Trigonometrische Höhenmessung: Genauigkeitsstufen, Fehlergrenzen, Gewichte

Josef Zeger [1]

[1] *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, A-1080 Wien, Friedrich-Schmidt-Platz 3*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **62** (4), S. 169–174

1974


```
@ARTICLE{Zeger_VGI_197412,
Title = {Trigonometrische H{\"o}henmessung: Genauigkeitsstufen, Fehlergrenzen,
    Gewichte},
Author = {Zeger, Josef},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {169--174},
Number = {4},
Year = {1974},
Volume = {62}
}
```

Nachwort

An dieser Stelle möchte ich mich vor allem bei Herrn Honorarprofessor Ing. Dr. h. c. K. Neumaier bedanken, der mich, während meiner Tätigkeit als Vertragsassistent am Institut für Photogrammetrie der Technischen Hochschule Wien, wo diese Arbeit entstand, in freundlicher Weise unterstützte. Außerdem danke ich den Herren Assistenten Dipl.-Ing. Dr. techn. P. Waldhäusl und Dipl.-Ing. Dr. techn. G. Otepka für die vielen wertvollen Tips in photogrammetrischen Fragen.

Literatur:

Bender, L. U.: A Collinear Theory of Two Photographs. In: Proceedings of the American Society of Photogrammetry — 39th Annual Meeting, March 1973, Wash. D. C., S. 401—406.

Bender, L. U.: Analytical Photogrammetry: A Collinear Theory. The Ohio State University, New York, RADC-TR-71-147, 1971.

Hallert, B.: Photogrammetry. McGraw-Hill Book Company, New York 1960.

Jordan/Eggert/Kneißl: Handbuch der Vermessungskunde. 10. Auflage, Band I und Band IIIa, Stuttgart 1961.

Stetter, H. J.: Numerische Mathematik. Vorlesungen an der TH Wien, 2. Teil, Wien 1969.

Stoer, J.: Einführung in die Numerische Mathematik. Berlin 1972.

Strubecker, K.: Einführung in die Höhere Mathematik. Band I und Band II, München 1966.

Trigonometrische Höhenmessung: Genauigkeitsstufen, Fehlergrenzen, Gewichte

Von *Josef Zeger*, Wien

Bei der Auswertung von Höhenwinkelmessungen verwendet man im allgemeinen einheitliche Fehlergrenz- und Gewichtsformeln. Bei einer Höhenwinkelmessung zwischen zwei Berggipfeln ist allerdings die Unsicherheit in der Refraktion wesentlich geringer als bei einer bodennahen Visur in ebenem Gelände. Trotzdem zieht man meistens nicht die entsprechende Konsequenz bei den Fehlergrenzen und Gewichten.

Um die Verschiedenheiten in der Unsicherheit der Refraktionskonstanten berücksichtigen zu können, erscheint es als zweckmäßig, die Höhenwinkelmessungen in mehrere Genauigkeitsstufen einzuteilen, abhängig vom Bodenabstand der Visur. Eine solche Unterteilung wird immer eine gewisse Willkür mit sich bringen. Zusätzlich wird die vom Beobachter im Gelände durchzuführende Abschätzung, ob ein Höhenwinkel noch in die eine Genauigkeitsstufe eingereiht werden soll oder ob er bereits in die Nachbarstufe gehört, nicht immer leicht sein und daher gleichfalls in manchen Fällen eine Willkür beinhalten.

Es wird nun vorgeschlagen, die Höhenwinkelmessungen vier Genauigkeitsstufen zuzuordnen, für die über mehr als die Hälfte der jeweiligen Visurlänge folgende Bodenabstände maßgebend sind:

Stufe 1: mehr als 150 m;
Stufe 2: zwischen 30 m und 150 m;
Stufe 3: zwischen 5 m und 30 m;
Stufe 4: bis höchstens 5 m.

Für diese vier Genauigkeitsstufen sind nun die entsprechenden Werte für die Unsicherheit der Refraktionskonstanten anzunehmen:

Stufe 1: $m_{k1} = \pm\ 0{,}05$;
Stufe 2: $m_{k2} = \pm\ 0{,}15$;
Stufe 3: $m_{k3} = \pm\ 0{,}25$;
Stufe 4: $m_{k4} = \pm\ 0{,}50$.

Es sei hier ausdrücklich festgehalten, daß sowohl die Abgrenzung der vier Genauigkeitsstufen als auch die Annahme der entsprechenden Werte für die Unsicherheit der Refraktionskonstanten vorerst nur einer Abschätzung entstammen. Die auf diesen Annahmen aufzubauenden Untersuchungen können möglicherweise eine Verschiebung der Grenzen zwischen den Genauigkeitsstufen und eine Veränderung der Werte für m_k bedingen. Es ist aber kaum zu erwarten, daß solche Veränderungen eine hiefür wesentliche Größenordnung haben werden.

Die Auswertung der Höhenwinkelmessungen erfolgt in der Triangulierungsabteilung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen in Wien mit nachstehender Formel:

$$\Delta H_{A,B} = s_{A,B} \,.\, \tan \alpha_{A,B} + (i_A - z_B) + \frac{1-k}{2\,.\,R} \cdot \frac{s^2{}_{A,B}}{\cos^2 \alpha_{A,B}} \cdot \qquad \ldots (1)$$

$$s_{A,B} = s'_{A,B} \,.\, \left(1 + \frac{H_M}{R} - \frac{y_M{}^2}{2\,.\,R^2}\right) \cdot \qquad \ldots (2)$$

$s'_{A,B}$ .... Punktentfernung aus Koordinaten
$s_{A,B}$ .... Punktentfernung im Vermessungshorizont, befreit von der Projektionsverzerrung
H_M ..... Mittelwert der Meereshöhen der Streckenendpunkte
y_M ...... Mittelwert der Ordinaten der Streckenendpunkte
α .... gemessener Höhenwinkel
i, z ...... Instrument-, Zielhöhe
k .... Refraktionskoeffizient, nach Hartl:

$$k = 0{,}1470 - 0{,}000\,008 \,.\, H_{(\text{in } m)} \qquad \ldots (3)$$

$R = 6379409\,m$ .... Radius der Gauß'schen Bildkugel für die Mittelbreite von $\varphi = 47°45'$.

Mit der Einführung der durch die Gleichung (4) definierten Schrägstrecke $\bar{s}$ kann man die Formel für die Berechnung des Höhenunterschiedes, die Fehlergrenz- und die Gewichtsformeln etwas vereinfachen:

$$\bar{s}_{A,B} = \frac{s_{A,B}}{\cos \alpha_{A,B}} \cdot \qquad \ldots (4)$$

Die so definierte Schrägstrecke $\bar{s}$ ist für Hin- und Rückvisur im allgemeinen nicht gleich, da sowohl die gemessenen Höhenwinkel als auch die Instrument- und Zielhöhen verschieden sein werden:

$$\bar{s}_{A,B} \neq \bar{s}_{B,A} \,. \qquad \ldots (5)$$

Führt man die durch (4) definierte Schrägstrecke $\bar{s}$ ein, erhält die Gleichung (1) folgende Form:

$$\Delta H_{A,\,B} = \bar{s}_{A,\,B} \,.\, \sin \alpha_{A,\,B} + (i_A - z_B) + \frac{1-k}{2\,.\,R} \,.\, \bar{s}_{A,\,B}{}^2 \,. \qquad \ldots (6)$$

Den mittleren Fehler eines Höhenunterschiedes erhält man durch Differenzieren der Gleichung (1), wobei nach Auswahl der für die Fehlergrenzermittlung wesentlichen Glieder der Übergang zu mittleren Fehlern gemacht wird:

$$m_{\Delta H}{}^2 = \frac{m_k{}^2}{4\,.\,R^2} \cdot \left(\frac{s_{A,\,B}}{\cos \alpha_{A,\,B}}\right)^4 + \frac{m_\alpha{}^2}{\rho^2} \cdot \left(\frac{s_{A,\,B}}{\cos \alpha_{A,\,B}}\right)^2 + m_{(i-z)}{}^2 \,. \qquad \ldots (7)$$

Die Gleichung (7) wird durch Einführen der Schrägstrecke $\bar{s}$ vereinfacht:

$$m_{\Delta H}{}^2 = \frac{m_k{}^2}{4\,.\,R^2} \cdot \bar{s}_{A,\,B}{}^4 + \frac{m_\alpha{}^2}{\rho^2} \,.\, \bar{s}_{A,\,B}{}^2 + m_{(i-z)}{}^2 \,. \qquad \ldots (8)$$

Die Fehlergrenze erhält man wie üblich aus dem dreifachen Wert des mittleren Fehlers:

$$F_{\Delta H} = 3\,.\,\sqrt{\frac{m_k{}^2}{4\,.\,R^2} \,.\, \bar{s}_{A,B}{}^4 + \left(\frac{m_\alpha{}^{cc}}{\rho^{cc}}\right)^2 .\, \bar{s}_{A,\,B}{}^2 + m_{(i-z)}{}^2} \,. \qquad \ldots (9)$$

Trifft man die weitere Annahme $m_\alpha \doteq 3'' \doteq 9^{cc} \doteq 0{,}000015$ (Bogenmaß) und $m_{(i-z)}{}^2 = 0{,}0002\ m^2$, ergeben sich für die vier Genauigkeitsstufen folgende Fehlergrenzformeln:

Stufe 1: $F_{\Delta H(m)} = 3\,.\,\sqrt{0{,}00001536\,.\,\bar{s}_{A,\,B(km)}{}^4 + 0{,}000225\,.\,\bar{s}_{A,\,B(km)}{}^2 + 0{,}0002}$ ... (9 a)

Stufe 2: $F_{\Delta H(m)} = 3\,.\,\sqrt{0{,}00013822\,.\,\bar{s}_{A,\,B(km)}{}^4 + 0{,}000225\,.\,\bar{s}_{A,\,B(km)}{}^2 + 0{,}0002}$ ... (9 b)

Stufe 3: $F_{\Delta H(m)} = 3\,.\,\sqrt{0{,}00038394\,.\,\bar{s}_{A,\,B(km)}{}^4 + 0{,}000225\,.\,\bar{s}_{A,\,B(km)}{}^2 + 0{,}0002}$ ... (9 c)

Stufe 4: $F_{\Delta H(m)} = 3\,.\,\sqrt{0{,}00153575\,.\,\bar{s}_{A,\,B(km)}{}^4 + 0{,}000225\,.\,\bar{s}_{A,\,B(km)}{}^2 + 0{,}0002}\,.$ ... (9 d)

Berechnet man den mittleren Fehler eines Höhenunterschiedes für verschiedene Seitenlängen in den vier Genauigkeitsstufen (ein Drittel des durch die Gleichungen (9) definierten Wertes), so zeigt sich, daß bei einer Seitenlänge von 0,5 km für alle Genauigkeitsstufen praktisch noch die gleiche Genauigkeit besteht. Allerdings treten bei größeren Entfernungen bereits beachtliche Unterschiede auf.

	$m_{\Delta H}$ in m-Einheiten für ein $\bar{s}$ von					
Stufe	0,5 km	1,0 km	2,0 km	3,0 km	4,0 km	5,0 km
1	0,016	0,021	0,037	0,059	0,088	0,124
2	0,016	0,024	0,058	0,116	0,198	0,304
3	0,017	0,028	0,085	0,183	0,320	0,496
4	0,019	0,044	0,160	0,356	0,630	0,983

Diese Tabelle zeigt auch sehr deutlich, daß es unter den getroffenen Annahmen sinnlos ist, bei bodennahen Visuren eine Höhenwinkelmessung über eine Entfernung von mehr als 2 km durchzuführen. Dies ist ein Ergebnis, das in der Praxis bestätigt wird durch die Schwierigkeiten, die bei der Auswertung von Höhenwinkelmessungen in einem Gebiet mit einer Vielzahl von bodennahen Visuren immer wieder auftreten, wie z. B. im Seewinkel, im Marchfeld oder in der Rheinebene. Die in solchen Gebieten auftretenden Differenzen in den Höhenunterschieden zwischen der Hin- und Rückmessung und auch die Differenzen zwischen den aus den Höhenunterschieden abgeleiteten Meereshöhen der Neupunkte, aus denen die ausgeglichenen Meereshöhen ermittelt werden, zeigen sehr deutlich, daß die für die Genauigkeitsstufe 4 getroffene Annahme nicht unberechtigt ist.

Zusätzlich tritt auch noch die Frage nach der Größe der Refraktionskonstanten auf, unabhängig von der Größenordnung ihrer Unsicherheit. Hier zeigt sich, daß der Hartl'sche Wert für den Refraktionskoeffizienten bei verschiedenen Landschafts- und Geländeformen den tatsächlichen Gegebenheiten nicht entspricht. So mußte z. B. bei der Triangulierung von Groß-Wien (Triangulierungsoperat N-120/1948—1953) der Refraktionskoeffizient $k = 0$ gesetzt werden, wodurch die in diesen Fall systematisch auftretenden großen Differenzen zwischen den aus gegenseitig gemessenen Höhenwinkeln abgeleiteten Höhenunterschieden weitgehend verringert werden konnten. Dieses Problem soll hier allerdings ausgeklammert bleiben.

Die Einführung der Genauigkeitsstufen ist in analoger Weise auch bei der Ableitung von Gewichtsformeln von Bedeutung. Jedem Höhenunterschied $\Delta H_{A,\,B}$ ist anläßlich der Berechnung ausgeglichener Meereshöhen ein Gewicht $p_{A,\,B}$ zuzuordnen. Allgemein ist dieses Gewicht definiert durch

$$p = \frac{C}{m_{\Delta H}{}^2}. \qquad \ldots (10)$$

Der mittlere Fehler eines Höhenunterschiedes ist durch die Gleichung (7) gegeben. Führt man die Gleichung (7) in die Gleichung (10) ein und multipliziert man Zähler und Nenner von Gleichung (10) mit $4 \,.\, R^2/m_k{}^2$, erhält man im Zähler eine neue Konstante $\overline{C}$. Führt man wiederum die Schrägentfernung $\bar{s}$ nach Gleichung (4) ein, ist das Gewicht durch die folgende Gleichung gegeben:

$$p_{A,\,B} = \frac{\overline{C}}{\bar{s}_{A,\,B(km)}{}^4 + \bar{s}_{A,\,B(km)}{}^2 \,.\, \left(\dfrac{m_\alpha{}^{cc}}{\rho^{cc}}\right)^2 \,.\, \dfrac{4 \,.\, R_{(km)}{}^2}{m_k{}^2} + m_{(i-z)(km)}{}^2 \,.\, \dfrac{4 \,.\, R_{(km)}{}^2}{m_k{}^2}}. \qquad \ldots (11)$$

Die Konstante $\overline{C}$ kann z. B. so bestimmt werden, daß einheitlich für alle vier Genauigkeitsstufen für eine bestimmte Entfernung, z. B. für $\bar{s}_0 = 0{,}5$ km, das Bezugsgewicht angenommen wird, etwa $p_0 = 100$. Unter den für die numerischen Fehlergrenzformeln (9) geltenden Voraussetzungen erhält man dann folgende Gewichtsformeln:

$$\text{Stufe 1}: p_{A,\,B} = \frac{1674{,}82}{\bar{s}_{A,\,B(km)}{}^4 + 14{,}65 \,.\, \bar{s}_{A,\,B(km)}{}^2 + 13{,}02} \qquad \ldots (12\,a)$$

$$\text{Stufe 2: } p_{A,B} = \frac{191{,}65}{\bar{s}_{A,B(km)}^4 + 1{,}63 \, . \, \bar{s}_{A,B(km)}^2 + 1{,}45} \qquad \ldots (12\,b)$$

$$\text{Stufe 3: } p_{A,B} = \frac{72{,}99}{\bar{s}_{A,B(km)}^4 + 0{,}59 \, . \, \bar{s}_{A,B(km)}^2 + 0{,}52} \qquad \ldots (12\,c)$$

$$\text{Stufe 4: } p_{A,B} = \frac{22{,}93}{\bar{s}_{A,B(km)}^4 + 0{,}15 \, . \, \bar{s}_{A,B(km)}^2 + 0{,}13} \, . \qquad \ldots (12\,d)$$

Das Ausmaß der Gewichtsunterschiede zwischen den vier Genauigkeitsstufen zeigt am besten eine Tabelle, in der wiederum für einige Entfernungen die Gewichte zusammengestellt wurden:

Stufe	Gewicht $p_{A,B}$ für eine Entfernung $\bar{s}_{A,B}$ von 0,5 km	1,0 km	2,0 km	3,0 km	4,0 km	5,0 km
1	100,00	58,41	19,11	7,41	3,33	1,67
2	100,00	46,97	8,00	1,97	0,68	0,29
3	100,00	34,64	3,87	0,84	0,27	0,11
4	100,00	17,96	1,37	0,28	0,09	0,04

Die für die trigonometrische Höhenmessung vorgeschlagene Einführung von vier Genauigkeitsstufen hat außerdem auch einen Einfluß auf den mittleren Fehler einer horizontierten Schrägstrecke, vor allem beim Vorhandensein größerer Höhenwinkel:

$$m_{s_{hor.}}^2 = m_s^2 + s^2 \, . \, \sin^2(\alpha + \varepsilon + \psi) \, . \left(\frac{m_\alpha^2}{\rho^2} + \frac{4 \, . \, m_z^2}{s^2} + \frac{s^2}{4 \, . \, R^2} \, . \, m_k^2 \right) . \qquad \ldots (13)$$

Hierin ist m_s der dem Streckenmeßmittel entsprechende mittlere Fehler. Der Winkel ε beinhaltet die Zentrierung des Höhenwinkels auf die Streckenmessung, der Winkel ψ den Einfluß von Erdkrümmung und Refraktion. Im allgemeinen sind daher beide Werte nicht von Bedeutung. Unter der für die elektrooptische Streckenmessung gültigen Annahme von $m_s = \pm\, 0{,}01\, m$ und $m_z = \pm\, 0{,}01\, m$ wurde die Gleichung (13) für 4 verschiedene Höhenwinkel und für die in den vorhergehenden Tabellen verwendeten Schrägentfernungen $\bar{s}$ ausgewertet: (siehe Tabelle auf Seite 174)

Es wurden in dieser Tabelle Fehlerwerte auch für Strecken ausgewiesen, die in der Praxis unter diesen Umständen nicht mehr gemessen werden können, z. B. wird es keine Strecke geben, die über eine Entfernung von 5 km eine bodennahe Visur bei einem Höhenwinkel von 40^g haben kann. Diese Werte sollen aber nur illustrieren, welche Auswirkung die verschiedenen Werte für m_k sogar auf die Streckenmessung haben.

Es zeigt sich auch hier wiederum, daß erst ab einer Entfernung von etwa 0,5 km die vier Genauigkeitsstufen eine praktische Auswirkung auf den Streckenfehler haben. Bei größeren Entfernungen und größerem Höhenwinkel ergeben sich jedoch beträchtliche Genauigkeitsunterschiede zwischen den einzelnen Stufen.

Stufe	α^g	$m_{s(hor.)}$ in m-Einheiten für ein s von 0,5 km	1,0 km	2,0 km	3,0 km	4,0 km	5,0 km
	10	0,011	0,011	0,012	0,014	0,017	0,022
1	20	0,012	0,013	0,016	0,021	0,029	0,040
	30	0,014	0,015	0,021	0,029	0,041	0,058
	40	0,016	0,018	0,026	0,037	0,053	0,074
	10	0,011	0,011	0,014	0,021	0,033	0,049
2	20	0,012	0,013	0,021	0,038	0,063	0,095
	30	0,014	0,016	0,029	0,054	0,091	0,139
	40	0,016	0,019	0,037	0,070	0,118	0,180
	10	0,011	0,011	0,017	0,030	0,051	0,078
3	20	0,012	0,014	0,028	0,058	0,099	0,153
	30	0,014	0,018	0,040	0,084	0,146	0,225
	40	0,016	0,021	0,051	0,108	0,188	0,291
	10	0,011	0,012	0,027	0,057	0,099	0,154
4	20	0,012	0,017	0,050	0,111	0,196	0,305
	30	0,015	0,023	0,073	0,163	0,287	0,447
	40	0,017	0,029	0,095	0,210	0,372	0,579

Mitteilungen

o. Professor Dr. Karl Rinner — Ehrendoktor und Akademiemitglied

Kurz nacheinander wurden o. Prof. *Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Rinner*, Vorstand des Instituts für Landesvermessung und Photogrammetrie an der Technischen Hochschule in Graz, zwei hohe Ehrungen zuteil.

Die Österreichische Akademie der Wissenschaften hat in ihrer Sitzung vom 14. Mai 1974 Prof. Rinner zum korrespondierenden Mitglied der naturwissenschaftlichen Klasse gewählt.

Die Technische Hochschule Darmstadt verlieh ihm am 12. Juli 1974 die Würde eines Doktor-Ingenieurs Ehren halber (Dr.-Ing. E. h.); sie begründete dies mit der Anerkennung seiner richtungsweisenden wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gesamtgebiet der Geodäsie und Photogrammetrie.

Das Gesamtwerk des Geehrten wurde bereits anläßlich seines 60. Geburtstages in dieser Zeitschrift (Mai 1973) kurz gewürdigt. Daher soll hier ein Rückblick besonders auf das photogrammetrische Schaffen Prof. Rinners gegeben werden, das in seinem Lebenswerk eine wichtige Rolle einnimmt.

Das Interesse an photogrammetrischen Orientierungsproblemen begleitete bereits Rinners erste geometrische Untersuchung, die zur Doktordissertation „Beiträge zur Wienerschen Imaginärprojektion" führten; diese Arbeit war so bedeutend, daß sie Aufnahme in die Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften fand.

Ab 1939 beschäftigte sich Rinner in Veröffentlichungen mit den aktuellen Problemen der Photogrammetrie. Gemeinsam mit seinem Lehrer Prof. *Zaar* publizierte er Beiträge zur Zweimedienphotogrammetrie; seine Leistung auf diesem Gebiet wurde 1969 durch die Verleihung des Talbert Abrams Award seitens der Amerikanischen Gesellschaft für Photogrammetrie anerkannt.

Im Jahr 1948 veröffentlichte er erstmals über die Geometrie des Funkmeßbildes im Anzeiger der naturwissenschaftlichen Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften; es folgten