Paper-ID: VGI_197711

Die Sonderfälle der diskreten Kollokation

Helmut Wolf [1]

[1] *Universität Bonn, Nuß-Allee 17, D-53 Bonn*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **65** (3–4), S. 132–138

1977

BibTEX:

```
@ARTICLE{Wolf_VGI_197711,
Title = {Die Sonderf{\"a}lle der diskreten Kollokation},
Author = {Wolf, Helmut},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {132--138},
Number = {3--4},
Year = {1977},
Volume = {65}
}
```

Die Sonderfälle der diskreten Kollokation

Von *Helmut Wolf*, Bonn

Wenn man die Kollokation in ihrer diskreten Ausprägung, d. h. mit endlicher Anzahl von unbekannten Parametern, als eine Aufgabe der Ausgleichsrechnung ansieht, so kann man aus dem *allgemeinen Modell*

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\mathbf{s} + \mathbf{n} \tag{1}$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}\,\mathbf{n} + \mathbf{s}^T \mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{s} = \min \tag{2}$$

eine Anzahl von (insgesamt 8) Sonderfällen erfassen, ohne daß für jeden einzelnen von ihnen eine eigene Theorie aufzubauen ist.

Vorstehend bedeuten: $\mathbf{l}$ den Vektor der Beobachtungen an den vorgegebenen N Stützpunkten, $\hat{\mathbf{x}}$ den ausgeglichenen (oder „geschätzten") Vektor der u Parameter des deterministischen Anteils, $\mathbf{s}$ das Signal und $\mathbf{n}$ den Noise. $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind die entsprechenden Koeffizientenmatrizen, dergestalt daß

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathrm{grad}^T\,\mathbf{l}]$$

bezüglich der Werte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{s}$. A priori gegeben seien außerdem die Kovarianzen

$$\mathbf{C}_{ss} = \mathrm{cov}\,(\mathbf{s}),\ \mathbf{C}_{nn} = \mathrm{cov}\,(\mathbf{n}),\ \text{mit } E\{\mathbf{s}\} = \mathbf{o},\ \text{und } E\{\mathbf{n}\} = \mathbf{v}$$

worin E den Erwartungswert symbolisiert. Im Sinne einer Interpolation sollen dann auf den Neupunkten die entsprechenden Werte

$$\mathbf{l}^P = \mathbf{A}_P\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_P\,\mathbf{s}^P \tag{3}$$

gefunden werden, wobei die $\mathrm{cov}(\mathbf{s}^P) = \mathbf{C}_{sPsP}$ sowie $\mathbf{C}_{sPs}$ ebenfalls als bekannt vorausgesetzt werden. Man kann dann im Sinne der Ausgleichungsrechnung die Lösung auf zweierlei Wegen herbeiführen:

a) *über eine Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten:*
Ist $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix, so kann für (1) geschrieben werden:

$$[\mathbf{I}, \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} = \mathbf{o} \tag{4}$$

Aus (1) folgen mit dem Korrelatenvektor $\mathbf{k}$ die Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} [\mathbf{I}, \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{nn}, & \mathbf{O} \\ \mathbf{O}, & \mathbf{C}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \mathbf{k} + \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} &= \mathbf{o} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{k}, \qquad &= \mathbf{v} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

woraus

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l},\ \text{und } \mathbf{k} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{6}$$

mit

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_{nn} + \mathbf{B}\,\mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T$$

und aus den Korrelatengleichungen folgt

$$\mathbf{n} = \mathbf{C}_{nn}\,\mathbf{k} = \mathbf{C}_{nn}\,\bar{\mathbf{C}}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}_{nn}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T)^{-1}\,\mathbf{B}\,\mathbf{s} \tag{7}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{C}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{8}$$

Zur Bestimmung von $\mathbf{s}^P$ bedient man sich des Kunstgriffes von Prof. *Moritz* (1970), wonach man $\mathbf{s}^P$ mit in die Bedingung (1) aufnimmt, allerdings mit dem Faktor Null. Dadurch ändern sich $\hat{\mathbf{x}}$, **k**, **n**, **s** nicht, und für $\mathbf{s}^P$ erhält man aus den Korrelatengleichungen

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{B}^T\,\bar{\mathbf{C}}^{-1}\,(\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s} \tag{9}$$

so daß nach (3):

$$\mathbf{l}^P = \mathbf{A}_P\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_P\,\mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s}$$

b) *über eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen*
(mit dem „Helmertschen Kunstgriff").

Hierbei wird das Signal **s** als unbekannter Parameter ($= \hat{\mathbf{s}}$) behandelt, und man erhält aus den beiden Fehlergleichungen, ohne das Modell zu ändern, sogleich

$$\begin{cases} -\mathbf{n} = \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\,\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{l} & (10) \\ \mathbf{s} = \mathbf{I}\,\hat{\mathbf{s}} - \lambda, \ (\text{mit } \lambda = \mathbf{v}) & (11) \end{cases}$$

mit den zuzuordnenden Gewichten $\mathbf{C}_{nn}^{-1}$ bzw. $\mathbf{C}_{ss}^{-1}$ gemäß (2) die Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{B}\,\hat{\mathbf{s}} &= \mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{l} \\ \mathbf{B}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{B}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{C}_{ss}^{-1})\,\hat{\mathbf{s}} &= \mathbf{B}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{l} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Auflösung ergibt mit $\mathbf{B}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{C}_{ss}^{-1} = \bar{\mathbf{P}}$ (13)

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{B}\,\bar{\mathbf{P}}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\,(\mathbf{I} - \mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{B}\,\bar{\mathbf{P}}^{-1}\,\mathbf{B}^T)\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{l} \tag{14}$$

und

$$\hat{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{P}}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,(\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{15}$$

sowie

$$\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}\,\bar{\mathbf{P}}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1})\,(\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{16}$$

und

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\bar{\mathbf{P}}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,(\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{17}$$

Daß (14) mit (6) und (15) mit (8) identisch sind, ist von Dr. *Schwarz* (1976) nach einem Vorgang von *Liebelt* (1967) bzw. *Rao* (1965) gezeigt worden. Im übrigen ergibt sich aus (10) mit (11), daß – entsprechend dem „jüngeren Gaußschen Beweis" – sowohl die Trendkoeffizienten $\hat{\mathbf{x}}$ wie auch die Signale $\hat{\mathbf{s}}$ minimale Varianzen besitzen und zudem auch erwartungstreue Schätzwerte sind, vgl. *Wolf* (1977).

Fehlerrechnung

a) Kontrollformel für (2), nämlich

$$\{\mathbf{n}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{n} + \mathbf{s}^T\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s}\}_{min} = \Omega = \mathbf{l}^T\,\bar{\mathbf{C}}^{-1}\,(\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{l}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{n} \tag{18}$$

b) Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit:

$$m_o = \sqrt{\Omega/(N-u)} \tag{19}$$

c) Mittlere Fehler m_{x_j} der Parameter $\hat{x}_j$, ($j = 1, 2, \ldots, u$): $m_{x_j} = m_o\sqrt{Q_{x_j x_j}}$

$Q_{x_j x_j}$ ist Diagonalelement der Matrix

$$\mathbf{E}_{xx} = (\mathbf{A}\,\bar{\mathbf{C}}^{-1}\,\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{B}\,\bar{\mathbf{P}}^{-1}\,\mathbf{B}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{A})^{-1} \tag{20}$$

d) Mittlere Fehler der Signale s_i:

$$m_{s_i} = m_o \sqrt{Q_{s_i s_i}}\ ,\ \text{wobei } Q_{s_i s_i} \text{ aus}$$

$$\mathbf{E}_{ss} = \mathbf{C}_{ss} (\mathbf{C}_{ss}^{-1} - \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A}\, \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{B})\, \mathbf{C}_{ss} \tag{21}$$

$$\text{bzw. } \mathbf{E}_{ss} = [\bar{\mathbf{P}}^{-1} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{A}\, (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \tag{22}$$

e) Mittlere Fehler der Signale s_k^P:

$$m_{s_k^P} = m_o \sqrt{Q_{s_k^P s_k^P}},\ \text{aus}$$

$$\mathbf{E}_{sPsP} = \mathbf{C}_{sPsP} - \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{B}\, \mathbf{C}_{sPs} + \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A}\, \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{B}\, \mathbf{C}_{sPs}^T \tag{23}$$

$$\text{bzw. } \mathbf{E}_{sPsP} = \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{C}_{ss}^{-1} [\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{A}\, (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{C}_{sPs}^T \tag{24}$$

f) Mittlere Fehler der interpolierten Größen l_k^P:

$$m_{l_k^P} = m_o \sqrt{Q_{l_k^P l_k^P}},\ \text{aus}$$

$$\mathbf{E}_{lPlP} = \mathbf{B}_P (\mathbf{C}_{sPs} - \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{B}\, \mathbf{C}_{sPs}^T)\, \mathbf{B}_P^T +$$

$$+ (\mathbf{A}_P - \mathbf{B}_P \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{A})\, \mathbf{E}_{xx} (\mathbf{A}_P^T - \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{B}\, \mathbf{C}_{sPs}^T \mathbf{B}_P^T) \tag{25}$$

bzw.

$$\mathbf{E}_{lPlP} = \mathbf{B}_P \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{C}_{ss}^{-1} [\bar{\mathbf{P}}^{-1} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{A}\, (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{C}_{sPs}^T + \mathbf{A}_P \mathbf{E}_{xx} \mathbf{A}_P^T$$

(Die jeweils an erster Stelle stehenden Formen sind über die bedingten Beobachtungen mit Unbekannten gefunden worden, und die an zweiter Stelle stehenden über den Helmertschen Kunstgriff.) Dr. *Schwarz* (1976) hat auch dargetan, daß die beiden Ausdrücke von (20) sowie (21) mit (22) voll identisch sind.

Ausdrücklich ist zu vermerken, daß wegen (11) die Matrix $\mathbf{E}_{ss}$ die Kovarianz der Größe

$$(\mathbf{s} + \lambda) = (\mathbf{s} + \mathbf{o}) \tag{26}$$

ist, wobei dem Wert $\lambda = \mathbf{o} = -E\{\mathbf{s}\}$ die Kovarianz $\mathbf{C}_{ss}$ zugeordnet wird. Damit zeigt sich, daß $\mathbf{E}_{ss}$ die Kovarianz für die Abweichungen $\mathbf{d}$ der einzelnen Signalwerte von ihrem Mittelwert $E\{\mathbf{s}\}$ darstellt: $\mathbf{E}_{ss} = \mathbf{E}_{dd}$; während die einzelnen Signalwerte selbst (ohne Bezugnahme auf ihren Erwartungswert) die Kovarianzen

$$\mathbf{E}_{ss}^o = \mathbf{C}_{ss} - \mathbf{E}_{ss},\ \text{bzw. } \mathbf{E}_{sPsP}^o = \mathbf{C}_{sPsP} - \mathbf{E}_{sPsP} \tag{27}$$

besitzen; vgl. hierzu auch *Wolf* (1968), S. 526, Gl. (433, 7).

Dieses vorstehend beschriebene allgemeine Modell kommt z. B. bei Winkelmessungen mit dem Theodolit in Frage, indem die Signalwerte s stets auf den Teilstrich, d. h. auf die Richtung bezogen sind, während der Winkel l als Differenz zweier Richtungen sich ausdrückt, so daß in den einzelnen Zeilen der Matrix **B** immer die Werte (–1, + 1) stehen.

Dieses verallgemeinerte Modell findet sich bei *Rummel* (1976) als „Modell II", bei *Schwarz* (1974) und bei *Wolf* (1974).

Auf dieser Basis ergeben sich dann als *Sonderfälle:*

1. **Die klassische Kollokation (B = I):**

Modell: $\mathbf{l} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{s} + \mathbf{n}$ (28)

Lösung: $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{C}}_o^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} \bar{\mathbf{C}}_o^{-1} \mathbf{l}$, worin $\bar{\mathbf{C}}_o = \mathbf{C}_{nn} + \mathbf{C}_{ss}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{C}_{nn} \bar{\mathbf{C}}_o^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}_{nn} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{s}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss} \bar{\mathbf{C}}_o^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}),\quad m_o \sqrt{\mathbf{l}^T \bar{\mathbf{C}}_o^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})/(N-u)}$$

$$\mathbf{s}_P = \mathbf{C}_{sPs} \bar{\mathbf{C}}_o^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{s}$$

bzw. (über den Helmertschen Kunstgriff), mit $\bar{\mathbf{P}}_o = \mathbf{C}_{nn}^{-1} + \mathbf{C}_{ss}^{-1}$:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_o \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{nn}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_o^{-1}) \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{l}$$

$$\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}}_o^{-1} \mathbf{C}_{nn}^{-1}) (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{s} = \bar{\mathbf{P}}_o \mathbf{C}_{nn}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})$$

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \bar{\mathbf{P}}_o^{-1} \mathbf{C}_{nn}^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{s}$$

Außer in den Arbeiten von Prof. *Moritz* findet sich dieses Modell noch bei *Koch* (1973, 1977), *Lauer* (1971), *Rapp* (1974), *Rummel* (1976) als „Modell I", *Tscherning* (1975), *Whittle* (1963) u. a.

2. **Die Prädiktion für unterbestimmte (geophysikalische) Probleme:**

Man setze **A** = **O** und erhält aus dem Allgemeinfall sogleich das *Modell:* $\mathbf{l} = \mathbf{B}\mathbf{s} + \mathbf{n}$ (29)

Lösung: $\mathbf{n} = \mathbf{C}_{nn} \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{C}_{nn} (\mathbf{B} \mathbf{C}_{ss} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{s}$

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l},\quad m_o \sqrt{\mathbf{l}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l}/N}$$

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{s}$$

bzw. (über den Helmertschen Kunstgriff):

$$\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1}) \mathbf{l}$$

$$\mathbf{s} = \bar{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{l}$$

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \bar{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{l}$$

Dieses Modell findet sich bei Prof. *Moritz* (1976) sowie bei *Reigber/Ilk* (1976), *Schwarz* (1976).

3. **Die „reine" Prädiktion (A = O, B = I, C_{nn} = O):**

Modell: $\mathbf{l} = \mathbf{s}$ (30)

Lösung: $\mathbf{s}^P = \mathbf{C}_{sPs} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{s}$, $\mathbf{n} = \mathbf{v}$, $m_o = \sqrt{\mathbf{l}^T \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{l}/N}$

Dieses Modell wurde von Prof. *Moritz* benutzt, dann auch von *Kraus* (1970) u. a.

4. **Die Prädiktion mit Noise ($\mathbf{A} = \mathbf{O}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$)**

Modell: $\mathbf{l} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$ (31)

Lösung: $\mathbf{n} = \mathbf{C}_{nn}\,\bar{\mathbf{C}}_o^{-1}\,\mathbf{l} = \mathbf{C}_{nn}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s}$

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss}\,\bar{\mathbf{C}}_o^{-1}\,\mathbf{l},\quad m_o = \sqrt{\mathbf{l}^T\bar{\mathbf{C}}_o^{-1}\,\mathbf{l}/N}$$

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{C}_{sPs}\,\bar{\mathbf{C}}_o^{-1}\,\mathbf{l} = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s}$$

bzw. (über den Helmertschen Kunstgriff):

$$\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{P}}_o\,\mathbf{C}_{nn}^{-1})\,\mathbf{l}$$

$$\mathbf{s} = \bar{\mathbf{P}}_o\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{l}$$

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\bar{\mathbf{P}}_o^{-1}\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{l} = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s}$$

Dieses Modell findet sich gleichfalls in den Arbeiten von Prof. *Moritz.*

5. **Die noisefreie allgemeine Kollokation ($\mathbf{C}_{nn} = \mathbf{O}$)**

Modell: $\mathbf{l} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{s}$ (32)

Lösung: $\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T(\mathbf{B}\,\mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T)^{-1}\,\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{A}^T(\mathbf{B}\,\mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T)^{-1}\,\mathbf{l}$, $\mathbf{n} = \mathbf{v}$

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\,\mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T)^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}),\quad m_o = \sqrt{\mathbf{l}^T(\mathbf{B}\,\mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T)^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}})/(N-u)}$$

$$\mathbf{s}_P = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\,\mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T)^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s}$$

6. **Die noisefreie klassische Kollokation ($\mathbf{B} = \mathbf{I}$, $\mathbf{C}_{nn} = \mathbf{O}$)**

Modell: $\mathbf{l} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{s}$ (33)

Lösung: $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{l}$

$$\mathbf{s} = (\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}),\quad m_o = \sqrt{\mathbf{l}^T\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{l}/(N}$$

$$\mathbf{s}^P = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,(\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s},\quad \mathbf{n} = \mathbf{v}$$

7. **Noisefreie Prädiktion aus Funktionswerten der Signale ($\mathbf{A} = \mathbf{O}$, $\mathbf{C}_{nn} = \mathbf{O}$)**

Modell: $\mathbf{l} = \mathbf{B}\mathbf{s}$ (34)

Lösung: $\mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\,\mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T)^{-1}\,\mathbf{l}$, $m_o = \sqrt{\mathbf{l}^T(\mathbf{B}\,\mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T)^{-1}\,\mathbf{l}/N}$

$$\mathbf{s}_P = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\,\mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{B}^T)^{-1}\,\mathbf{l} = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s},\quad \mathbf{n} = \mathbf{v}$$

8. **Die Bestimmung einer ausgleichenden linearen Funktion ($\mathbf{B} = \mathbf{O}$)**

Modell: $\mathbf{l} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{n}$ (35)

Lösung: $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,\mathbf{l}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{o},\quad \mathbf{s}^P = \mathbf{v},\quad m_o = \sqrt{\mathbf{l}^T\,\mathbf{C}_{nn}^{-1}\,(\mathbf{l} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}})/(N-u)}$$

Bei allen noisefreien Systemen existiert die Lösung über den Helmertschen Kunstgriff nicht, da wegen $\mathbf{C}_{nn} = \mathbf{O}$ dann $\mathbf{C}_{nn}^{-1}$ nicht definiert ist.

Die mittleren Fehler bzw. die $\mathbf{E}_{xx}$, $\mathbf{E}_{ss}$, $\mathbf{E}_{sPsP}$, $\mathbf{E}_{ss}^o$, $\mathbf{E}_{sPsP}^o$ und $\mathbf{E}_{lPlP}$ sind – aus Platzgründen – bei den Sonderfällen nicht einzeln angegeben, sie lassen sich aber mit den pp. Spezialisierungen unschwer aus dem Allgemeinfall entnehmen.

Zum 3. *Sonderfall* (= „reine Prädiktion") ist von Prof. *Bjerhammar* (1975) auch die *Umkehrung* angegeben worden: aus den $\mathbf{s}^P$ (unter Einführung einer Hilfsunbekannten $\mathbf{y} = \mathbf{C}_{ss}^{-1}\mathbf{s}$) die Signale $\mathbf{s}$ zurückzurechnen und von da aus auf dritte Werte $\mathbf{s}^g$ weiterzuinterpolieren (= „reflexive Prädiktion").

Liegen dabei die $\mathbf{s}^P$ in überschüssiger Anzahl vor, so daß man für sie die Residuen $\mathbf{n}^P$ und die Gewichte $\mathbf{P}_{nn} = (\mathbf{C}_{nn}^P)^{-1}$ in Ansatz zu bringen hat, so erhält man aus den diesbezüglichen Fehlergleichungen

$$\mathbf{s}^P + \mathbf{n}^P = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s}, \text{ oder } \mathbf{n}^P = \mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{y} - \mathbf{s}^P \tag{36}$$

gemäß

$$(\mathbf{n}^P)^T\,\mathbf{P}_{nn}\,\mathbf{n}^P = \min$$

die Normalgleichungen (wobei $\mathbf{C}_{sPs}$ vollen Rang besitze) zu

$$(\mathbf{C}_{sPs}^T\,\mathbf{P}_{nn}\,\mathbf{C}_{sPs})\,\mathbf{y} - \mathbf{C}_{sPs}^T\,\mathbf{P}_{nn}\,\mathbf{s}^P = \mathbf{v}$$

woraus (als Umkehrung) $\mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss}\mathbf{y}$ oder

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss}\,(\mathbf{C}_{sPs}^T\,\mathbf{P}_{nn}\,\mathbf{C}_{sPs})^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^T\,\mathbf{P}_{nn}\cdot\mathbf{s}^P \tag{37}$$

Sind dagegen die $\mathbf{y}$ (und damit die $\mathbf{s}$) in überschüssiger Anzahl vorhanden, so hat man als neue Bedingungsgleichungen:

$$\mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{y} - \mathbf{s}^P = \mathbf{v} \tag{38}$$

und man erhält aus

$$\mathbf{y}^T\,\mathbf{P}_y\,\mathbf{y} = \min$$

das folgende Normalgleichungssystem mit dem Korrelationsvektor $\mathbf{k}$:

$$(\mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{P}_y^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^T)\,\mathbf{k} - \mathbf{s}^P = \mathbf{v}$$

und aus den Korrelationsgleichungen schließlich:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_y^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^T\,\mathbf{k}, \text{ bzw. } \mathbf{s} = \mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{y} = \mathbf{C}_{ss}\,\mathbf{P}_y^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^T\,(\mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{P}_y^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^T)^{-1}\cdot\mathbf{s}^P \tag{39}$$

Der *praktisch-numerische Vorgang* bei der „reflexiven" Prädiktion ist dann der folgende:

1. Gegeben die n Werte $\mathbf{l}^P = \mathbf{s}^P$,

2. Berechnung der m *„Zwischenwerte"* $\mathbf{s}$ bzw. $\mathbf{y} = \mathbf{C}_{ss}^{-1}\mathbf{s}$, auf den willkürlich zu wählenden m *„Zwischenpunkten"* gemäß

$$\mathbf{y} = (\mathbf{C}_{sPs}^T\,\mathbf{P}_{nn}\,\mathbf{C}_{sPs})^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^T\,\mathbf{P}_{nn}\cdot\mathbf{s}^P, \text{ falls } n > m \tag{40}$$

bzw.

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_y^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^T\,(\mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{P}_y^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^T)^{-1}\cdot\mathbf{s}^P, \text{ falls } m > n \tag{41}$$

und bei $n = m$ wird, falls $\mathbf{C}_{sPs}$ regulär ist:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{sPs}^{-1}\cdot\mathbf{s}^P \tag{42}$$

3. Die eigentliche Interpolation der Werte $\mathbf{s}^g$ auf den k Neupunkten (in die m Zwischenpunkte) gemäß

$$\mathbf{s}^g = \mathbf{C}_{sgs}\,\mathbf{C}_{ss}^{-1}, \text{ bzw. } \mathbf{s}^g = \mathbf{C}_{sgs}\,\mathbf{y} \tag{43}$$

Erweitert man nun diese Theorie auf den Allgemeinfall (1), so findet man die **„verallgemeinerte reflexive Kollokation"** mit den folgenden Relationen (die mit $\mathbf{A}_P = \mathbf{O}$ und $\mathbf{B}_P = \mathbf{I}$ sogleich wieder in die obengenannten übergehen):

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{ss}^{-1}\,\mathbf{s} = (\mathbf{C}_{sPs}^{T}\,\mathbf{B}_{P}^{T}\,\mathbf{P}_{nn}\,\mathbf{B}_{P}\,\mathbf{C}_{sPs})^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^{T}\,\mathbf{B}_{P}^{T}\,\mathbf{P}_{nn}\,(\mathbf{l}^{P} - \mathbf{A}_{P}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{44}$$

bzw. $$\mathbf{y} = \mathbf{P}_{y}^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^{T}\,\mathbf{B}_{P}^{T}\,(\mathbf{B}_{P}\,\mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{P}_{y}^{-1}\,\mathbf{C}_{sPs}^{T}\,\mathbf{B}_{P}^{T})^{-1}\,(\mathbf{l}^{P} - \mathbf{A}_{P}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{45}$$

je nachdem, ob $n>m$ oder $m>n$ ist. Bei $n = m$ wird

$$\mathbf{y} = (\mathbf{B}_{P}^{T}\,\mathbf{C}_{sPs})^{-1}\,(\mathbf{l}^{P} - \mathbf{A}_{P}\,\hat{\mathbf{x}}) \tag{46}$$

sofern $(\mathbf{B}_{P}^{T}\mathbf{C}_{sPs})$ regulär ist. Der Wert $\hat{\mathbf{x}}$ läßt sich aus

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_{P}^{T}\,\bar{\mathbf{C}}_{P}^{-1}\,\mathbf{A}_{P})^{-1}\,\mathbf{A}_{P}\,\bar{\mathbf{C}}_{P}^{-1}\,\mathbf{l}^{P}$$

$$\text{mit } \bar{\mathbf{C}}_{P} = \mathbf{C}_{nn}^{P} + \mathbf{B}_{P}\,\mathbf{C}_{ss}^{P}\,\mathbf{B}_{P}^{T} \text{ (oder auch mit } \bar{\mathbf{C}}_{P} = \mathbf{I}) \tag{47}$$

berechnen; und die eigentliche Interpolation der k Neupunkte in die (künstlich geschaffenen) m Zwischenpunkte, welche die **y**-Werte tragen, liefert für die Neupunkte:

$$\mathbf{l}^{g} = \mathbf{A}_{g}\,\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_{g}\,\mathbf{C}_{sPs}\,\mathbf{y} \tag{48}$$

Aus diesem Allgemeinfall (44) bis (48) können dann wieder Sonderfälle der reflexiven Kollokation bzw. Prädiktion abgeleitet werden.

Literatur

Bjerhammar, A.: Reflexive Prediction. Verm., Phot. u. Kulturt. 1975, S. 243 ff.

Koch, K.-R.: Höheninterpolation mittels gleitender Schrägebene und Prädiktion. Verm., Phot. u. Kulturt., Mitteilungsbl. 1973, S. 229 ff.

Koch, K.-R.: Least Squares Adjustment and Collocation. Bull. Géod. 1977, S. 127 ff.

Kraus, K.: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. ZfV 1970, S. 387 ff.

Lauer, S.: Über die stochastischen Eigenschaften lokaler Schwereanomalien und ihre Prädiktion (Diss. Bonn). Bonn 1971.

Liebelt, P. B.: An Introduction to Optimal Estimation. Reading/Menlo Park/London/Ontario 1967, S. 30.

Moritz, H.: Statistische Methoden in der gravimetrischen Geodäsie. ZfV 1963, S. 409 ff.

Moritz, H.: A Generalized Least Squares Model. Stud. geoph. geod. *14* (1970), S. 353 ff.

Moritz, H.: Least-Squares Collocation as a Gravitational Inverse Problem. Columbus (Ohio) 1976.

Rao, R. C.: Linear Statistical Inference and its Applications. New York/London/Sydney/Toronto 1965.

Rapp, R. H.: Gravity Anomaly Recovery from Satellite Altimetry Data Using Least Squares Collocation Techniques. Columbus (Ohio) 1974.

Reigber, Ch./Ilk, K. H.: Vergleich von Resonanzparameterbestimmungen mittels Ausgleichung und Kollokation. ZfV 1976, S. 59 ff.

Rummel, R.: A Model Comparison in Least Squares Collocation. Bull. Géod. 1976, S. 181 ff.

Schwarz, K.-P.: Combination of Spatial Networks Using an Estimated Covariance Matrix. Bull. Géod. 1974, S. 171 ff.

Schwarz, K.-P.: Least Squares Collocation for Large Systems. Boll. d. Geod. e Sc. Aff. 1976 a, S. 309 ff.

Schwarz, K.-P.: Numerische Probleme bei der Bestimmung des globalen Erdschwerefelds durch Kollokation. ZfV 1976 b, S. 221 ff.

Tscherning, C. C.: Determination of Datum-Shift Parameters Using Least Squares Collocation. København/Siena 1975.

Whittle, P.: Prediction and Regulation by Linear Least-Squares Methods. Suffolk 1963.

Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bonn 1968.

Wolf, H.: Über verallgemeinerte Kollokation. ZfV 1974, S. 475 ff.

Wolf, H.: Das geodätische Gauß-Helmert-Modell und seine Eigenschaften (In Vorbereitung) 1977. ZfV.