Zur Lösung geometrisch überbestimmter Probleme

Karl Killian [1], Peter Meissl [2]

[1] *Hadikgasse 40, A-1140 Wien*
[2] *Institut für Mathematische und Numerische Geodäsie der Technischen Universität in Graz, Technikerstraße 4, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **64** (3–4), S. 81–86

1976


```
@ARTICLE{Killian_VGI_197608,
Title = {Zur L{\"o}sung geometrisch {\"u}berbestimmter Probleme},
Author = {Killian, Karl and Meissl, Peter},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {81--86},
Number = {3--4},
Year = {1976},
Volume = {64}
}
```

ÖSTERREICHISCHE
ZEITSCHRIFT FÜR VERMESSUNGSWESEN UND PHOTOGRAMMETRIE

Herausgegeben vom
Österreichischen Verein für Vermessungswesen und Photogrammetrie

Offizielles Organ
der österreichischen Kommission für die Internationale Erdmessung

SCHRIFTLEITUNG:
a. o. Univ.-Prof. W. Hofrat i. R. Dipl.-Ing. Dr. techn. Josef Mitter
o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hans Schmid
o. Univ.-Prof. Dr. phil. Wolfgang Pillewizer
o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Helmut Moritz

Nr. 3/4 Baden bei Wien, Juli 1977 64. Jg.

Zur Lösung geometrisch überbestimmter Probleme

Von *Karl Killian* und *Peter Meissl*

Geometrische Probleme der Geodäsie, der Photogrammetrie und der sphärischen Astronomie sind bekanntlich fast ausschließlich überbestimmte Probleme. Die überschüssigen Messungen müssen ja einerseits gegen grobe Fehler absichern, andererseits läßt sich der Einfluß zufälliger Meßfehler mittels Ausgleichung herabmindern und Aufschlüsse über die Genauigkeit des Resultates können erbracht werden.

Bei der Ausgleichung eines überbestimmten nicht linearen Problemes wird mittels Tayloransatz ein lineares System hergeleitet und ausgeglichen. Dazu sind Näherungslösungen auf irgend eine Art bereit zu stellen. In der Folge wird nun gezeigt, daß Näherungslösungen aus dem geometrischen überbestimmten Problem durch geschlossene Rechnung abgeleitet werden können. Dieser Weg wurde für spezielle Aufgaben bestritten, siehe z. B. H. v. Sanden (1908), K. Rinner (1956), die das Problem der gegenseitigen Orientierung und K. Killian (1955), der das Rückwärtseinschneiden im Raum behandelte.

Gedanklich am einfachsten ist wohl folgender Weg. Angenommen die Unbekannten x, y repräsentieren die Lösung eines geometrischen Problemes, welches sich durch Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}
a_{11}\ \varphi_1(x,y) + a_{12}\ \varphi_2(x,y) + \dots a_{1n}\ \varphi_n(x,y) &= b_1\\
a_{21}\ \varphi_1(x,y) + a_{22}\ \varphi_2(x,y) + \dots a_{2n}\ \varphi_n(x,y) &= b_2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\
a_{m1}\ \varphi_1(x,y) + a_{m2}\ \varphi_2(x,y) + \dots a_{mn}\ \varphi_n(x,y) &= b_m
\end{aligned}$$

beschreiben läßt. Dabei sind a_{ij}, b_i bekannte Konstante und $\varphi_1(x,y), \dots \varphi_n(x,y)$ Funktionen bekannter Bauart der Unbekannten x, y. Jede der oben angeschriebenen Gleichungen repräsentiert einen geometrischen Ort, auf dem die Lösung liegen muß. Falls es genügend viele geometrische Örter gibt, falls also $m \geqq n$ ist, so läßt sich u. U.

obiges System, welches linear in den Hilfsunbekannten $\varphi_1(x, y), \ldots \varphi_n(x, y)$ ist, nach diesen Hilfsunbekannten auflösen. In einem zweiten Schritt wären dann aus einer Anzahl der Hilfsunbekannten die eigentlichen Unbekannten rückzurechnen. Dieser zweite Schritt ist manchmal nicht nötig, wenn nämlich $x. y$ selbst unter den Hilfsunbekannten vorkommen.

Ein Beispiel möge dies verdeutlichen. Nehmen wir an, die geometrischen Örter seien Kreise und es seien drei davon vorgegeben.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c &= 0 \\ x^2 + y^2 + \bar{a}\,x + \bar{b}\,y + c &= 0 \\ x^2 + y^2 + \bar{\bar{a}}\,x + \bar{\bar{b}}\,y + c &= 0 \end{aligned}$$

Diese drei Kreise sollen sich in einem Punkt schneiden. Es liegt also eine Überbestimmung vor. Wenn man die Hilfsunbekannten $\varphi_1(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi_2(x, y) = x$, $\varphi_3(x, y) = y$ einführt, so resultiert ein lineares System in den drei Unbekannten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Seine Auflösung liefert u. a. $\varphi_2 = x$ und $\varphi_3 = y$. Auf diese Weise könnte man etwa einen überbestimmten Bogenschnitt lösen.

Bei geschickter Wahl der Hilfsunbekannten lassen sich manchmal große Vereinfachungen erzielen. Hier sei insbesondere auf die Arbeit von K. Rinner verwiesen, in der die gegenseitige Orientierung von zwei Strahlenbündeln bei dreifacher Überbestimmung auf ein lineares System zurückgeführt wird. Seine Untersuchungen wurden von Van den Hout (1961) und Van den Hout und Stefanovic (1976) im Hinblick auf ihre Nutzanwendung in der Photogrammetrie weiter verfolgt.

Der Weg, den K. Killian eingeschlagen hat, ist allgemeinerer Art. Er läßt im Prinzip die Lösung beliebig komplizierter algebraischer Systeme bei nur einer Überbestimmung zu. Wir wollen im folgenden diese Methode beschreiben und an einem Beispiel erläutern.

Killian hat das Verfahren an solchen Aufgabenstellungen erprobt, die sich durch eine einzige algebraische Gleichung in einer Unbekannten formulieren lassen. Sei

$$a_n x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$$

eine solche Gleichung (nach eventuellem Durchmultiplizieren mit dem Nenner). Aus der Überbestimmung folgt eine weitere Gleichung, etwa

$$\bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots \bar{a}_1 x + \bar{a}_0 = 0$$

Falls beide Gleichungen genau eine einzige Lösung ξ gemeinsam haben, so ist $(x - \xi)$ der größte gemeinsame Teiler der beiden Polynome, der sich z. B. durch Euklidische Kettendivision ermitteln läßt. Killian hat einen etwas anderen Weg beschritten. Er multipliziert die Gleichungen einmal mit $\bar{a}_n$, $-a_n$ und addiert (Wegschaffen der höchsten Potenz von x). Dann multipliziert er mit $\bar{a}_0$, $-a_0$ und addiert (Wegschaffen des konstanten Gliedes). Dividiert man die zweite der erhaltenen Gleichungen durch x, so folgen zwei neue Gleichungen.

$$\begin{aligned} b_{n-1}\, x^{n-1} + b_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots b_1 x + b_0 &= 0 \\ \bar{b}_{n-1}\, x^{n-1} + \bar{b}_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots \bar{b}_1 x + \bar{b}_0 &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen sind im Grad um mindestens 1 niedriger und müssen die gemeinsame Lösung ξ haben. Daher kann man analog wie oben verfahren. Auf diese Weise gelangt man schließlich zu zwei linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} r_1 x + r_0 &= 0 \\ \bar{r}_1 x + \bar{r}_0 &= 0 \end{aligned}$$

welche Vielfache voneinander sein müssen. I. a. liefert jede davon die Lösung

$$\xi = -\, r_0/r_1. = -\, \bar{r}_0/\bar{r}_1.$$

Das geschilderte Verfahren läßt sich ohne weiteres auf ein System von $m + 1$ Gleichungen mit m Unbekannten ausdehnen. Ein solches System ergibt sich bei einer Aufgabe mit einer einzigen überschüssigen Messung. Nehmen wir bei folgender Darstellung den Fall $m = 2$ an und ordnen wir die Gleichungen nach fallenden Potenzen von x:

$$\begin{aligned} A_n(y)\, x^n + A_{n-1}(y)\, x^{n-1} + \ldots + A_1(y)\, x + A_0(y) &= 0 \\ \bar{A}_n(y)\, x^n + \bar{A}_{n-1}(y)\, x^{n-1} + \ldots + \bar{A}_1(y)\, x + \bar{A}_0(y) &= 0 \\ \bar{\bar{A}}_n(y)\, x^n + \bar{\bar{A}}_{n-1}(y)\, x^{n-1} + \ldots + \bar{\bar{A}}_1(y)\, x + \bar{\bar{A}}_0(y) &= 0 \end{aligned}$$

Dabei sind $A_j(y)$, $\bar{A}_j(y)$, $\bar{\bar{A}}_j(y)$ Polynome in y. Nun führen wir entweder den Euklidischen Algorithmus durch, oder behandeln die Gleichungen analog der Killian'schen Verfahren. Im letzteren Falle können wir etwa die erste Gleichung mit $\bar{A}_n(y)$, die zweite mit $-\, A_{n-1}(y)$ multiplizieren und addieren (Wegschaffen der höchsten Potenz von x) und dann die erste Gleichung mit $\bar{A}_0(y)$ multiplizieren und die zweite mit $-\, A_0(y)$ und nach dem Addieren durch x dividieren. Wir erhalten zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} B_{n-1}(y)\, x^{n-1} + \ldots\, B_1(y)\, x + B_0(y) &= 0 \\ \bar{B}_{n-1}(y)\, x^{n-1} + \ldots\, \bar{B}_1(y)\, x + \bar{B}_0(y) &= 0 \end{aligned}$$

Auf diese Weise fortfahrend gelangt man schließlich zu zwei Gleichungen, die linear in x sind:

$$\begin{aligned} R_1(y)\, x + R_0(y) &= 0 \\ \bar{R}_1(y)\, x + \bar{R}_0(y) &= 0 \end{aligned}$$

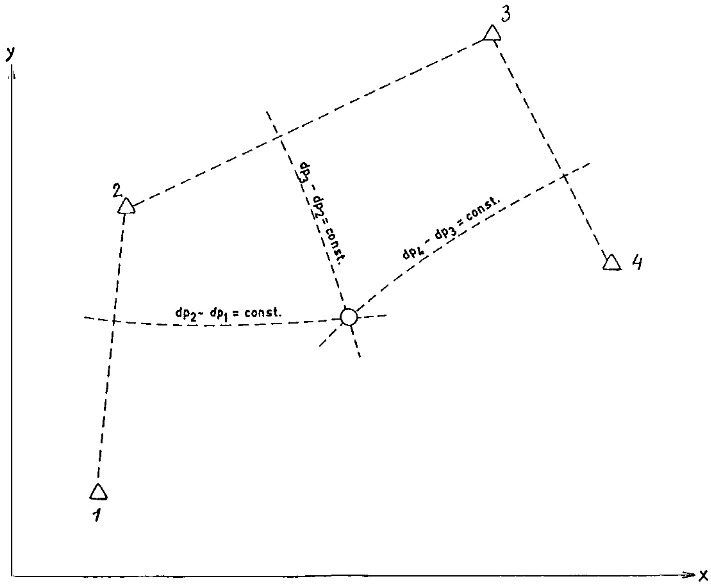
Ein weiterer Schritt liefert zwei polynomiale Gleichungen in y:

$$\begin{aligned} T(y) &= 0 \\ \bar{T}(y) &= 0 \end{aligned}$$

Davon kann man eine nehmen, bzw. auch den gemeinsamen Teiler der beiden. Sei $U(y) = 0$ die ausgewählte Gleichung.

Verfährt man analog mit zwei anderen der ursprünglichen drei Gleichungen, so erhält man eine weitere Gleichung $\bar{U}(y) = 0$ und man kann wie früher die gemeinsamen Nullstellen von $U(y)$, $\bar{U}(y)$ bestimmen.

Wir illustrieren dies am Falle von drei Kegelschnitten, welche durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Eine solche Aufgabenstellung entsteht z. B., wenn von einem Punkt drei Streckendifferenzen nach gewissen Anschlußpunkten gemessen werden. Jede Streckendifferenz legt eine Hyperbel fest, auf der der Punkt liegen muß. Konfiguration und angenommene Meßdaten sind aus der Abbildung zu ersehen.



Messung		Anschlußpunkte		
Nr.	Wert	Nr.	x	y
1	− 93,62	1	150,00	150,00
		2	200,00	650,00
2	111,81	2	200.00	650,00
		3	850,00	950,00
3	− 98,14	3	850,00	950,00
		4	1050,00	550,00

$a = d_{P2} - d_{P1}$, $b = e^2 - a^2$ gegeben. Die Gleichungen der drei Hyperbeln sind:

$$0{,}02481071\,x^2 - 0{,}19801980\,xy - 0{,}95538731\,y^2 + \\ + 70{,}524172\,x + 79{,}896331\,y - 163848{,}41 = 0$$

$$-\,0{,}79999712\,x^2 - 0{,}76097561\,xy - 0{,}15121663\,y^2 + \\ + 1448{,}7775\,x + 641{,}45880\,y - 633838{,}48 = 0$$

$$-\,0{,}15184270\,x^2 + 0{,}80000000\,xy - 0{,}75184270\,y^2 - \\ - 311{,}49887\,x + 367{,}76405\,y + 12342{,}350 = 0$$

Wir ordnen die beiden ersten Gleichungen nach Potenzen von x:

$$0{,}02481071\,x^2 + (-\,0{,}19801980\,y + 70{,}524172)\,x + \\ + (-\,0{,}95538731\,y^2 + 798{,}96331\,y - 163848{,}41) = 0$$

$$-\,0{,}79999712\,x^2 + (-\,0{,}76097561\,y + 1448{,}7775)\,x + \\ + (-\,0{,}15121663\,y^2 + 641{,}45880\,y - 633838{,}48) = 0$$

Nun schaffen wir einmal die höchste und einmal die niedrigste Potenz von x weg, es resultieren zwei Gleichungen:

$$(0{,}00000000\,y^2 + 0{,}17729562\,y - 92{,}364333)\,x \\ + (0{,}00000000\,y^3 + 0{,}76805889\,y^2 - 655{,}08340\,y + 146804{,}24) = 0$$

$$(-0{,}76805889\,y^2 + 655{,}08340\,y - 146804{,}24)\,x$$
$$+ (-0{,}69708255\,y^3 + 1854{,}4492\,y^2 - 1111453{,}8\,y + 192678950) = 0$$

Eliminiert man daraus x, so folgt:

$$0{,}46632477\,y^4 - 613{,}113968\,y^3 + 286302{,}01\,y^2 - 55518221\,y + 3754822000 = 0$$

Indem man die Hyperbelgleichungen 2 und 3 analog behandelt, erhält man

$$0{,}85834943\,y^4 - 2010{,}6461\,y^3 + 1750739{,}2\,y^2 - 671132910\,y + 95507074000 = 0.$$

Eliminiert man aus den beiden zuletzt angeschriebenen Gleichungen einmal die höchste und einmal die niedrigste Potenz, so folgt

$$411{,}34806\,y^3 - 570665{,}87\,y^2 + 265311870\,y - 41314365000 = 0$$
$$41314365000\,y^3 - 5{,}1007103 \,.\, 10^{13}\,y^2 + 2{,}0770154 \,.\, 10^{16}\,y - 2{,}7823982 \,.\, 10^{18} = 0$$

wiederholt man dies, so folgt

$$-2{,}5950255 \,.\, 10^{15}\,y^2 + 2{,}4174291 \,.\, 10^{18}\,y - 5{,}6234267 \,.\, 10^{20} = 0$$
$$5{,}6234267 \,.\, 10^{20}\,y^2 - 5{,}1950637 \,.\, 10^{23}\,y + 1{,}1990244 \,.\, 10^{26} = 0$$

Nach dem nächsten Schritt erhält man zwei lineare Gleichungen, die erste davon ist

$$1{,}1291259 \,.\, 10^{37}\,y - 5{,}0793910 \,.\, 10^{39} = 0$$

Sie liefert

$$y = \mathit{449{,}85160}$$

Setzt man in eine der obigen Gleichungen ein, welche linear in x ist, so folgt

$$x = \mathit{598{,}31180}$$

Damit ist die gesuchte Näherungslösung gewonnen.

Es sei daran erinnert, daß man rationale Ausdrücke trigonometrischer Funktionen in mannigfacher Weise in rationale Funktionen umwandeln kann (z. B. über die Moivre'sche Formel oder über die bei der Auswertung von Integralen verwendete Transformation $u = \tan \frac{x}{2}$). Ferner sei erinnert, daß die Gleichungen vieler algebraischen Kurven im „transzendenten Gewand" vorkommen. Jede durch Polarkoordinaten dargestellte Kurve ist algebraisch, wenn in der Gleichung

$$\rho = F(\varphi) \qquad \begin{array}{l} \rho \ldots \text{Radiusvektor} \\ \varphi \ldots \text{Anomalie (Polarwinkel)} \end{array}$$

nur in der Form $F(\sin n\varphi, \cos m\varphi)$ auftritt.

Es soll nicht verschwiegen werden, daß die angeführten Methoden zur Bestimmung von Näherungslösungen geometrisch überbestimmter Probleme numerische Schwierigkeiten mit sich bringen können. Wenn der Grad des algebraischen Systems zu hoch ist und die Anzahl der Unbekannten zu groß ist, so kann die numerische Rechnung infolge zu großen Aufwandes oder infolge von Rundungsfehlern versagen. Außerdem ist es möglich, daß numerische Ausnahmefälle vorkommen

— sie sind nicht identisch mit den dem Problem anhaftenden gefährlichen Örtern —, die ebenfalls die numerische Rechnung unmöglich machen.

Es ist vorgesehen, in nachfolgenden Untersuchungen eine Anzahl wichtiger Probleme zu diskutieren und ihre numerischen Ausnahmefälle zu analysieren.

Literatur

Killian, K.: Über das Rückwärtseinschneiden im Raum. ÖZfV, *43* (1955).

Rinner, K.: Eine allgemeine analytische Lösung des Folgebildanschlusses. ÖZfV, *44* (1956).

Rinner, K.: Studien über eine allgemeine, voraussetzungslose Lösung des Folgebildanschlusses. Sonderheft 23 der ÖZfV, 1963.

Van den Hout, C. M. A.: Analytical orientation methods. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini. Anno XX, p. 418—427 (1961).

Van den Hout, C. M. A and *P. Stefanovic:* Efficient Analytical Relative Orientation. Paper presented at ISP Congress Helsinki 1976 (1976).

von Sanden, H.: Die Bestimmung der Kernpunkte in der Photogrammetrie. Diss. Univ. Göttingen 1908.

Über die Schwankung der Tageslänge und deren Einfluß auf die Schwerkraft

Von *Eckart Lindinger*, Schärding

Die Schweremesser, ganz gleich welcher Art, liefern den Wert

$$g = 98.,\ldots\ \ldots \text{ cm sec}^{-2}.$$

Dieser Betrag setzt sich zusammen aus der Gravitation und aus der Fliehkraft. Die Gravitation wieder setzt sich zusammen aus der Anziehung der terrestrischen Massen und aus der variablen Form der extraterrestrischen Gezeitenwirkungen im Sonnensystem. Ich erinnere mich auch an einen Vortrag, der in den dreißiger Jahren von einem Wiener Geophysiker an der Universität Graz gehalten worden ist, in welchem dieser im Erdinneren Geschwindigkeiten postulierte, die an die in der Atmosphäre vorkommenden Geschwindigkeiten heranreichen, was beträchtliche Unruhe im Auditorium hervorgerufen hatte. Wenn aber Massenverlagerungen vorkommen, wie diese die Plattentheorie mit ihren Zentimetergeschwindigkeiten vorschreibt, so muß auch der Anteil der Gravitation zusammen mit den an sich variablen Gezeiten variabel sein.

Der Anteil der Gravitation ist aber nicht Gegenstand der folgenden Untersuchungen.

Der Einfluß der Fliehkraft

Die folgende Skizze stellt den Axialschnitt durch den Erdkörper dar.

Darin ist

p der Parallelkreisradius
N der Normalkrümmungsradius und
φ die Geographische Breite