_B} = \underset{m\,.\,1}{A^*}\ \underset{n\,.\,n}{K_{l'}}\ \underset{n\,.\,1}{l'}$$

und x_B erhalten.

Wir gehen zu der Ausgleichung der *zweiten Ordnung über*

$$[27]\qquad \begin{cases} \underset{q\,.\,p}{C}\ \underset{p\,.\,1}{y_{B4}} = \left(\underset{q\,.\,1}{l''} - \underset{q\,.\,m}{B}\ \underset{m\,.\,1}{x_B}\right) + \underset{q\,.\,1}{v''_{B4}} \\ \underset{z\,.\,p}{E^*}\ \underset{p\,.\,1}{y_{B4}} + \left(\underset{z\,.\,1}{c} + \underset{z\,.\,m}{D^*}\ \underset{m\,.\,1}{x_B}\right) = \underset{z\,.\,1}{0}\ . \end{cases}$$

Hier kann man auf keinen Fall y_{B4} gleich y_A erhalten, d. h. gleich den gemeinsam ausgeglichenen Werten, da, solange bei der gemeinsamen Ausgleichung die *Gleichheit*

$$[28]\qquad \underset{z\,.\,p}{E^*}\ \underset{p\,.\,1}{y_A} + \left(\underset{z\,.\,1}{c} + \underset{z\,.\,m}{D^*}\ \underset{m\,.\,1}{x_A}\right) = \underset{z\,.\,1}{0}$$

gilt, wir dagegen bei der Ausgleichung der zweiten Ordnung auf die *Ungleichheit*

$$[29]\qquad \underset{z\,.\,p}{E^*}\ \underset{p\,.\,1}{y_A} + \left(\underset{z\,.\,1}{c} + \underset{z\,.\,m}{D^*}\ \underset{m\,.\,1}{x_B}\right) \neq \underset{z\,.\,1}{0}$$

stoßen, wenn $D^* \neq 0$.

Die Ursache der obigen Ungleichheit liegt in dem Umstand, daß wir in der ersten Gleichung [27] die Verbesserungen v'' haben, die die *Diskrepanzen* zwischen den Ergebnissen der Ausgleichung der ersten Ordnung x_B und der Ausgleichung der zweiten Ordnung y_A tilgen

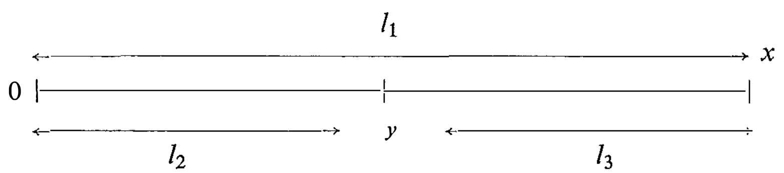
$$[30]\qquad \underset{q\,.\,p}{C}\ \underset{p\,.\,1}{y_A} = \left(\underset{q\,.\,1}{l''} - \underset{q\,.\,m}{B}\ \underset{m\,.\,1}{x_B}\right) + \underset{q\,.\,1}{v''}\ .$$

In [28] und [29] haben wir dagegen keine solchen Verbesserungen und wenn x_B das Ergebnis nur der Ausgleichung der ersten Ordnung ist, kann uns die Ausgleichung der zweiten Ordnung *nicht* zu einem Ergebnis führen, das identisch mit dem Ergebnis der gemeinsamen Ausgleichung y_A ist.

Demnach besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den Ausgleichungen B1), B2) einerseits und den Ausgleichungen B3), B4) andererseits. Im ersten Fall B1), B2) ist es möglich zu einer Lösung der Ausgleichung der zweiten Ordnung zu gelangen, die identisch *mit der gemeinsamen Ausgleichung* ist; im zweiten, B3), B4), ist *dies nicht möglich*, außer mit ausgewählten Unbekannten. Wenn wir alle Unbekannten gleichartig behandeln wollen, so sind wir gezwungen, bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate von der Forderung kleinster Dispersionen abzusehen

6.

Beispiele zur Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen



Es sei für einen Punkt die Abszisse x mittels der Länge l_1 mit einem mittleren Fehler m_1 gemessen, worauf man die Abszisse y eines Zwischenpunktes ableiten will, und zwar aus Messungen direkt mittels der Länge l_2 mit dem mittleren Fehler m_2 und indirekt mittels der Länge l_3 mit dem mittleren Fehler m_3.

A. *Gemeinsame Ausgleichung*

Die Beobachtungsgleichungen mit den betreffenden Gewichten sind

$$\begin{cases} x_A = l_1 + v_1, & \dfrac{1}{m_1^2} \\ y_A = l_2 + v_2, & \dfrac{1}{m_2^2} \\ x_A - y_A = l_3 + v_3, & \dfrac{1}{m_3^2} \end{cases}$$

Die Normalgleichungen sind

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{m_1^2} + \dfrac{1}{m_3^2}\right) x_A - \dfrac{1}{m_3^2}\, y_A = \left(\dfrac{1}{m_1^2}\, l_1 + \dfrac{1}{m_3^2}\, l_3\right) \\ -\dfrac{1}{m_3^2}\, x_A + \left(\dfrac{1}{m_2^2} - \dfrac{1}{m_3^2}\right) y_A = \left(\dfrac{1}{m_2^2}\, l_2 - \dfrac{1}{m_3^2}\, l_3\right). \end{cases}$$

Ihre Lösung ist

$$\begin{cases} x_A = l_1 - \dfrac{m_1^2}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}(l_1 - l_2 - l_3) \\ y_A = l_2 + \dfrac{m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}(l_1 - l_2 - l_3) \end{cases}$$

mit den betreffenden mittleren Fehlern

$$\begin{cases} m_{x_A}{}^2 = \dfrac{m_1^2\,(m_2^2 + m_3^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \\ m_{y_A}{}^2 = \dfrac{m_2^2\,(m_1^2 + m_3^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} \end{cases}$$

B. *Ausgleichung der zweiten Ordnung nach der klassischen Art*

Wir gleichen die Abszisse des zweiten Punktes aus, wobei wir die Abszisse des ersten Punktes *fixiert* haben.

Die Beobachtungsgleichungen lauten:

$$\begin{cases} y_B = l_2 + v_B', & \dfrac{1}{m_2^2} \\ y_B = l_1 - l_3 + v_B'', & \dfrac{1}{m_1^2}\,. \end{cases}$$

Hier werden wir die Größe aus den Beobachtungen der ersten Ordnung $x_A = l_3$ als *fehlerlos* betrachten.

Die Normalgleichung lautet

$$\left(\frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_1^2}\right) y_B = \frac{1}{m_2^2} l_2 + \frac{1}{m_1^2} (l_1 - l_3).$$

Ihre Lösung ist

$$y_B = l_2 + \frac{m_2^2}{m_1^2 + m_2^2} (l_1 - l_2 - l_3)$$

mit dem wirklichen (nicht fiktiven) mittleren Fehler

$$m_{yB}^2 = \frac{m_2^4\, m_1^2}{(m_1^2 + m_2^2)^2} + \frac{m_1^4\, m_2^2}{(m_1^2 + m_2^2)^2} + \frac{m_2^4\, m_3^2}{(m_1^2 + m_2^2)^2} =$$
$$= \frac{m_2^2\,(m_1^2 m_1^2 + m_1^2 m_2^2 + m_2^2 m_3^2)}{(m_1^2 + m_2^2)^2}.$$

B1. *Ausgleichung der zweiten Ordnung nach der richtigen Weise*

Wir gleichen nur die Abszisse des zweiten Punktes aus, wobei wir die Abszisse des ersten Punktes festhalten.

Die Beobachtungsgleichungen lauten

$$\left\{\begin{array}{ll} y_{B1} = l_2 + v_{B1}, & \dfrac{1}{m_2^2} \\[2ex] y_{B1} = l_1 - l_3 + v_{B1}'', & \dfrac{1}{\dfrac{1}{m_1^2} + \dfrac{1}{m_3^2}}. \end{array}\right.$$

Hier betrachten wir die Größe $x_A = l_1$ aus den Beobachtungen der ersten Ordnung *behaftet mit Fehlern.*

Die Normalgleichung lautet

$$\left(\frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{\dfrac{1}{m_1^2} + \dfrac{1}{m_3^2}}\right) y_{B1} = \frac{1}{m_2^2} l_2 + \frac{1}{m_1^2 + m_3^2} (l_1 + l_3).$$

Ihre Lösung ist

$$y_{B1} = l_2 + \frac{m_2^2}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} (l_1 - l_2 - l_3)$$

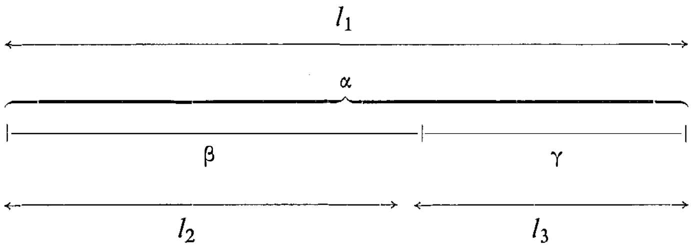
mit dem mittleren Fehler

$$m_{yB1}^2 = \frac{m_2^2\,(m_1^2 + m_3^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}.$$

Wie wir sehen, ist das Ergebnis nach der vorgeschlagenen Weise wie bei der *gemeinsamen Ausgleichung*, obwohl der erste Punkt fixiert wurde.

7.

Beispiele von Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten



Es sei eine Länge α gemessen durch l_1 mit dem mittleren Fehler m_1. Diese Länge ist eingeteilt in zwei Teile β und γ:

$$\beta + \gamma = \alpha,$$

gemessene Größen sind l_2 und l_3 mit den entsprechenden mittleren Fehlern m_2 und m_3.

A. *Gemeinsame Ausgleichung*

Die Beobachtungsgleichungen mit den entsprechenden Gewichten lauten

$$\left\{\begin{aligned} \beta_A + \gamma_A &= l_1 + v_A', \quad \frac{1}{m_1^2} \\ \beta_A \qquad &= l_2 + v_A'', \quad \frac{1}{m_2^2} \\ \gamma_A &= l_3 + v_A''', \quad \frac{1}{m_3^2}\,. \end{aligned}\right.$$

Die Normalgleichungen lauten

$$\left|\begin{aligned} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}\right)\beta_A + \frac{1}{m_1^2}\gamma_A &= \left(\frac{1}{m_1^2}l_1 + \frac{1}{m_2^2}l_2\right) \\ \frac{1}{m_1^2}\beta_A + \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_3^2}\right)\gamma_A &= \left(\frac{1}{m_1^2}l_1 + \frac{1}{m_3^2}l_3\right). \end{aligned}\right.$$

Ihre Lösungen sind

$$\beta_A = l_2 + \frac{m_2^2\,(l_1 - l_2 - l_3)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$$

$$\gamma_A = l_3 + \frac{m_3^2\,(l_1 - l_2 - l_3)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$$

mit den entsprechenden mittleren Fehlern

$$m\beta_A{}^2 = \frac{m_2^2\,(m_1^2 + m_3^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$$

$$m\gamma_A{}^2 = \frac{m_3^2\,(m_1^2 + m_2^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}.$$

Zusammengefaßt geben β_A und γ_A die dritte Unbekannte α_A

$$\alpha_A = \beta_A + \gamma_A = l_1 + \frac{m_1^2}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}(l_2 + l_3 - l_1)$$

mit dem mittleren Fehler

$$m\alpha_A{}^2 = \frac{m_1^2 (m_2^2 + m_3^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}\,.$$

B4. *Ausgleichung mit Zwangsbedingung*

Wir fixieren

$$\alpha_B = l_1.$$

Nun wollen wir so ausgleichen, daß wir

$$\beta_{B4} + \gamma_{B4} = \alpha_B = l_1$$

erhalten

Die Beobachtungsgleichungen samt der Bedingung lauten

$$\left|\begin{array}{l} \beta_{B4} \qquad\qquad - l_2 = v_{B4}{}', \quad \frac{1}{m_2^2} \\ \qquad\quad \gamma_{B4} - l_3 = v_{B4}{}'', \quad \frac{1}{m_3^2} \\ \beta_{B4} + \gamma_{B4} - l_1 = 0. \end{array}\right.$$

Wir bezeichnen mit k_1 die Korrelate. Die Normalgleichungen lauten

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{m_2^2}\beta_{B4} + k_1 - \frac{1}{m_2^2} l_2 = 0 \\ \frac{1}{m_3^2}\gamma_{B4} + k_1 - \frac{1}{m_3^2} l_3 = 0 \\ \qquad \beta_{B4} + \gamma_{B4} - l_1 = 0. \end{array}\right.$$

Ihre Lösung ist

$$\left|\begin{array}{l} \beta_{B4} = l_2 + \frac{m_2^2}{m_2^2 + m_3^2}(l_1 - l_2 - l_3) \\ \gamma_{B4} = l_3 + \frac{m_3^2}{m_2^2 + m_3^2}(l_1 - l_2 - l_3). \end{array}\right.$$

Hier erscheint

$$\beta_{B4} + \gamma_{B4} = l_1$$

genau so wie es die Bedingung verlangt.

Die mittleren Fehler sind

$$\left|\begin{array}{l} m\beta_{B4}{}^2 = \frac{m_2^2 (m_1^2 m_1^2 + m_1^2 m_2^2 + m_2^2 m_3^2)}{(m_2^2 + m_3^2)^2} \\ m\gamma_{B4}{}^2 = \frac{m_3^2 (m_1^2 m_2^2 + m_2^2 m_2^2 + m_2^2 m_3^2)}{(m_2^2 + m_3^2)^2}. \end{array}\right.$$

Wie leicht nachweisbar, gilt

$$\begin{cases} m\beta_{B4}^2 > m\beta_A^2 \\ m\gamma_{B4}^2 > m\gamma_A^2. \end{cases}$$

Folglich kann die Ausgleichung mit Zwangsbedingungen *nicht* zu minimalen Dispersionen führen.

8.

Wir haben hier die Ausgleichung in zwei Ordnungen durchgeführt. Wir wollen annehmen, daß wir eine Ausgleichung in mehreren Ordnungen haben. Es ist klar, daß es bei einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit *Bedingungen*, die gegebene Ausgangsgrößen enthalten, *nicht möglich* ist, die Ergebnisse mit minimalen Dispersionen der Unbekannten zu erhalten.

Wenn wir jedoch eine Ausgleichung nur vermittelnder Beobachtung haben, so ist es bei der Ausgleichung in *mehreren Ordnungen* nicht möglich, a priori zu sagen, was das Ergebnis sein wird. Indem wir die Ordnungen mit römischen Ziffern bezeichnen, erhalten wir die folgenden Fälle bei der Ausgleichung der III. Ordnung: III aus I; III aus II; III aus I und II; bei der Ausgleichung der IV. Ordnung: IV aus I; IV aus II; IV aus III; IV aus I und II; IV aus I und III; IV aus II und III; III aus I, II und III.

Wie man sieht, ist die Theorie der Ausgleichung durchaus nicht erschöpft und es sind noch viele Fälle zu klären.

Eine äußerst wichtige Aufgabe ist die *optimale Verteilung* in Ordnungen: einerseits widerspricht die Aufteilung der Ausgleichung in Ordnungen theoretisch dem Geiste der Methode der kleinsten Quadrate, andrerseits kann man sie aber in der Praxis nicht vermeiden.

Absolute und relative Genauigkeit beim Messen

Von *Kornelius Peters*, Wien

(Schluß)

2.5 *Wärmedaten*

Hier soll nur die eigentliche „Thermometrie" (Temperaturmessung), nicht aber die „Kalorimetrie" (Messung der Wärmemengen in Energie-Einheiten) kurz besprochen werden.

Die Temperatur beeinflußt viele Gebiete der Meßtechnik durch Ausdehnung der Maßverkörperung sowie über Refraktionseinflüsse, weiters auch über alle elektrischen Meßvorrichtungen. Sie muß deshalb in vielen Bereichen nicht nur als Selbstzweck beobachtet werden. Dies gelingt auch punktförmig mit sehr guten Genauigkeiten, leider liegt hier wie bei kaum einer anderen Meßgröße oft weitreichende Unbestimmtheit vor, wie wir sie z. B. bei der Temperaturerfassung von Meßbändern, Basisdrähten, dem Profil elektronischer Distanzmessung u. a. m. kennen.