

Paper-ID: VGI\_197805



## Zur Geometrie des normalen Schwerefeldes

Hans Sünkel <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Erdmessung und Physikalische Geodäsie der Technischen Universität Graz, Steyrergasse 17, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **66** (2), S. 71–85

1978

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Suenkel_VGI_197805,  
Title = {Zur Geometrie des normalen Schwerefeldes},  
Author = {S{"u"}nkel, Hans},  
Journal = {"Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {71--85},  
Number = {2},  
Year = {1978},  
Volume = {66}  
}
```



*Schwarz, K. P. (1975):* Zonal harmonic coefficients by least-squares collocation using satellite and gravimetric data. Mitteilungen der geodätischen Institute der TU Graz, Folge 20.

*Schwarz, K. P. (1976):* Geodetic accuracies obtainable from measurements of first and second order gravitational gradients. OSU Report No. 242, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

*Schwarz, K. P. (1977):* Airborne inertial systems for gravity determination in ocean areas. Proceedings of the 1st International Symposium on Inertial Technology for Surveying and Geodesy, Ottawa.

*Schwarz, K. P. and J. Kryński (1977):* Improvement of the geoid in local areas by satellite gradiometry. Bulletin Géodésique, vol. 51, pp. 163–176.

*Sünkel, H. (1977a):* Spline functions and geodetic integral formulas. Vorgelegt beim International Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks, Sopron.

*Sünkel, H. (1977b):* Die Darstellung geodätischer Integralformeln durch bikubische Spline-Funktionen. Mitteilungen der geodätischen Institute der TU Graz, Folge 28.

## Zur Geometrie des normalen Schwerfeldes

Von *Hans Sünkel*, Graz

### Zusammenfassung

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden für ein rotierendes Bezugsellipsoid die Beziehungen zwischen Normalschwerelinien, Isozenithlinien und Normalotlinien anhand der verschiedenen Formulierungen der Randbedingung der physikalischen Geodäsie gezeigt. Der zweite Teil zeigt für ein nichtrotierendes Bezugsellipsoid die Zusammenhänge zwischen Normalschwerelinien, Äquigravitationslinien und Isozenithlinien im gewöhnlichen physikalischen Raum sowie im Schwereraum.

### 1. Einleitung

Das letzte Jahrzehnt war für die physikalische Geodäsie zu einem guten Teil gekennzeichnet vom Streben nach einer mathematisch strengen Formulierung und Lösung des nun bereits klassischen Randwertproblems der physikalischen Geodäsie: der Bestimmung der physikalischen Erdoberfläche bei vollständiger Kenntnis des Schwerepotentials und des Schwerevektors auf dieser Fläche. Die bisherigen einschlägigen Arbeiten auf diesem Gebiet sind gekennzeichnet durch Approximationen, welche zwar keinerlei praktische Konsequenzen zur Folge haben, jedoch eine strenge Formulierung verhindern. Es ist das Verdienst von T. Krarup (1973) und P. Meissl (1971), das Randwertproblem streng formuliert und linearisiert zu haben. Wesentlich

dabei ist der mathematische Ausdruck für die Randbedingung, worin bei verschiedenen Formulierungen Ableitungen entlang von unterschiedlichen Linien enthalten sind. Die geometrischen Eigenschaften dieser Linien wollen wir im Kapitel 2 diskutieren. Einschlägige Untersuchungen auf diesem Gebiet findet man in (Grafarend, 1977) und (Marussi, 1974).

Eine gänzlich neue Formulierung des geodätischen Randwertproblems wurde vor kurzem von F. Sansò (1977 a, b) gegeben. Der Grundgedanke war, die Abhängigkeit des Schwerevektors vom Ortsvektor umzukehren, was gleichbedeutend ist mit dem Übergang von kartesischen zu krummlinigen Koordinaten im gewöhnlichen physikalischen Raum oder aber mit dem Beibehalten der kartesischen Koordinaten in einem Schwereraum, der durch Schwerevektoren aufgespannt ist. Die Transformation ist allerdings nur für nichtrotierende gravitierende Körper eindeutig. Wir zeigen im dritten Kapitel die geometrischen Eigenschaften von Koordinatenlinien, Äquigravitationslinien und Isozenithallinien in der Beziehung zwischen dem gewöhnlichen Raum und dem Schwereraum daher nur für ein nichtrotierendes Bezugsellipsoid.

## 2. Randbedingung und ausgezeichnete Linien

Die übliche Linearisierung des Problems von Molodenski erfolgt über eine der physikalischen Erdoberfläche ähnliche und ihr benachbarte Fläche, genannt Telluroid. In der herkömmlichen Definition ist das Telluroid eine Fläche, welche der Erdoberfläche so zugeordnet wird, daß entsprechende Punkte auf der (streng genommen nicht bekannten) Ellipsoidnormalen liegen und das Normalpotential eines Telluroidpunktes gleich dem tatsächlichen Schwerepotential des zugeordneten Punktes auf der Erdoberfläche ist. Es gibt daher eine im allgemeinen nicht verschwindende Schwereanomalie  $\Delta g$ , während zufolge der obigen Definition die Potentialanomalie  $\Delta W$  gänzlich verschwindet (wenn man von einem konstanten Maßstabsfaktor absieht).

Krarup gab 1973 eine wesentlich allgemeinere Definition des Telluroids, wonach anstelle der bisherigen Zusatzforderungen (Punktzunordnung über Ellipsoidnormale,  $\Delta W = 0$ ) lediglich eine eindeutige, ansonst aber beliebige, Punktzunordnung tritt.

Die Randbedingung für dieses allgemeine Telluroid lautet im System der kartesischen Koordinaten (Krarup, 1973):

$$T + m_i \nabla_i T = \Delta W + m_i \Delta g_i \quad (2-1)$$

$$\text{mit } \gamma_i = - \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} m_j ,$$

- $x_i$  ... kartesische Koordinaten
- $\gamma_i$  ... Komponenten des Normalschwerevektors im System  $\{x_i\}$
- $\Delta g_i$  ... Komponenten des Schwereanomalie-Vektors im System  $\{x_i\}$
- $U$  ... normales Schwerepotential
- $T$  ... Störpotential ( $T = W-U$ )
- $\Delta W$  ... Schwerepotentialanomalie.

Gleichung (2-1) stellt die Randbedingung für das linearisierte Molodenski-Problem dar; ihre Ähnlichkeit mit der uns vertrauten Form der Randbedingung ist nur vage gegeben. Wesentlich deutlicher wird sie jedoch, wenn wir von den geradlinigen kartesischen Koordinaten  $\{x_i\}$  auf das System der krummlinigen Koordinaten  $\{\gamma_i\}$  übergehen:

$$T - \gamma_i \frac{\partial T}{\partial \gamma_i} = \Delta W + m_i \Delta g_i \quad (2-2)$$

In (2-2) ist also unter anderem das Störpotential nach den krummlinigen Koordinatenlinien  $\gamma_i$  abzuleiten. Wir wollen uns daher ein wenig mit diesen Koordinatenlinien beschäftigen.

### 2.1 Die $\gamma_i$ -Koordinatenlinien

Die kartesischen Komponenten  $\gamma_i$  des Normalschwerevektors  $\underline{\gamma}$  sind durch

$$\gamma_i = - \nabla_i U = - \nabla_i (V + \Phi) \quad (2-3)$$

vom Normalpotential abhängig. Dessen Rotationssymmetrie erlaubt es uns, alle Ableitungen in einer Meridianebene durchzuführen. Als ausgezeichnete Meridianebene wählen wir vorzugsweise die Ebene  $\lambda = 0$ . Damit verschwindet aber die zweite Komponente  $\gamma_2$  sowie  $x_2$ , sodaß nur mehr folgende Abhängigkeiten gegeben sind:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_1(x_1, x_3) & x_1 &= x_1(\gamma_1, \gamma_3) \\ \gamma_3 &= \gamma_3(x_1, x_3) & x_3 &= x_3(\gamma_1, \gamma_3) \end{aligned} \quad (2-4)$$

Die  $\gamma_i$ -Koordinatenlinien in dieser Nullmeridianebene sind daher definiert durch  $\gamma_3 = \text{const.}$  ( $\gamma_1$ -Linie) und  $\gamma_1 = \text{const.}$  ( $\gamma_3$ -Linie). Stellen wir das normale Gravitationspotential  $V$  vorteilhafterweise als Funktion der Kugelkoordinaten  $(r, \Theta, \lambda)$  dar, so sind die Komponenten des Normalschwerevektors durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(r, \theta) &= \sin\theta \frac{\partial V}{\partial r} + \cos\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \omega^2 r \sin\theta \\ \gamma_3(r, \theta) &= \cos\theta \frac{\partial V}{\partial r} - \sin\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2-5)$$

gegeben (Heiskanen-Moritz, 1967, S. 230).

Da das Gravitationspotential des Bezugsellipsoids nur gering von dem eines Massenpunktes abweicht, konvergiert die Kugelfunktionsreihe sehr rasch. Wir wollen lediglich das Verhalten der  $\gamma$ -Koordinatenlinien beschreiben und begnügen uns daher mit einer Reihenentwicklung bis zum 2. Grad:

$$V(r, \theta) \doteq \frac{kM}{r} \left[ 1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 P_2(\cos\theta) \right].$$

Führen wir die in (2-5) geforderten Differentiationen durch, so erhalten wir den folgenden Ausdruck:

$$\gamma_1(r, \theta) = -\frac{kM}{r^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 (1 - 5\cos^2\theta) \right] \sin\theta + \omega^2 r \sin\theta \quad (2-5)'$$

$$\gamma_3(r, \theta) = -\frac{kM}{r^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 (3 - 5\cos^2\theta) \right] \cos\theta.$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich nun auf sehr einfache Weise durch Transformation in Abhängigkeit der kartesischen Koordinaten  $x_1, x_3$  darstellen ( $x = r = (x_1^2 + x_3^2)^{1/2}$ ):

$$\gamma_1(x_1, x_3) = -\frac{kM}{x^3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 J_2 \left[ 1 - 5 \left(\frac{x_3}{x}\right)^2 \right] \right\} x_1 + \omega^2 x_1 \quad (2-5)''$$

$$\gamma_3(x_1, x_3) = -\frac{kM}{x^3} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 J_2 \left[ 3 - 5 \left(\frac{x_3}{x}\right)^2 \right] \right\} x_3.$$

Die Gleichungen der  $\gamma_1$ - und  $\gamma_3$ -Linien lassen sich allerdings einfacher über (2-5)' herleiten und daher in Kugelkoordinaten (bzw. Polarkoordinaten) angeben. Das System (2-5)' ist nichtlinear; wir wählen daher ein Iterationsverfahren.

Entlang der  $\gamma_1$ -Linie ist  $\gamma_3 = \text{const.} = -c_3$ . Da das 2. Glied im Klammerausdruck von (2-5)' wesentlich kleiner als 1 ist, genügt es, für die Größe  $\cos\theta/r^2$  eine Näherung einzuführen, welche durch sphärische Approximation erhalten wird:

$$\frac{1}{r^2} \cos\theta \doteq \frac{c_3}{kM}.$$

Somit lauten die Polarkoordinatendarstellungen der  $\gamma_1$ -Linien:

$\gamma_1$ -Linien:

$$r_1(\theta; \gamma_3) = \left\{ -\frac{kM}{\gamma_3} \cos\theta - \frac{3}{2} a^2 J_2 (-3 + 5\cos^2\theta) \right\}^{1/2} \quad (2-6)$$

$\gamma_3$ -Linien:

$$r_3(\theta; \gamma_1) = \left\{ -\frac{kM}{\gamma_1} \sin\theta - \frac{3}{2} a^2 J_2 (-1 + 5\cos^2\theta) - \omega^2 \left[ \frac{(kM)^3 \sin^5\theta}{\gamma_1} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

Figur 1 zeigt  $\gamma_1$ - und  $\gamma_3$ -Linien im System der kartesischen Koordinaten für das Bezugsellipsoid.

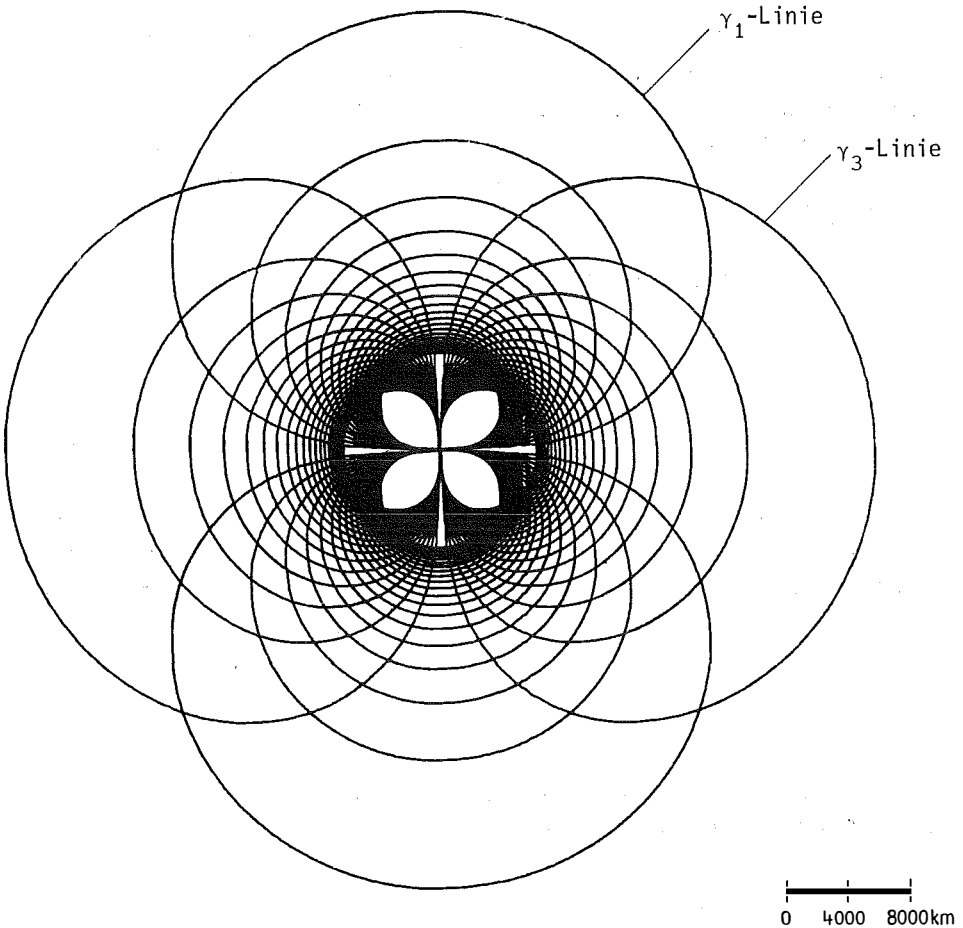


Fig. 1  $\gamma$ -Koordinatenlinien

### 2.2 Die Isozenithallinien

Die Randbedingung (2-2) ist von noch recht komplizierter Bauart, besonders was die Ableitung nach den (auch in Ellipsoidnähe) stark gekrümmten  $\gamma$ -Koordinatenlinien betrifft. Ein eleganter Ausweg aus diesem Dilemma eröffnet sich durch die Einführung von sogenannten Quasi-Kugelkoordinaten ( $\rho, \phi, \lambda$ ), welche mit den Komponenten  $\gamma$  des Normalschwerevektors in folgender Verbindung stehen:

$$\gamma_i = \gamma \ell_i = - \frac{kM}{\rho^2} \ell_i \quad (2-7)$$

$$\text{mit } \underline{\ell}^T := (\cos\phi\cos\lambda, \cos\phi\sin\lambda, \sin\phi) .$$

Der Einheitsfaktor  $\underline{\ell}$  gibt die Richtung des Normalschwerevektors  $\underline{\gamma}$  an. Da im Falle des nichtrotierenden Massenpunktes die Größe  $\rho$  in Gleichung (2-7) exakt mit dem Abstand  $r$  vom Ursprung übereinstimmt, und das Ellipsoidpotential nur geringfügig von dem eines Massenpunktes abweicht, wird auch hier  $\rho$  eine ähnliche Bedeutung wie  $r$  besitzen; daher wohl die Bezeichnung Quasi-Kugelkoordinaten.

In diesem Koordinatensystem kann die Randbedingung (2-2) in folgender Form dargestellt werden (Moritz, 1977):

$$T + \frac{\rho}{2} \frac{\partial T}{\partial \rho} = \Delta W + m_i \Delta g_i . \quad (2-8)$$

Die Ableitung des Störpotentials nach  $\rho$  ist gleichbedeutend mit der Ableitung entlang einer Linie konstanter Zenitdistanz; eine solche Linie heißt Isozenithallinie.

Aus Symmetriegründen führen wir wie bisher die Ableitungen in der Ebene des Nullmeridians durch, sodaß wir auf Grund der Forderung konstanter Zenitdistanz bereits die Gleichung der Isozenithallinie direkt angeben können:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_3} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_3}} = \text{const.} = \tan\theta_0 . \quad (2-9)$$

Setzen wir in (2-9) für  $\gamma_1$  und  $\gamma_3$  (2-5) ein, so lautet eine implizite Gleichung der Isozenithallinie in Polarkoordinaten ( $r, \theta$ ):

$$\frac{\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2(-1 + 5\cos^2\theta)\right] - \frac{\omega^2 r^3}{kM}}{\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2(-3 + 5\cos^2\theta)\right]} \tan\theta = \tan\theta_0 . \quad (2-10)$$

(Die Kugelfunktionsreihe für das normale Gravitationspotential wurde auch hier beim Grad 2 abgebrochen.) Da in den beiden obigen Klammerausdrücken das zweite Glied stets sehr klein ist verglichen mit 1, können wir eine Reihenentwicklung durchführen und erhalten so bei Vernachlässigung von Gliedern in der Größenordnung von  $J_2^2$

$$\frac{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2(-1 + 5\cos^2\theta)}{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2(-3 + 5\cos^2\theta)} = 1 - 3\left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 . \quad (2-11 a)$$

In Ellipsoidnähe ist das Glied  $\frac{\omega^2 r^3}{kM} = 0(J_2)$ , daher gilt

$$\frac{\omega^2 r^3}{kM} \left[ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 (-3 + 5 \cos^2 \theta) \right]^{-1} \doteq \frac{\omega^2 r^3}{kM} . \quad (2-11 b)$$

Setzen wir (2-11 a, b) in (2-10) ein, so lautet schließlich die Gleichung der Isozenithallinie in Ellipsoidnähe in impliziter Form:

$$\tan \theta = \tan \theta_o \left[ 1 + 3 \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 + \frac{\omega^2 r^3}{kM} \right] . \quad (2-10)'$$

Es scheint an dieser Stelle angebracht zu sein, auf den Sonderfall der nichtrotierenden Niveaueugel hinzuweisen: in diesem Fall ist  $J_2 = 0$  und  $\omega = 0$ ; d. h.  $\tan \theta = \tan \theta_o$ , was gleichbedeutend ist mit  $\theta = \theta_o = \text{const}$ . Die Isozenithallinien entarten also zu Geraden. Die Krümmlichkeit der Isozenithallinien des Bezugsellipsoids wird daher vor allem durch  $\omega$  und  $J_2$  hervorgerufen. Wie stark die Krümmung ist, erfahren wir durch Untersuchung der Richtungsänderung der Isozenithallinie mit zunehmender Bogenlänge (zunehmender Höhe über dem Ellipsoid):

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r} \cos^2 \theta \tan \theta_o \left[ -6 \left(\frac{a}{r}\right)^2 J_2 + \frac{3\omega^2 r^3}{kM} \right] . \quad (2-12)$$

Wir machen nun von der sphärischen Approximation Gebrauch und ersetzen (in Ellipsoidnähe)  $r$  durch  $R \doteq a$  und weiters  $dr$  durch  $dh$  (Element der Höhe über dem Ellipsoid):

$$d\theta = \frac{1}{2} \frac{dh}{R} \sin 2\phi_o \left[ -6J_2 + \frac{3\omega^2 a^3}{kM} \right] . \quad (2-12)'$$

Der Klammerausdruck in (2-12)' läßt sich im Rahmen der durchgeführten Approximation noch weiter vereinfachen zu

$$\begin{aligned} -6J_2 + \frac{3\omega^2 a^3}{kM} &\doteq 3e^2 - 15J_2 \doteq 3e^2 - 5e^1{}^2 + 5m \\ &\doteq 2(f^* - f) \end{aligned} \quad (2-13)$$

mit  $f \dots$  geometrische Abplattung,  $f^* \dots$  Schwereabplattung. Bezeichnen wir mit  $\phi_o$  die geodätische Breite eines Ellipsoidpunktes, so kann die Abweichung der Richtung der Isozenithallinie von der Ellipsoidnormalen für einen Punkt mit der geodätischen Höhe  $h$  durch folgende einfache Beziehung ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{h}{R} (f^* - f) \sin 2\phi_o \\ &= 0''06 h_{km} \cdot \sin 2\phi_o . \end{aligned} \quad (2-14)$$

Die Isozenithallinien sind im Falle eines rotierenden Bezugsellipsoids daher stets bezüglich des Äquators konkav gekrümmt. Gleichung (2-12)' können wir entnehmen, daß der Einfluß des  $\omega$ -Gliedes etwa doppelt so stark ist wie der



des  $J_2$ -Gliedes. Die Krümmung der Isozenithallinien wird daher hauptsächlich durch  $\omega$  bestimmt. Im Falle des nichtrotierenden Ellipsoids sind die Isozenithallinien zwar konvex bezüglich des Äquators gekrümmt, die Krümmung jedoch ist äußerst gering und nimmt mit zunehmender Entfernung vom Ellipsoid rasch ab. Die Isozenithallinien gehen daher in gerade Linien über. Die Figur 2 zeigt Scharen von Isozenithallinien und Lotlinien für das Bezugsellipsoid 1967.

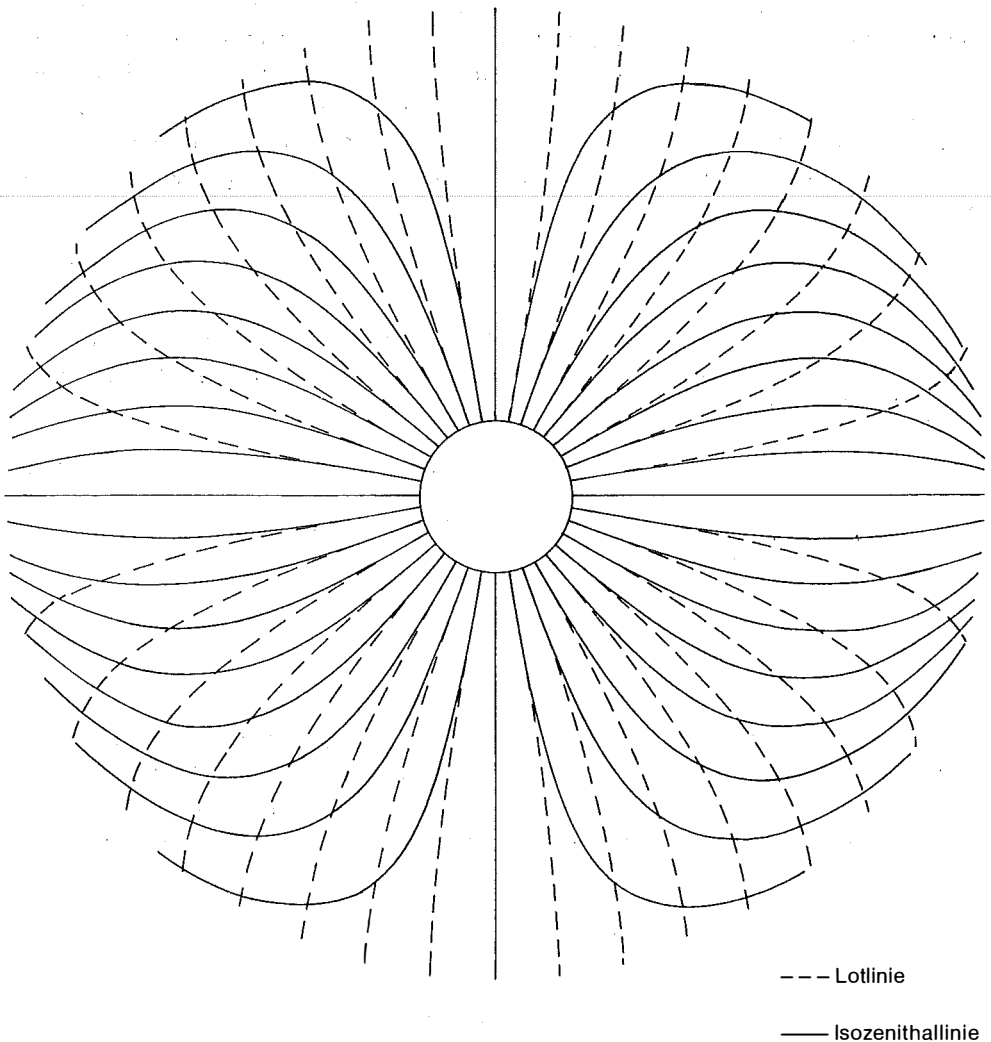


Fig. 2 Lotlinien und Isozenithallinien

Die Gleichung (2–8), in der die Ableitung  $\partial T / \partial p$  vorkommt (das ist die Ableitung entlang der eben diskutierten Isozenithallinie), kann noch ein wenig vereinfacht werden durch den Übergang auf die Bogenlänge  $\tau$  der Isozenithallinie (Moritz, 1977):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} T = - \Delta g' - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \Delta W . \tag{2-15}$$

( $\Delta g'$  ist hier die Projektion des Schwereanomalienvektors auf den Tangenteneinheitsvektor an die Isozenithallinie.)

### 2.3 Die Normalotlinien

Wählen wir als Telluroid das „Marussi-Telluroid“ mit  $\Delta W = 0$ , so sehen wir die große Ähnlichkeit der für das linearisierte Molodenski-Problem *streng* gültigen Randbedingung (2–15) mit der herkömmlichen *approximativ* gültigen (Heiskanen-Moritz, 1967)

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T = - \Delta g . \tag{2-16}$$

$h$  bezeichnet in diesem Zusammenhang die Ableitung entlang der normalen Lotlinie. An dieser Stelle scheint es angebracht, auf die Abweichung der Normalotlinie von der Isozenithallinie hinzuweisen. Die Richtungsdifferenz zwischen der Ellipsoidnormalen und der Normalotlinie ist durch

$$\delta \phi = - \frac{h}{R} f^* \sin 2\phi_0 = - 0.17 h_{\text{km}} \sin 2\phi_0 \tag{2-17}$$

(Heiskanen-Moritz, 1967, S. 196) gegeben. Der Vergleich mit Gleichung (2–14) zeigt, daß die Richtungsdifferenz zwischen Lotlinie und Ellipsoidnormale – obgleich sehr gering – etwa  $3 \times$  so groß ist wie die Differenz zwischen Isozenithallinie und Ellipsoidnormale und überdies entgegengesetztes Vorzeichen besitzt. Die Lotlinie ist im Falle des rotierenden Bezugsellipsoids bezüglich des Äquators konvex gekrümmt (siehe Figur 2).

### 2.4 Äquigravitationslinien

Im normalen physikalischen Raum spielen die Äquigravitationslinien zwar keine besondere Rolle, von Interesse sind sie allerdings im Schwereraum, mit dem wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen werden.

Die Äquigravitationslinien, welche wir wieder in der Nullmeridianebene diskutieren werden, sind gekennzeichnet durch den konstanten Betrag der normalen Gravitation  $\bar{\gamma}$  entlang der Linie und genügen daher mit  $x := (x_1^2 + x_3^2)^{1/2}$  der Gleichung

$$\bar{\gamma}(x, \theta) = [\bar{v}_i V(x, \theta) \nabla_i V(x, \theta)]^{1/2} = \text{const.} \tag{2-18}$$

Wir suchen eine Parameterdarstellung der Äquigravitationslinien in der Form

$$x_1 = x_1(\phi; \bar{\gamma}) \quad , \quad x_3 = x_3(\phi; \bar{\gamma})$$

und benötigen dazu zunächst Ausdrücke für  $\bar{\gamma}_1(x_1, x_3)$ ,  $\bar{\gamma}_2(x_1, x_3)$  und  $\bar{\gamma}(x_1, x_3)$ . Die beiden ersteren werden uns mit  $\omega = 0$  direkt durch (2–5)“ geliefert, den letzten erhalten wir durch  $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_1^2 + \bar{\gamma}_3^2)^{1/2}$  ;

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1(x_1, x_3) &= -\frac{kM}{x^3} x_1 \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 J_2 \left[ 1 - 5 \left(\frac{x_3}{x}\right)^2 \right] \right\} \\ \bar{\gamma}_3(x_1, x_3) &= -\frac{kM}{x^3} x_3 \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 J_2 \left[ 3 - 5 \left(\frac{x_3}{x}\right)^2 \right] \right\} \\ \bar{\gamma}(x_1, x_3) &= \frac{kM}{x^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 J_2 \left[ 1 - 3 \left(\frac{x_3}{x}\right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-19)$$

Die entsprechenden Gleichungen für den Massenpunkt ergeben sich trivialerweise aus (2–19) mit  $J_2 = 0$ :

$$\bar{\gamma}_1^o = -\frac{kM}{x^3} x_1 \quad , \quad \bar{\gamma}_3^o = -\frac{kM}{x^3} x_3 \quad , \quad \bar{\gamma}^o = \frac{kM}{x^2} . \quad (2-20)$$

Da die  $J_2$  enthaltenden Terme in (2–19) sehr klein sind verglichen mit 1, genügt es, im Rahmen der hier ohnehin enthaltenen Approximation die sphärischen Ausdrücke (2–20) einzusetzen. Wir ersetzen daher im geschwungenen Klammerausdruck  $1/x^2$  durch  $\bar{\gamma}/kM$  sowie  $(x_3/x)^2$  durch  $(\bar{\gamma}_3/\bar{\gamma})^2$ . Damit erhält die dritte Gleichung aus (2–19) die Form

$$\bar{\gamma}(x, \bar{\gamma}_3) = \frac{kM}{x^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{a^2 \bar{\gamma}}{kM} J_2 \left[ 1 - 3 \left(\frac{\bar{\gamma}_3}{\bar{\gamma}}\right)^2 \right] \right\} . \quad (2-21)$$

Die Auflösung nach  $x$  erfolgt durch Reihenentwicklung des entsprechenden Wurzelausdruckes und Abbruch nach dem linearen Glied und liefert

$$x(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_3) = \left(\frac{kM}{\bar{\gamma}}\right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{a^2 \bar{\gamma}}{kM} J_2 \left[ 1 - 3 \left(\frac{\bar{\gamma}_3}{\bar{\gamma}}\right)^2 \right] \right\} . \quad (2-22)$$

Nun können wir die ersten beiden Gleichungen aus (2–19) nach  $x_1$  bzw.  $x_3$  auflösen und erhalten

$$x_1(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_3) = - \left(\frac{kM}{\gamma}\right)^{1/2} \bar{\gamma}_1 \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{a^2 \bar{\gamma}}{kM} J_2 \left[ 1 + \left(\frac{\bar{\gamma}_3}{\bar{\gamma}}\right)^2 \right] \right\} \tag{2-23}$$

$$x_3(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_3) = - \left(\frac{kM}{\gamma}\right)^{1/2} \bar{\gamma}_3 \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{a^2 \bar{\gamma}}{kM} J_2 \left[ - 3 + \left(\frac{\bar{\gamma}_3}{\bar{\gamma}}\right)^2 \right] \right\} .$$

Beachten wir die Beziehung

$$\bar{\underline{Y}} = - \bar{\gamma} \begin{bmatrix} \cos \bar{\phi} \\ 0 \\ \sin \bar{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_2 \\ \bar{\gamma}_3 \end{bmatrix} , \tag{2-24}$$

welche für die Nullmeridianebene gilt (die Richtung des normalen Gravitationsvektors ist durch  $-(\cos \phi, 0, \sin \phi)$  gegeben), so finden wir schließlich die gewünschte Parameterdarstellung der Äquigravitationslinien:

$$x_1(\bar{\phi}; \bar{\gamma}) = \left(\frac{kM}{\gamma}\right)^{1/2} \cos \bar{\phi} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{a^2 \bar{\gamma}}{kM} J_2 (1 + \sin^2 \bar{\phi}) \right] \tag{2-23}'$$

$$x_3(\bar{\phi}; \bar{\gamma}) = \left(\frac{kM}{\gamma}\right)^{1/2} \sin \bar{\phi} \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{a^2 \bar{\gamma}}{kM} J_2 (- 3 + \sin^2 \bar{\phi}) \right] .$$

### 3. Ausgezeichnete Linien im Schwereraum

Vor kurzem wurde das Problem von Molodenski in ein völlig neues Licht gerückt, als es F. Sansò (1977 a) gelang, das Randwertproblem im sogenannten Schwereraum neu zu formulieren. Dabei ist der Schwereraum ein Raum, der von den Schwerevektoren aufgespannt wird, ähnlich wie der normale physikalische Raum (in dem die gesamte Geodäsie beschrieben ist) von den Ortsvektoren aufgespannt wird.

Das Wesentliche des neuartigen Ansatzes besteht im Rollentausch zwischen Ortsvektor und Schwerevektor. Damit deren gegenseitige Beziehung im gesamten physikalischen Außenraum eindeutig ist, muß eine nichtrotierende Erde angenommen werden. Diese Einschränkung hat keine ernsthaften praktischen Konsequenzen, da wir auch bei nicht allzu genauer Ortskenntnis den Einfluß der Rotation aus den Messungen mit hinreichender Genauigkeit filtern können.

Wir wollen hier nur die ausgezeichneten Linien im Schwereraum diskutieren; der interessierte Leser sei auf die einzigartigen Arbeiten von F. Sansò

(1977 a, b; 1978) und H. Moritz (1977) verwiesen, worin die gesamten bisherigen theoretischen Entwicklungen im Schwererraum niedergelegt sind.

### 3.1 Die $\bar{\gamma}_i$ -Koordinatenlinien

Wir haben im Kapitel 2.1 die Beziehung zwischen dem orthogonalen System der (geradlinigen) kartesischen Koordinaten  $\{x_i\}$  und dem im physikalischen Raum krummlinigen System der Schwerekoordinaten  $\{\gamma_i\}$  abgeleitet. Im Schwererraum sind, wie wir bereits erwähnten, die Rollen von Orts- und Schwerevektor vertauscht; das heißt aber, daß im Schwererraum die  $\bar{\gamma}_i$ -Koordinatenlinien geradlinig sind und zu kartesischen Koordinaten werden

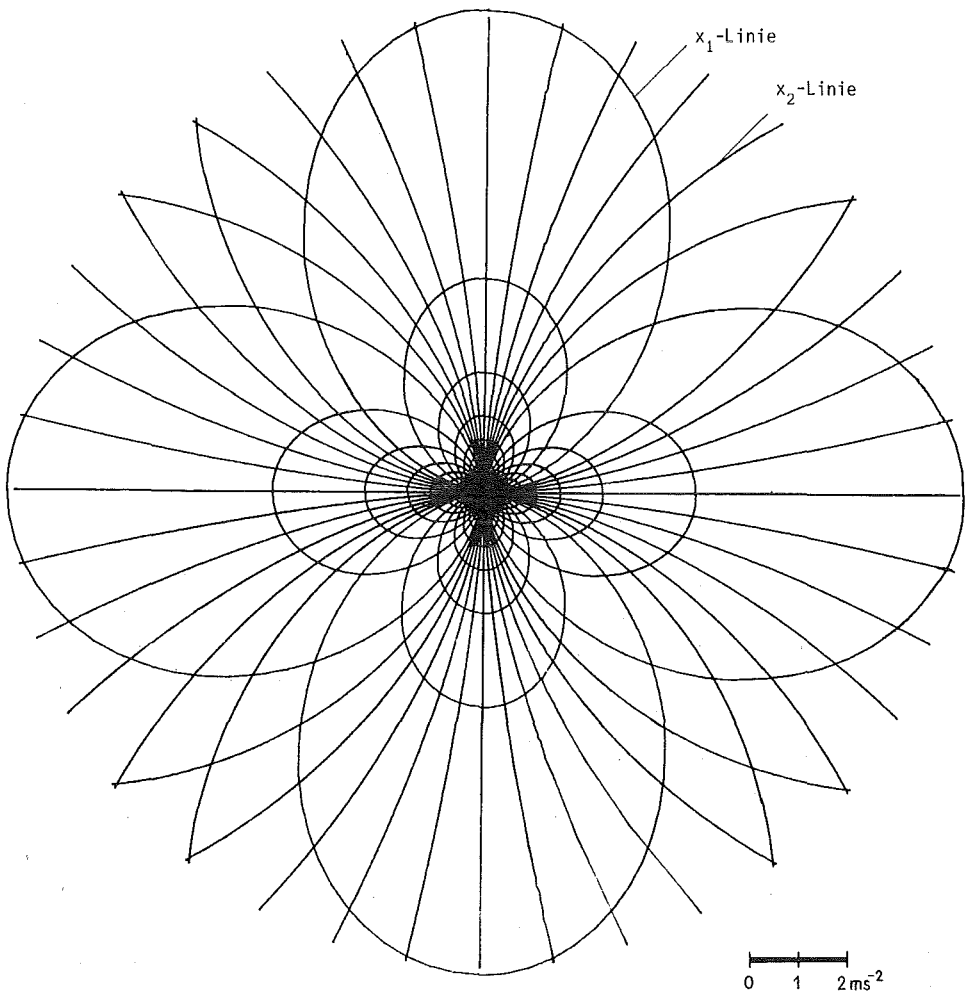


Fig. 3  $x_i$ -Koordinatenlinien im Schwererraum

(da wir aus Gründen der Eindeutigkeit Rotationsfreiheit gefordert haben, haben wir es hier nicht mit Schwerekoordinaten  $\gamma_i$ , sondern mit Gravitationskoordinaten  $\bar{\gamma}_i$  zu tun). Damit werden aber die Bilder der kartesischen Koordinaten des physikalischen Raumes zu krummlinigen Koordinaten des Schwereraumes. So wie die krummlinigen  $\gamma_i$ -Koordinatenlinien im physikalischen Raum praktisch keine Rolle spielen, so ergeht es nun den krummlinigen Bildern der kartesischen Koordinaten im Schwereraum. Die grundlegende Bedeutung der kartesischen Koordinaten im physikalischen Raum wird vollständig von den Schwerekoordinaten im Schwereraum übernommen.

Um dennoch eine Vorstellung vom Bild der  $x_i$ -Koordinatenlinien im Schwereraum zu haben, beachte man Figur 3.

### 3.2 Die Isozenithallinien

Wie wir im Kapitel 2.2 gezeigt haben, weicht die Isozenithallinie (im rotationsfreien Fall) nur geringfügig von der Ellipsoidnormalen ab. Dementsprechend größer ist ihre Bedeutung im physikalischen Raum im Vergleich zu den  $\gamma_i$ -Linien (vor allem für die Randbedingung). Aus der wegen der Rotationsfreiheit abgeänderten Gleichung (2–9)

$$\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_3} = \text{const.}$$

können wir unmittelbar eine für weitere Zusammenhänge nicht uninteressante Schlußfolgerung ziehen: Die Isozenithallinien des physikalischen Raumes werden auf geradlinige Radialstrahlen des Schwereraumes abgebildet.

### 3.3 Die Äquigravitationslinien

Scheinbar ohne Zusammenhang waren Isozenithallinien und Äquigravitationslinien im physikalischen Raum. Dieser Umstand erfährt jedoch eine radikale Änderung beim Übergang zum Schwereraum: Die Definition der Äquigravitationslinie (2–18)

$$\bar{\gamma} = \text{const.}$$

ermöglicht es uns auf sehr einfache Weise, eine Deutung im Schwereraum zu geben: Die Äquigravitationslinien des physikalischen Raumes werden auf konzentrische Kreise des Schwereraumes abgebildet. Damit aber bilden Isozenithallinien und Äquigravitationslinien im Schwereraum eine Einheit: Sie sind die Polarkoordinatenlinien des Schwereraumes.

#### 4. Sonderfall Massenpunkt

Da das Gravitationsfeld der Erde nicht wesentlich von dem eines Massenpunktes abweicht, ist es instruktiv, das Verhalten ausgezeichneter Linien im Gravitationsfeld des Massenpunktes im physikalischen Raum und im Schwereraum zu diskutieren. In all den bisher angegebenen Formeln brauchen wir zu diesem Zwecke lediglich  $J_2 = 0$  und  $\omega = 0$  zu setzen. Damit erhalten wir als Gleichungen der ausgezeichneten Linien im physikalischen Raum:

$$\bar{\gamma}_1\text{-Linien: } r_1(\theta; \bar{\gamma}_3) = \left(-\frac{kM}{\gamma_3} \cos\theta\right)^{1/2}$$

$$\bar{\gamma}_3\text{-Linien: } r_3(\theta; \bar{\gamma}_1) = \left(-\frac{kM}{\gamma_1} \sin\theta\right)^{1/2}$$

$$\text{Isozenithallinien: } \theta = \theta_0$$

$$\text{Äquigravitationslinien: } x = \left(\frac{kM}{\gamma}\right)^{1/2}$$

Während die Isozenithallinien zu geradlinigen Radialstrahlen und die Äquigravitationslinien zu konzentrischen Kreisen entarten, behalten die  $\bar{\gamma}$ -Linien ihre ein wenig merkwürdige Form praktisch bei. Die entsprechenden Ausdrücke im Schwereraum erfahren keine Änderung. Dieser Umstand findet seine Erklärung dadurch, daß zwei gleiche Schwerevektoren, welche zu beliebigen Orten des physikalischen Raumes gehören, identische Bilder im Schwereraum besitzen.

#### 5. Schlußbemerkungen

Zwei Koordinatensysteme spielen im physikalischen Raum in der Geodäsie eine entscheidende Rolle: das System der kartesischen Koordinaten und das der Kugelkoordinaten. Beide Systeme sind natürlich unabhängig davon, welche Art von Erscheinungen beschrieben werden soll. Dieser Umstand erlaubt zwar ihre uneingeschränkte Verwendung, bringt jedoch den Nachteil mit sich, oft recht komplizierte Ausdrücke zu ergeben, wenn die Wahl des Koordinatensystems bezüglich der Problembeschreibung unglücklich verläuft. In den meisten Fällen fällt diese Wahl zwar leicht (rotationssymmetrische Körper wird man im allgemeinen nicht durch kartesische Koordinaten beschreiben). Wesentlich schwieriger ist es, ein möglichst adequates System zur Behandlung des Randwertproblems der physikalischen Geodäsie zu finden. Der Schwereraum mit dem kartesischen System der Schwerelinien einerseits und dem Polarkoordinatensystem der Isozenithallinien und Äquigravitationslinien bietet sich dafür geradezu an. Dies erkannt zu haben, ist

das Verdienst von F. Sansò. In der vorliegenden Arbeit wurde versucht, am Beispiel des normalen Schwerfeldes die Rolle verschiedener Koordinatensysteme und der damit verbundenen Koordinatenlinien im physikalischen Raum und im Schwereraum aufzuzeigen. Es sollte damit ein Beitrag zum besseren Verständnis neuer vielversprechender Entwicklungen auf dem Gebiet der physikalischen Geodäsie geleistet werden.

### Literatur

- Grafarend, E. (1977):* The definition of the telluroid. Bulletin Géodésique, im Druck.
- Heiskanen, W. A. und H. Moritz (1967):* Physical Geodesy. W. H. Freeman, San Francisco.
- Krarup, T. (1973):* Letters on Molodensky's Problem I-IV. Rundbrief an die Mitglieder der Spezialstudien-Gruppe 4.31 der IAG.
- Marussi, A. (1974):* Geodetic networks in space. The Canadian Surveyor, Vol. 20, No. 5.
- Meissl, P. (1971):* On the linearization of the geodetic boundary-value problem. Report 152, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.
- Moritz, H. (1977):* Recent developments in the geodetic boundary-value problem. Report of the Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, im Druck.
- Sansò, F. (1977a):* The geodetic boundary-value problem in gravity space. Accademia Nazionale dei Lincei. Serie VIII, Vol. XIV.
- Sansò, F. (1977b):* Molodensky's Problem in gravity space – a review of the first results. International Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks, Sopron.
- Sansò, F. (1978):* Representation of geodetic measurements und collocation in gravity space. 7<sup>th</sup> Symposium on Mathematical Geodesy, Assisi.

## Koordinatendatenbank für Triangulierungspunkte

Von Josef Zeger, Wien.

Im Bundesrechenzentrum in Wien werden außer der Grundstücksdatenbank auch Koordinatendatenbanken für Triangulierungspunkte, für Einschaltpunkte und für Grenzpunkte aufgebaut. Hier soll der Aufbau und der derzeitige Stand der Datenerfassung für die Koordinatendatenbank der Triangulierungspunkte (Kurzbezeichnung: KDB-TP) in den wesentlichen Zügen kurz skizziert werden.

Wozu wird überhaupt eine Koordinatendatenbank benötigt? Dazu soll vorerst mit wenigen Worten das derzeit übliche Verfahren bei der Verwendung und vor allem Bekanntgabe der Koordinaten der Triangulierungspunkte für Folgemessungen beschrieben werden. Die Ergebnisse der Triangulierungsarbeiten werden in der Triangulierungsabteilung des Bundesamtes für