

Paper-ID: VGI_197411



Beitrag zur analytischen Nahbildmessung

Josef Jahn ¹

¹ *Rechenzentrum der Tierärztlichen Hochschule Wien, A-1030 Wien, Linke Bahngasse 11*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **62** (4), S. 158–169

1974

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Jahn_VGI_197411,  
  Title = {Beitrag zur analytischen Nahbildmessung},  
  Author = {Jahn, Josef},  
  Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {158--169},  
  Number = {4},  
  Year = {1974},  
  Volume = {62}  
}
```



Beitrag zur analytischen Nahbildmessung

Von *Josef Jahn*, Wien

Vorwort

Die vorliegende Arbeit soll eine Möglichkeit aufzeigen, wie man das Problem der Nahbildmessung mit analytischen Methoden lösen kann. Analytische Methoden sind hauptsächlich deshalb von Bedeutung, da sie relativ leicht für den Computereinsatz adaptiert werden können.

An Anwendungsgebieten für die Nahbildmessung bietet sich eine Vielfalt von Möglichkeiten an; um nur einige anzuführen:

- a) Verkehrsunfallsvermessung,
- b) Vermessen von architektonischen Objekten,
- c) Vermessen spannungsoptischer Versuche,
- d) Erkennen von anatomischen Veränderungen und dergleichen mehr.

Abstract

This paper presents a method for the analytical treatment of the problem of "close-range-photogrammetry". Analytical methods are especially suitable because they can be adapted to high-speed computers. This makes this method of "close-range-photogrammetry" applicable in numerous technical and scientific disciplines, for example:

- a. surveying of traffic accidents
- b. architectural photogrammetry
- c. experiments on stress birefringence
- d. diagnostic of anatomical abnormalities.

1. Problemstellung

Gegeben sind ein 3-dimensionales Objekt und mindestens 2 Photographien dieses Objekts. Gesucht sind weitere Objektpunkte aus der Kenntnis der entsprechenden Bildpunkte. Um den Vorgang einer photographischen Abbildung mit möglichst übersichtlichen mathematischen Formeln zu beschreiben, sind wir gezwungen, ein idealisiertes Modell der physikalischen Realität zu verwenden. Es möge daher folgende Korrespondenz bestehen:

Realität	Idealisierung
Linsensystem der verwendeten Kamera mit sämtlichen optischen Fehlern	Exakte Zentralprojektion
Photographie	Exaktes perspektivisches Bild

Weiters soll angenommen werden, daß zu den gegebenen Photos keinerlei weitere Informationen gegeben sind über

- a) die innere Orientierung, d. h. Kammerkonstante c , Lage des Bildhauptpunktes,
- b) die Lage der Kamera in bezug auf das Objekt.

Es mögen also primär, wie wir es kurz nennen mögen, „Amateuraufnahmen“ des Objektes vorliegen.

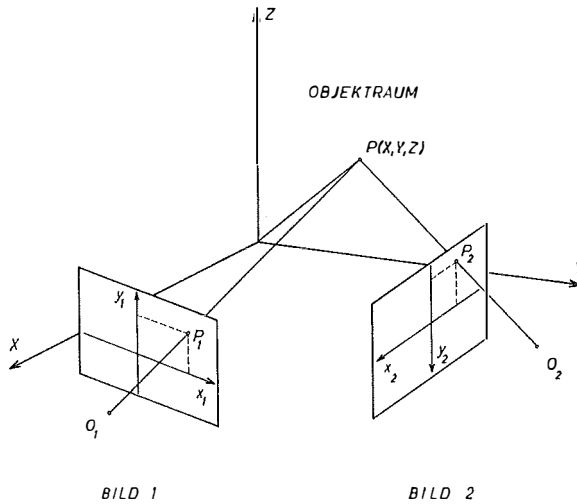


Abb. 1.1

2. Die allgemeine Kollineation im Raum

Zwei zueinander kollineare Punkte $P(X, Y, Z)$ und $\bar{P}(x, y, z)$ sind im 3-dimensionalen Raum durch folgende Transformationsformeln verknüpft

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + a_{14}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}} \\ y &= \frac{a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + a_{24}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}} \quad \dots (2.1) \\ z &= \frac{a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + a_{34}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}} \end{aligned}$$

Damit diese Abbildung umkehrbar eindeutig ist, muß gelten

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \dots (2.2)$$

Verwendet man homogene Koordinaten d. h. $P(X, Y, Z, T)$ und $\bar{P}(x, y, z, t)$, so läßt sich die Abbildungsgleichung (2.1) auch schreiben

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{bmatrix} \quad \dots (2.3)$$

oder kurz in vektorieller Schreibweise

$$x = A \cdot X. \quad \dots (2.4)$$

Die inverse Abbildung lautet dann

$$X = A^{-1} x. \quad \dots (2.5)$$

Damit diese überhaupt existiert, muß A^{-1} existieren und daher $\det(A) \neq 0$ sein, was bereits in (2.2) gefordert wurde.

3. Die Abbildungsgleichungen der Zentralprojektion

$P(X, Y, Z)$ sei ein Raumpunkt und $\bar{P}(x, y)$ der zugehörige Bildpunkt, die Gleichungen der Zentralprojektion lauten dann

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z + b_{14}}{b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + b_{34}} \\ y &= \frac{b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z + b_{24}}{b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + b_{34}} \end{aligned} \quad \dots (3.1)$$

Die b_{ij} sind die Koeffizienten der Transformation; diese 12 Koeffizienten können wieder durch Division auf 11 wesentliche reduziert werden, indem man etwa durch b_{34} dividiert.

Gleichung (3.1) lautet dann

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z + b_{14}}{b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1} \\ y &= \frac{b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z + b_{24}}{b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1} \end{aligned} \quad \dots (3.2)$$

mit $b_{ij} = \frac{b_{ij}}{b_{34}} \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1(1)4$

Man kann zeigen, daß diese 11 wesentlichen Parameter in 3 Matrizen zerlegt werden können und zwar in:

$$\begin{bmatrix} C_x & -eC_y & x_o \\ 0 & C_y & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -X_o \\ 0 & 1 & 0 & -Y_o \\ 0 & 0 & 1 & -Z_o \end{bmatrix}$$

1. Matrix: 5 Parameter der inneren Orientierung:

C_x, C_y sind zwei Kammerkonstante für die Koordinaten x und y ,

x_o, y_o sind die Hauptpunktskoordinaten und

e ist ein Faktor, der die Abweichung von der Orthogonalität in den Bildkoordinatenachsen angibt;

2. Matrix: 3-parametrische orthogonale Matrix,

3. Matrix: 3 Translationsparameter.

Diese Zerlegung ist aber im allgemeinen nicht eindeutig.

Bemerkungen

1. Geometrische Überlegungen zeigen, daß bei der Zentralprojektion jedem Raumpunkt P genau ein Bildpunkt \bar{P} entspricht aber nicht umgekehrt, denn jedem Bildpunkt \bar{P} entsprechen alle ∞^1 Punkte der Geraden $g = O\bar{P}$.

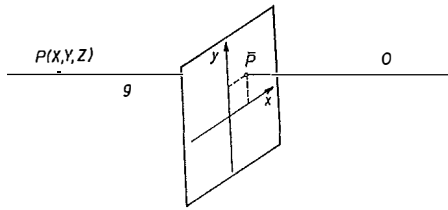


Abb. 3.1

2. Man kann die Gleichungen (3.1) als singulären Sonderfall der Gleichung (2.3) betrachten, indem man in der Matrix A die 3. Zeile der 4. Zeile identisch setzt, was zu $\det(A) = 0$ führt.

Bei Verwendung homogener Koordinaten, also $P(U, V, W, T)$ und $\bar{P}(u, v, t)$, kann man (3.1) schreiben

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad \dots (3.3)$$

oder in Kurzform

$$u = B \cdot U, \quad \dots (3.4)$$

wobei B jetzt keine quadratische Matrix mehr ist. Klarerweise existiert jetzt keine Umkehrabbildung mehr, da B^{-1} nicht existiert, was anschaulich schon vorhin erläutert wurde. Das heißt mit anderen Worten, daß ein 3-dimensionales Objekt nicht aus einem Photo rekonstruiert werden kann.

4. Die verallgemeinerte Inverse einer Matrix

Aus der Definition der Inversen A^{-1} einer Matrix A folgt, daß eine notwendige Bedingung für die Existenz von A^{-1} die ist, daß A quadratisch ist. In der Praxis kommen bei Fehlergleichungssystemen rechteckige Matrizen vor und man überlegt sich, wie man den Prozeß des Invertierens auf solche Matrizen sinnvoll verallgemeinern kann.

Gegeben sei ein überbestimmtes System

$$A \cdot X = B, \quad \dots (4.1)$$

wobei A eine (m, n) -Matrix, $m \geq n$ und $\text{rang}(A) = n$

X eine (n, r) -Matrix
 B eine (m, r) -Matrix $\left. \vphantom{\begin{matrix} X \\ B \end{matrix}} \right\} r \geq 1$ ist.

Symbolisch zeigt dies Abb. 4.1.

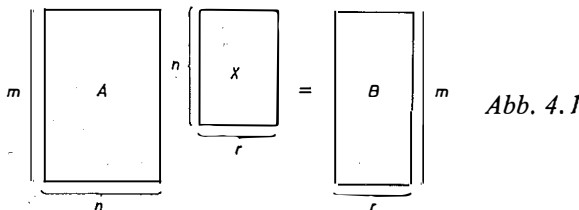


Abb. 4.1

Häufiger Sonderfall $r = 1$, d. h. die Matrix X der Unbekannten degeneriert zum Unbekanntenvektor x der Länge n und die Matrix B der rechten Seiten degeneriert zum Vektor b der Länge m und man hat dann

$$Ax = b, \quad \dots (4.2)$$

Bei Ausgleichung des überbestimmten Systems (4.1) nach der Methode der kleinsten Quadrate erhält man aus (4.1) durch Multiplikation mit A^T

$$A^T A X = A^T B, \quad \dots (4.3)$$

daraus
$$X = (A^T A)^{-1} A^T B. \quad \dots (4.4)$$

Man bezeichnet in diesem Fall mit

$$A^- = (A^T A)^{-1} A^T \quad \dots (4.5)$$

die verallgemeinerte Inverse der (m, n) -Matrix A .

Ist A quadratisch, so sollte, damit die Definition von A^- vernünftig ist, gelten

$$A^- = A^{-1}, \quad \dots (4.6)$$

was auch der Fall ist, denn in diesem Fall gilt

$$A^- = (A^T A)^{-1} A^T = A^{-1} (A^T)^{-1} A^T = A^{-1} I = A^{-1}.$$

Das Konzept der verallgemeinerten Inversen kann auch bei unterbestimmten Systemen Verwendung finden. Es hat nämlich, bei geeigneter Definition, jede beliebige Matrix A (singulär oder nichtsingulär, quadratisch oder nichtquadratisch) eine eindeutig bestimmte verallgemeinerte Inverse A^- .

In unserem Fall wollen wir uns auf überbestimmte Systeme beschränken.

Im folgenden werden zwei Probleme behandelt:

- a) Das Problem der Intersektion,
d. h. gegeben seien die Parameter zweier Bilder und die Bild-Koordinaten entsprechender konjugierter Punkte. Gesucht sind die Koordinaten des Objektpunktes
- b) Das Problem der relativen Orientierung,
d. h. gegeben sind die Koordinaten konjugierter Bildpunkte und gesucht ist die Beziehung zwischen beiden Photos.

5. Das Stereo-Bildpaar

Ein Stereo-Paar besteht aus zwei Photos (Bildern) eines Objektes. Jedes Bild wird durch eine Gleichung der Gestalt (3.3) beschrieben. Die Indizes 1 und 2 bei den Bildkoordinaten u, v, t und bei den Transformationsmatrizen B mögen die Zugehörigkeit zum entsprechenden Bild angeben. Aus (3.3) folgt

für das 1. Bild
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = B_1 \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad \dots (5.1)$$

für das 2. Bild
$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = B_2 \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix}$$

oder kürzer in Vektornotation

$$u^{(1)} = B_1 U \text{ und } u^{(2)} = B_2 U \quad \dots (5.2)$$

Faßt man beide Gleichungen aus (5.1) zu einem System zusammen, so erhält man

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ t_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \text{ oder einfach } \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad \dots (5.3)$$

bzw. vektoriell

$$u = B \cdot U. \quad \dots (5.4)$$

Die Matrix B ist eine (6, 4)-Matrix mit $\text{rang}(B) = 4$; daraus folgt, daß man zu B die verallgemeinerte Inverse B^- konstruieren kann, nämlich

$$B^- = (B^T B)^{-1} B^T \quad \dots (5.5)$$

Bezeichnen wir der Einfachheit halber die Matrix B^- mit $C = (c_{ij})$, $i = 1(1)4$ und $j = 1(1)6$, so gilt

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ t_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ t_2 \end{bmatrix}. \quad \dots (5.6)$$

Kehrt man von den homogenen Koordinaten zu cartesischen zurück mit $t_1 = t_2$ und dividiert man durch die letzte Zeile, so erhält man

$$\begin{aligned} X &= \frac{c_{11}x_1 + c_{12}y_1 + c_{13} + c_{14}x_2 + c_{15}y_2 + c_{16}}{D} \\ Y &= \frac{c_{21}x_1 + c_{22}y_1 + c_{23} + c_{24}x_2 + c_{25}y_2 + c_{26}}{D} \\ Z &= \frac{c_{31}x_1 + c_{32}y_1 + c_{33} + c_{34}x_2 + c_{35}y_2 + c_{36}}{D} \end{aligned} \quad \dots (5.7)$$

mit $D = c_{41}x_1 + c_{42}y_1 + c_{43} + c_{44}x_2 + c_{45}y_2 + c_{46}$.

Die Gleichungen (5.7) sind die Intersektionsgleichungen. Sie stellen eine Transformation des 4-dimensionalen Bildraumes (bestehend aus zwei 2-dimensionalen Bildern) mit den Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 in den 3-dimensionalen Objektraum mit den Koordinaten X, Y, Z dar. Es liegt hier also ein Analogon zu Gleichung (3.1) vor, wo der 3-dimensionale Raum mit Hilfe der Zentralprojektion in die Bildebene (2-dimensional) abgebildet wurde.

6. Verallgemeinerung bei mehreren Photos

Man muß sich nicht unbedingt auf ein Bildpaar beschränken, sondern kann mehrere ($s \geq 2$) Bilder zur Ermittlung des Objektes heranziehen.

Seien etwa s Bilder vorhanden, so erhält man durch Verallgemeinern von (5.1)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = B_1 \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = B_2 \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \\ t_s \end{bmatrix} = B_s \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad \dots \quad (6.1)$$

Zusammenfassen aller Teilbeziehungen ergibt

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ t_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_s \\ v_s \\ t_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ B_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad \dots \quad (6.2)$$

oder wieder vektoriell

$$u = B \cdot U.$$

Man bildet wieder $B^- = (B^T B)^{-1} B^T$ und erhält

$$U = B^- u. \quad \dots \quad (6.3)$$

Bezeichnet man mit $C = (c_{ij})$, $i = 1(1)4$, $j = 1(1)3s$ wieder die allgemeine Inverse B^- so hat C folgende Bauart

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & \dots & c_{1, 3s-2} & c_{1, 3s-1} & c_{1, 3s} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & \dots & c_{2, 3s-2} & c_{2, 3s-1} & c_{2, 3s} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & \dots & c_{3, 3s-2} & c_{3, 3s-1} & c_{3, 3s} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & \dots & c_{4, 3s-2} & c_{4, 3s-1} & c_{4, 3s} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (6.4)$$

Aus (6.4) erhält man wieder die linear gebrochene Form, wenn man $t_1 = t_2 = \dots = t_s$ setzt und dividiert

Die Matrix A ist quadratisch und im allgemeinen nicht singulär. Das System (7.1) zerfällt nun in zwei Systeme

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ t_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} v_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix}. \quad \dots (7.2)$$

Da A regulär ist, existiert A^{-1} und es gilt die Umkehrung

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ t_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad \dots (7.3)$$

Gleichung (7.3), in den zweiten Teil von (7.2) eingesetzt, ergibt

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = DA^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ t_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Mit der Abkürzung $E = (e_{ij}) = DA^{-1}$, $i = 1, 2$, $j = 1(1)4$ erhält man

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ t_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

oder ausführlich

$$\begin{aligned} v_2 &= e_{11}u_1 + e_{12}v_1 + e_{13}t_1 + e_{14}u_2 \\ t_2 &= e_{21}u_1 + e_{22}v_1 + e_{23}t_1 + e_{24}u_2 \end{aligned} \quad \dots (7.4)$$

Keht man von den homogenen Koordinaten zur linear gebrochenen Transformation zurück, indem man $(u, v, t) = (x, y, 1)$ wählt, so gilt

$$y_2 = \frac{e_{11}x_1 + e_{12}y_1 + e_{13} + e_{14}x_2}{e_{21}x_1 + e_{22}y_1 + e_{23} + e_{24}x_2}. \quad \dots (7.5)$$

Gleichung (7.5) stellt den allgemeinen Zusammenhang der relativen Orientierung dar. Die acht Parameter e_{11}, \dots, e_{24} können wieder auf sieben wesentliche reduziert werden. Setzt man Gleichung (7.5) in Gleichung (5.7) ein, so kann dadurch die Singularität von (5.7) eliminiert werden.

Mit anderen Worten heißt das:

Um den Punkt $P(X, Y, Z)$ zu bestimmen, genügt es, $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, \cdot)$ zu messen (also nur 3 der 4 meßbaren Daten), denn die 4. Koordinate y_2 ist abhängig von den ersten drei Koordinaten x_1, y_1, x_2 durch Gleichung (7.5). Ganz analog kann natürlich jede andere Koordinate durch die restlichen drei Koordinaten dargestellt werden. Aus Sicherheits- und Kontrollgründen wird man in der Praxis natürlich alle vier Koordinaten messen und die Genauigkeit über (7.5) kontrollieren.

8. Ermittlung der Transformationskoeffizienten

Bei allen bisherigen Überlegungen wurde stets die Kenntnis der Transformationsparameter b_{11}, \dots, b_{34} für die entsprechenden Bilder vorausgesetzt. Nun soll die Frage behandelt werden, wie man die b_{ij} ermittelt. Mit anderen Worten, gegeben seien zwei (oder mehrere) Bilder beliebiger Art eines Objektes, wieviele Paßpunkte muß man kennen, damit man die b_{ij} berechnen kann. Wir gehen von den Gleichungen (3.2) aus, die folgendermaßen lauten

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z + b_{14}}{b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1}, \\ y &= \frac{b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z + b_{24}}{b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1}. \end{aligned}$$

Daraus sieht man, daß man für jedes Bild 11 Unbekannte b_{11}, \dots, b_{33} hat. Pro Paßpunkt erhält man 2 Gleichungen, woraus folgt, daß man mindestens 6 Paßpunkte benötigt, um die b_{ij} zu bestimmen. Das Gleichungssystem zur Berechnung der b_{ij} erhält man aus obigen Gleichungen, indem man mit dem Nenner multipliziert.

$$\begin{aligned} x(b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1) &= b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z + b_{14} \\ y(b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z + 1) &= b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z + b_{24} \end{aligned} \quad \dots (8.1)$$

Durch Umordnen ergibt sich

$$\begin{aligned} b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z + b_{14} - b_{31}xX - b_{32}xY - b_{33}xZ &= x \\ b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z + b_{24} - b_{31}yX - b_{32}yY - b_{33}yZ &= y \end{aligned} \quad \dots (8.2)$$

In Matrizenform erhält man

$$\begin{bmatrix} X, Y, Z, 1, & 0, 0, 0, & -xX, -xY, -xZ \\ 0, 0, 0, 0, & X, Y, Z, 1, & -yX, -yY, -yZ \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \\ b_{24} \\ b_{31} \\ b_{32} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad \dots (8.3)$$

Ein Paßpunkt liefert 2 Zeilen obiger Matrix; damit das System nicht unterbestimmt ist, brauche ich daher mindestens 11 Zeilen, also 6 Paßpunkte. Ist das System überbestimmt, so gleicht man wieder nach der Methode der kleinsten Quadrate aus.

Hat man nun auf diese Art die Transformationskoeffizienten der beiden Amateurphotos ermittelt, so geht man zur Rekonstruktion des gesuchten Objektes über, wie es in Abschnitt 5 beschrieben wird.

9. Der Einfluß der Fehler

Ausgehend von den Formeln (5.7) wollen wir die Frage untersuchen, wie sich ein Fehler ε in den Bildkoordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 auf die neuzuberechnenden Raumkoordinaten X, Y, Z auswirkt. Wir nehmen dabei an, daß der Fehler bei den Koeffizienten c_{ij} vernachlässigbar bzw. bekannt sei. Das heißt, wir untersuchen nur die Auswirkung eines Fehlers ε beim Messen der Bildkoordinaten. Wie genau die Koeffizienten c_{ij} bekannt sind, hängt natürlich von den verwendeten Paßpunkten und der Kondition der Matrix des Systems (8.3) ab. Eine Fehlerdiskussion in dieser Richtung möge hier nicht erörtert werden.

Allgemein gilt für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$

$$f(x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_n + \varepsilon_n) \cong f(x_1, \dots, x_n) + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \varepsilon_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \varepsilon_n \right] \cdot f \quad \dots (9.1)$$

Spezialfall $n = 4$, also $f = f(x_1, y_1, x_2, y_2)$ und

$\varepsilon_i = \varepsilon, i = 1 (1) 4$ so gilt

$$f(x_1 + \varepsilon, y_1 + \varepsilon, x_2 + \varepsilon, y_2 + \varepsilon) \cong f(x_1, y_1, x_2, y_2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \right] \cdot \varepsilon. \quad \dots (9.2)$$

Dieser Sachverhalt liegt bei uns vor, denn wir haben aus (5.7), mit geeigneten Abkürzungen, die Funktionen

$$\begin{aligned} X &= X(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{K(x_1, y_1, x_2, y_2)}{D(x_1, y_1, x_2, y_2)}, \\ Y &= Y(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{L(x_1, y_1, x_2, y_2)}{D(x_1, y_1, x_2, y_2)}, \\ Z &= Z(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{M(x_1, y_1, x_2, y_2)}{D(x_1, y_1, x_2, y_2)}. \end{aligned} \quad \dots (9.3)$$

Daraus erhält man weiter durch partielle Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x_1} &= \frac{D c_{11} - K c_{41}}{D^2} & \frac{\partial X}{\partial y_1} &= \frac{D c_{12} - K c_{41}}{D^2} \\ \frac{\partial X}{\partial x_2} &= \frac{D c_{14} - K c_{41}}{D^2} & \frac{\partial X}{\partial y_2} &= \frac{D c_{15} - K c_{41}}{D^2} \end{aligned} \quad \dots (9.4)$$

Ganz analog erhält man die partiellen Ableitungen der Funktionen $Y(x_1, y_1, x_2, y_2)$ und $Z(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Definiert man schließlich die Fehlerfunktionen E_X, E_Y, E_Z durch

$$\begin{aligned} E_X &= X(x_1 + \varepsilon, y_1 + \varepsilon, x_2 + \varepsilon, y_2 + \varepsilon) - X(x_1, y_1, x_2, y_2) \\ E_Y &= Y(x_1 + \varepsilon, y_1 + \varepsilon, x_2 + \varepsilon, y_2 + \varepsilon) - Y(x_1, y_1, x_2, y_2) \\ E_Z &= Z(x_1 + \varepsilon, y_1 + \varepsilon, x_2 + \varepsilon, y_2 + \varepsilon) - Z(x_1, y_1, x_2, y_2) \end{aligned} \quad \dots (9.5)$$

und verwendet die Näherung (9.2) in (9.5), so erhält man, nach elementaren Rechnungen, durch E_X, E_Y, E_Z , die gesuchten Auswirkungen der Meßfehler in den Raumkoordinaten X, Y, Z .

Nachwort

An dieser Stelle möchte ich mich vor allem bei Herrn Honorarprofessor Ing. Dr. h. c. K. Neumaier bedanken, der mich, während meiner Tätigkeit als Vertragsassistent am Institut für Photogrammetrie der Technischen Hochschule Wien, wo diese Arbeit entstand, in freundlicher Weise unterstützte. Außerdem danke ich den Herren Assistenten Dipl.-Ing. Dr. techn. P. Waldhäusl und Dipl.-Ing. Dr. techn. G. Otepka für die vielen wertvollen Tips in photogrammetrischen Fragen.

Literatur:

- Bender, L. U.:* A Collinear Theory of Two Photographs. In: Proceedings of the American Society of Photogrammetry — 39th Annual Meeting, March 1973, Wash. D. C., S. 401—406.
- Bender, L. U.:* Analytical Photogrammetry: A Collinear Theory. The Ohio State University, New York, RADC-TR-71-147, 1971.
- Hallert, B.:* Photogrammetry. McGraw-Hill Book Company, New York 1960.
- Jordan/Eggert/Kneißl:* Handbuch der Vermessungskunde. 10. Auflage, Band I und Band IIIa, Stuttgart 1961.
- Stetter, H. J.:* Numerische Mathematik. Vorlesungen an der TH Wien, 2. Teil, Wien 1969.
- Stoer, J.:* Einführung in die Numerische Mathematik. Berlin 1972.
- Strubecker, K.:* Einführung in die Höhere Mathematik. Band I und Band II, München 1966.

Trigonometrische Höhenmessung: Genauigkeitsstufen, Fehlergrenzen, Gewichte

Von *Josef Zeger*, Wien

Bei der Auswertung von Höhenwinkelmessungen verwendet man im allgemeinen einheitliche Fehlergrenz- und Gewichtsformeln. Bei einer Höhenwinkelmessung zwischen zwei Berggipfeln ist allerdings die Unsicherheit in der Refraktion wesentlich geringer als bei einer bodennahen Visur in ebenem Gelände. Trotzdem zieht man meistens nicht die entsprechende Konsequenz bei den Fehlergrenzen und Gewichten.

Um die Verschiedenheiten in der Unsicherheit der Refraktionskonstanten berücksichtigen zu können, erscheint es als zweckmäßig, die Höhenwinkelmessungen in mehrere Genauigkeitsstufen einzuteilen, abhängig vom Bodenabstand der Visur. Eine solche Unterteilung wird immer eine gewisse Willkür mit sich bringen. Zusätzlich wird die vom Beobachter im Gelände durchzuführende Abschätzung, ob ein Höhenwinkel noch in die eine Genauigkeitsstufe eingereiht werden soll oder ob er bereits in die Nachbarstufe gehört, nicht immer leicht sein und daher gleichfalls in manchen Fällen eine Willkür beinhalten.

Es wird nun vorgeschlagen, die Höhenwinkelmessungen vier Genauigkeitsstufen zuzuordnen, für die über mehr als die Hälfte der jeweiligen Visurlänge folgende Bodenabstände maßgebend sind:

- Stufe 1: mehr als 150 m;
- Stufe 2: zwischen 30 m und 150 m;
- Stufe 3: zwischen 5 m und 30 m;
- Stufe 4: bis höchstens 5 m.