

Paper-ID: VGI_197903



Zur Lösung geometrisch überbestimmter Probleme II. Beispiele

Karl Killian ¹

¹ *Hadikgasse 40, A-1130 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **67** (1), S.
14–24

1979

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_197903,  
Title = {Zur Lösung geometrisch überbestimmter Probleme II. Beispiele  
},  
Author = {Killian, Karl},  
Journal = {{Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {14--24},  
Number = {1},  
Year = {1979},  
Volume = {67}  
}
```



- ¹⁵⁾ Hiezu etwa *Conditt – Mastalier – Pangratz – Rath – Sperch*, Städtischer Bodenmarkt – Städtische Bodenpolitik, Institut für Stadtforschung, Wien 1974.
- ¹⁶⁾ Botschaft des Exekutivdirektors des Umweltprogramms der Vereinten Nationen, *Mostafa K. Tolba*, Zum Tag der Umwelt, 5. Juni 1977, in: Informationsdienst der Vereinten Nationen, UNIS 116, 2. Juni 1977.
- ¹⁷⁾ *Jurka*, Leitungskataster – Mehrzweckkataster – Zukunftskataster, in: evm Nr. 26, Februar 1978, S. 4.
- ¹⁸⁾ Vgl. hiezu die Ausführung von *Bernhard* und *Kovarik* in evm Nr. 26, Februar 1978, S. 5 ff.
- ¹⁹⁾ Im Detail etwa *Hirt*, Infrarot-Wärmeaufnahmen über dem Ruhrgebiet, in: Geodätische Woche Köln 1975, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1976, S. 352 ff.

Zur Lösung geometrisch überbestimmter Probleme II. Beispiele

Von *Karl Killian*, Wien

In vorliegender Zeitschrift ist in Nr. 3/4 1976 eine Arbeit [6] erschienen, die durch die folgenden Beispiele ergänzt wird:

1. *Bestimmung der Polhöhe und der Zeit aus den Beobachtungen von drei bekannten Sternen, die in gleicher, nicht gemessener Zenitdistanz erfolgen. Methode von Gauß.* Siehe z. B. [2] oder [3].

Bedeutet z die nicht gemessene Zenitdistanz, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die bekannten Deklinationen der drei Sterne, t den gesuchten Stundenwinkel des Sternes S_1 und Δ bzw. Δ' die aus den bekannten Rektaszensionsdifferenzen und den gemessenen Zwischenzeiten bestimmten Stundenwinkeldifferenzen, so ergibt die dreimalige Anwendung des cos-Satzes:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos t \dots\dots\dots 1)$$

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos (t + \Delta) \dots\dots\dots 2)$$

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta_3 + \cos \varphi \cos \delta_3 \cos (t + \Delta') \dots\dots\dots 3)$$

Es ist bemerkenswert, daß man ohne Überbestimmung auf folgende Weise drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten erhalten kann. Wir entwickeln $\cos (t + \Delta)$ und $\cos (t + \Delta')$, dividieren jede der drei Gleichungen durch $\cos \varphi \cos t$ und erhalten:

$$\xi = \eta \sin \delta_1 + \cos \delta_1$$

$$\xi = \eta \sin \delta_2 + \cos \delta_2 (\cos \Delta - \xi \sin \Delta)$$

$$\xi = \eta \sin \delta_3 + \cos \delta_3 (\cos \Delta' - \xi \sin \Delta')$$

Das sind drei lineare Gleichungen mit den Unbekannten

$$\xi = \frac{\cos z}{\cos \varphi \cos t}, \eta = \frac{\tan \varphi}{\cos t}, \zeta = \tan t$$

Daraus wird zuerst t , dann φ , und wenn es gewünscht wird, auch z bestimmt. Wird nämlich z auch gemessen, so gewinnt man einen Aufschluß über die Refraktions- bzw. Instrumentalfehler.

Verwendet man in analoger Weise einen vierten Stern, so folgt:

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta_4 + \cos \varphi \cos \delta_4 \cos (t + \Delta'') \dots\dots\dots 4)$$

Entwickelt man wieder in den Gleichungen 1) 2) 3) 4) die \cos und dividiert man durch $\cos \varphi$, so folgen vier lineare Gleichungen mit den Unbekannten $\cos z$: $\cos \varphi$, $\tan \varphi$, $\cos t$ und $\sin t$. Es brauchen dann nur die Unbekannten $\tan \varphi$, $\cos t$ und $\sin t$ berechnet und aus $\tan \varphi$ der Wert φ und aus $\cos t$ und $\sin t$ der Wert t bestimmt werden.

2. Eine andere Aufgabe der sphärischen Astronomie:

Gleichzeitige Polhöhen und Azimutbestimmung ohne Uhr [5]. Bei dieser Aufgabe werden die Azimutdifferenz und die Zenitdistanzen zweier Sterne gemessen. Erfolgen die analogen Messungen zu einem dritten Stern, so ergibt sich eine überbestimmte Aufgabe, die zu drei linearen Gleichungen führt.

Bedeutet z_1, z_2, z_3 die gemessenen Zenitdistanzen der drei Sterne S_1, S_2, S_3 und $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ die gemessenen Azimutdifferenzen zwischen S_1 und S_2 bzw. S_1 und S_3 , ferner $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ die aus den Ephemeriden entnommenen Deklinationen, φ die gesuchte Polhöhe und A das gesuchte Azimut von S_1 , so ergibt die dreimalige Anwendung des \cos -Satzes:

$$\cos z_1 \sin \varphi - \sin z_1 \cos \varphi \cos A - \sin \delta_1 = 0 \dots\dots\dots 1)$$

$$\cos z_2 \sin \varphi - \sin z_2 \cos \varphi \cos (A + \varepsilon_2) - \sin \delta_2 = 0 \dots\dots\dots 2)$$

$$\cos z_3 \sin \varphi - \sin z_3 \cos \varphi \cos (A + \varepsilon_3) - \sin \delta_3 = 0 \dots\dots\dots 3)$$

Wir entwickeln in den Gleichungen 2) und 3) $\cos (A + \varepsilon_2)$ bzw. $\cos (A + \varepsilon_3)$ und setzen

$$\zeta = \sin \varphi \dots\dots\dots 4)$$

$$\eta = \cos \varphi \cos A \dots\dots\dots 5)$$

$$\xi = \cos \varphi \sin A \dots\dots\dots 6)$$

Damit ist:

$$\zeta \cos z_1 - \eta \sin z_1 - \sin \delta_1 = 0 \dots\dots\dots 1a)$$

$$\zeta \cos z_2 - \eta \sin z_2 \cos \varepsilon_2 + \xi \sin z_2 \sin \varepsilon_2 - \sin \delta_2 = 0 \dots\dots\dots 2a)$$

$$\zeta \cos z_3 - \eta \sin z_3 \cos \varepsilon_3 + \xi \sin z_3 \sin \varepsilon_3 - \sin \delta_3 = 0 \dots\dots\dots 3a)$$

Aus diesen drei linearen Gleichungen könnte man ζ , η und ξ bestimmen. Aus 4) bzw. nach Divisionen von 6) durch 5) wäre sodann φ bzw. A berechenbar.

Die numerische Rechenarbeit wird kürzer, wenn man folgendermaßen vorgeht: Division der Gleichungen 1a), 2a), 3a) der Reihe nach durch $\cos z_1$,

$\cos z_2, \cos z_3$, subtrahieren der zweiten und dritten Gleichung von der ersten Gleichung:

$$p_2 \eta + q_2 \xi + r_2 = 0 \dots\dots\dots 2b)$$

$$p_3 \eta + q_3 \xi + r_3 = 0 \dots\dots\dots 3b)$$

wobei p_2, q_2, r_2 und p_3, q_3, r_3 einfach berechenbare Koeffizienten sind. Führt man nun aus 5) und 6) die Werte für η und ξ ein, so folgt:

$$p_2 \cos \varphi \cos A + q_2 \cos \varphi \sin A + r_2 = 0 \dots\dots\dots 2c)$$

$$p_3 \cos \varphi \cos A + q_3 \cos \varphi \sin A + r_3 = 0 \dots\dots\dots 3c)$$

Dividiert man diese Gleichungen durch $r_2 \cos \varphi \cos A$ bzw. $r_3 \cos \varphi \cos A$, so ergibt die Subtraktion dieser Gleichungen $\tan A$. Der Wert $\cos \varphi$ kann aus den Gleichungen 2c) und 3c) berechnet und kontrolliert werden.

3. Die Koordinaten von vier Festpunkten $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ und $P_4(x_4, y_4, z_4)$ sind gegeben. Gemessen werden die Entfernungen r_1, r_2, r_3 und r_4 (Fig. 1) zu einem Neupunkt P_0 . Seine Koordinaten x_0, y_0, z_0 sollen berechnet werden. Die Aufgabe ist bekanntlich überbestimmt und führt zu vier bzw. drei linearen Gleichungen.

Die Gleichungen der Kugeln mit den Mittelpunkten P_1, P_2, P_3, P_4 und den zugeordneten Radien r_1, r_2, r_3, r_4 heißen:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_1^2 \dots\dots\dots 1)$$

$$\dots\dots\dots 2)$$

$$\dots\dots\dots 3)$$

$$(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = r_4^2 \dots\dots\dots 4)$$

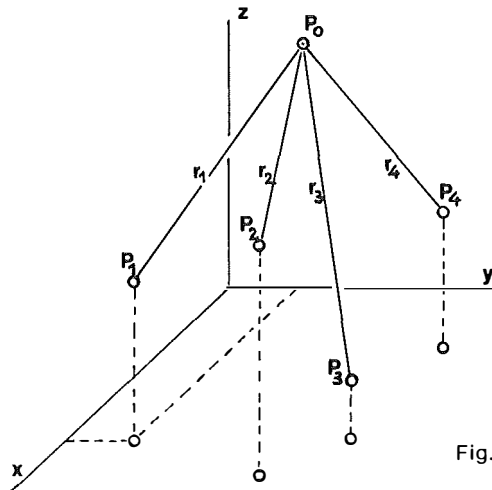


Fig. 1

Quadriert man die Monome der Gleichung 1) und setzt man die Koordinaten des Schnittpunktes der vier Kugeln x_0, y_0, z_0 , so folgt:

$$x_0^2 - 2 x_0 x_1 + x_1^2 + y_0^2 - 2 y_0 y_1 + y_1^2 + z_0^2 - 2 z_0 z_1 + z_1^2 = r_1^2$$

Nun ist:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r_0^2, x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = k_1$$

Setzt man ferner:

$$-2 x_1 = a_1, -2 y_1 = b_1, -2 z_1 = c_1$$

so folgt

- $a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 + r_0^2 = r_1^2 - k_1$ 1a)
- 2a)
- 3a)
- $a_4 x_0 + b_4 y_0 + c_4 z_0 + r_0^2 = r_4^2 - k_4$ 4a)

Das sind vier lineare Gleichungen mit den Unbekannten: x_0, y_0, z_0, r_0 .

Eine Vereinfachung entsteht, wenn einer der vier gegebenen Punkte, z. B. P_1 , im Ursprung liegt. Sodann haben wir drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten; denn $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ und $r_1 = r_0$.

Es läßt sich nun eine – hinsichtlich ihrer praktischen Anwendung – andere Aufgabe formulieren, indem man obige Aufgabe „auf den Kopf stellt“: In Fig. 2 sind 1, 2, 3... mit Lasergeräten ausgerüstete Stationen der Erdoberfläche. Ihre Lagen sind unbekannt und zwischen ihnen besteht keine Sicht. A, B, C, D sind vier Satelliten. Könnte man von den Stationen 1, 2, 3... die Entfernungen zu den vier Satelliten gleichzeitig messen und könnte man

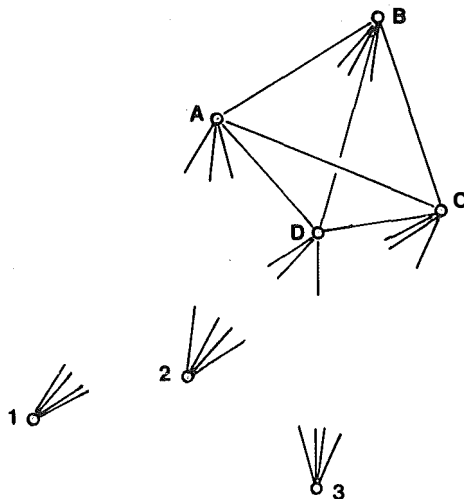


Fig. 2

im gleichen Zeitmoment auch die sechs Entfernungen zwischen den vier Satelliten messen [8], so könnten die Koordinaten aller Stationspunkte in bezug auf ein mit den Satelliten festes Koordinatensystem berechnet werden. *Damit wäre also die relative Lage der Stationen bestimmt.* Diese Berechnung der Koordinaten erfolgt ganz analog der obigen Aufgabe durch Lösung linearer Gleichungen. Eine simultane Messung aller genannten Entfernungen ist praktisch nicht möglich. Jedoch kann eine *quasi-simultane Messung* erfolgen, d. h. von jeder Station aus werden zu den Satelliten A, B, C, D alle Entfernungen laufend gemessen.

Ebenso werden die sechs Entfernungen zwischen den vier Satelliten laufend gemessen. Da zu allen Messungen die zugeordneten Zeitpunkte registriert werden, können alle Messungen auf gewählte Zeitpunkte reduziert werden. Sind nur zwei Stationen mit Lasergeräten ausgerüstet, so kann ihre räumliche Entfernung (= Sehne) bestimmt werden.

Bei dem beschriebenen Vorgang wird angenommen, daß die Satellitenbahnen unbekannt sind oder daß diese kontrolliert werden sollen. Werden nur drei Satelliten verwendet, so kann ebenfalls die relative Lage der Punkte 1, 2, 3 . . . bestimmt werden, wobei jedoch die lineare Berechnung entfällt.

4. Eine andere Aufgabe der Satellitengeodäsie läßt sich wie folgt formulieren:

In Fig. 3 sind 1, 2, 3 drei mit Lasergeräten ausgerüstete Stationen der Erdoberfläche. Ihre Lagen sind unbekannt und zwischen ihnen besteht keine Sicht. A (x, y, z), A' (x', y', z'); B (u, v, w), B' (u', v', w') und C (ξ, η, ζ) und C' (ξ', η', ζ') ist ein Satellitenpaar in drei verschiedenen unbekanntenen Lagen. In jeder der drei Lagen des Satellitenpaares werden von den drei Stationen aus die sechs Entfernungen zu beiden Satelliten gemessen. Außerdem wird die Entfernung der beiden Satelliten gemessen. Diese Messungen erfolgen quasi-simultan (siehe vorhergehende Aufgabe). Die gegenseitige Lage der drei Stationspunkte soll bestimmt werden. Diese Aufgabe ist geometrisch bestimmt:

Zur Bestimmung von n Punkten des Raumes braucht man bekanntlich $z = 3n - 6$ Stücke. $z = 3 \times 9 - 6 = 21$. 18 Strecken werden von den Stationspunkten zu den Satelliten gemessen. 3 Strecken werden zwischen den Satelliten gemessen, also zusammen 21 Stücke.

Die Satelliten liegen immer in den Schnittpunkten von 3 Kugeln mit den Mittelpunkten 1, 2, 3 und den gemessenen Radien.

Die Gleichungen dieser Kugel sind:

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2 & \dots\dots\dots 1) \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + z^2 = r_2^2 & \dots\dots\dots 2) \dots\dots A \\ (x - x_3)^2 + y^2 + z^2 = r_3^2 & \dots\dots\dots 3) \end{array}$$

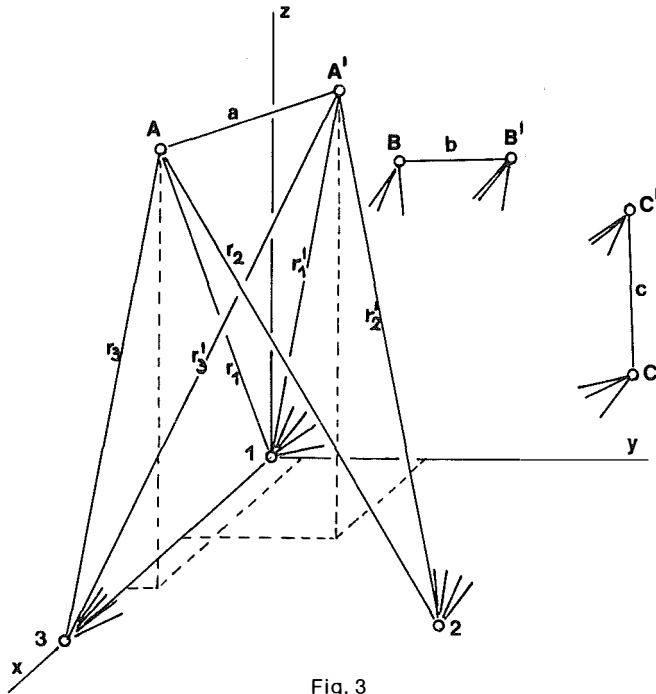


Fig. 3

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 &= r_1^2 \dots\dots\dots 1') \\
 (x' - x_2)^2 + (y' - y_2)^2 + z^2 &= r_2^2 \dots\dots\dots 2') \dots\dots A' \\
 (x' - x_3)^2 + y'^2 + z'^2 &= r_3^2 \dots\dots\dots 3')
 \end{aligned}$$

Ist a die Entfernung der beiden Satelliten in der ersten Lage des Satellitenpaares, so folgt:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = a^2 \dots\dots\dots 4)$$

Quadriert man in Gleichung 4) die Monome und beachtet man die Gleichung 1) und 1'), so folgt:

$$xx' + yy' + zz' = \frac{1}{2} (r_1^2 + r_1'^2 - a)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine berechenbare Konstante, die wir C₁ nennen. Für die zweite und dritte Lage des Satellitenpaares erhalten wir zwei weitere dieser Gleichung analoge Gleichungen, somit ist

$$\begin{aligned}
 xx' + yy' + zz' &= C_1 \dots\dots\dots 4a) \\
 uu' + vv' + ww' &= C_2 \dots\dots\dots 4b) \\
 \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' &= C_3 \dots\dots\dots 4c)
 \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 1) 2) 3) drücken wir x und y durch die gesuchten Größen x_2, y_2, x_3 aus: Wir subtrahieren 2) von 1) und 3) von 1) und erhalten nach einfacher Rechnung:

$$x = \frac{x_3^2 - k_3}{2 x_3}, y = \frac{x_3 (x_2^2 + y_2^2) - x_2 (x_3^2 - k_3) - k_2 x_3}{2 y_2 x_3}$$

Darin bedeuten $k_2 = r_2^2 - r_1^2$ und $k_3 = r_3^2 - r_1^2$. x' und y' ergibt sich aus x bzw. y , wenn man für k_2 und k_3 die entsprechenden Größen k_2' bzw. k_3' setzt.

Schreibt man Gleichung 4a) in der Form:

$$xx' + yy' - C_1 = zz'$$

und setzt man z aus 1) und z' aus 1') ein und quadriert, so folgt nach Vereinfachung:

$$C_1^2 + 2 xx' yy' - 2 C_1 xx' - 2 C_1 yy' = r_1^2 r_1'^2 - r_1'^2 x^2 - r_1'^2 y^2 - r_1 x'^2 + y^2 x'^2 - r_1^2 y'^2 + x^2 y'^2$$

Setzt man für x, x', y, y' obige Werte ein, so ergibt sich eine algebraische Gleichung mit den Unbekannten x_2, y_2, x_3 . Das zweite und dritte Satellitenpaar ergibt zwei analoge Gleichungen. Ein viertes Satellitenpaar (die Aufgabe ist damit überbestimmt) ergibt eine vierte analoge Gleichung mit den Unbekannten x_2, y_2, x_3 . Nach [6] S. 83 ergibt sich somit im Prinzip die Möglichkeit, unsere Aufgabe linear zu lösen; eventuell auftretende numerische Schwierigkeiten werden sich durch mehr als vier Satellitenpaare, die sehr verschiedene Lagen aufweisen, beheben lassen.

5. Fünf Geländepunkte weisen beliebig große unbekannte Höhen auf. Ihre Lage-Koordinaten sind bekannt. Aus einer Senkrechtaufnahme wurden die Bild-Koordinaten dieser Punkte bestimmt. Gesucht ist der Bild- und der Kartennadir.

Diese Aufgabe kann sich in der Praxis ergeben, und zwar bei der Ergänzung von Plänen und Karten und bei der Orientierung von Luftaufnahmen in einfachen Luftbildauswertegeräten sowie bei der Nadirpunkt-Triangulation im Gebirge. Oft liegt ein hinreichend genauer Katasterplan (ohne Höhen) oder eine Schichtenlinien-Karte vor. In dieser sind häufig ebenfalls gut identifizierbare Punkte vorhanden, deren Lage hinreichende Genauigkeit aufweist, während ihre Höhen nur aus den Schichtenlinien entsprechend ungenau interpoliert werden könnten.

Wie erwähnt wurde, liegt eine Senkrechtaufnahme vor, d. h. die Nadirdistanz ist $< 3^9$. Sodann bilden die vom Bildnadir zu den fünf Bildpunkten gezogenen Strahlen, bekanntlich ein Strahlenbüschel, das mit dem entsprechenden vom Kartennadir ausgehenden Strahlenbüschel (bis auf Größen 2. und höherer Kleinheitsordnung) kongruent ist. Wenn wir von den Größen 2. Kleinheitsordnung absehen, besteht unsere Aufgabe darin, in der Bild- und in

der Kartenebene je einen Punkt (Bildnadir und Kartennadir) obiger Eigenschaft zu finden. Daß diese geometrische Aufgabe bestimmt ist, erkennt man wie folgt: Für diese zwei gesuchten Punkte braucht man vier Koordinaten (zwei im Bild und zwei in der Karte). Zu ihrer Bestimmung ergeben sich tatsächlich vier Gleichungen, indem man je zwei der maßgebenden Winkel einander gleichsetzt.

Wir betrachten zunächst nur vier in Karte und Bild (Fig. 4) einander entsprechende Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 und A'_0, A'_1, A'_2, A'_3 . In [4] ist auf S. 91, Gl. 7) eine für unsere Belange nützliche Beziehung dargestellt. Die Ableitung dieser Gleichung ist ganz elementar, jedoch erfordert sie eine längere Rechenarbeit und wird daher an dieser Stelle nicht wiederholt. Diese Gleichung lautet, wenn man geringfügige, der Fig. 4 (Karte) entsprechende Änderungen der Bezeichnungen macht:

$$\frac{x_1 - x_2 - (y_1 - y_0) \xi + (y_2 - y_0) \eta}{y_1 - y_2 + (x_1 - x_0) \xi - (x_2 - x_0) \eta} = \frac{x_2 - x_3 - (y_2 - y_0) \eta + (y_3 - y_0) \zeta}{y_2 - y_3 + (x_2 - x_0) \eta - (x_3 - x_0) \zeta}$$

wobei $\xi = \cot \alpha$, $\eta = \cot \beta$ und $\zeta = \cot \gamma$ ist.

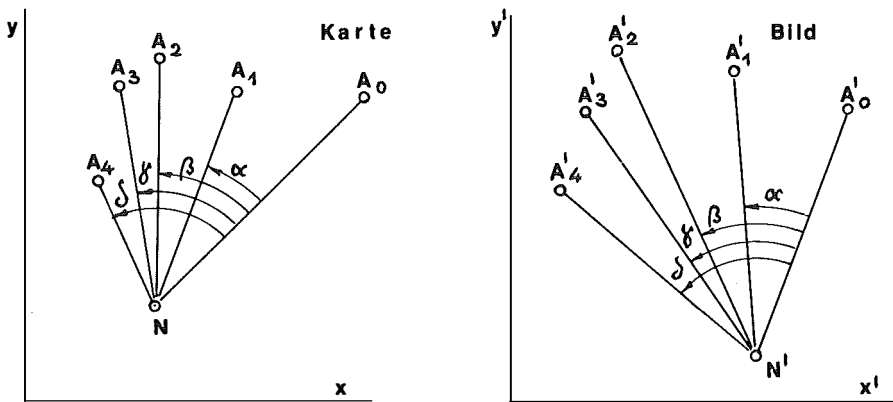


Fig. 4

Aus obiger Gleichung folgt, wenn man die Brüche wegschafft und die aus den gegebenen Koordinaten berechenbaren Größen mit $a, b, c \dots$ bezeichnet:

$$a + b \xi + c \eta + d \zeta + e \xi \eta + f \xi \zeta + g \eta \zeta = 0$$

Das ist eine Gleichung, die für jedes Viereck gilt. Für das Luftbild ist sodann:

$$a' + b' \xi + c' \eta + d' \zeta + e' \xi \eta + f' \xi \zeta + g' \eta \zeta = 0$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen ζ , indem man ζ aus beiden Gleichungen berechnet und die rechten Seiten einander gleichsetzt, so folgt,

wenn man die aus den Koordinaten berechenbaren Konstanten wieder zusammenzieht:

$$K_1 + K_2 \xi + K_3 \eta + K_4 \xi^2 + K_5 \eta^2 + K_6 \xi \eta + K_7 \xi \eta^2 + K_8 \eta \xi^2 = 0 \dots\dots 1)$$

Sind fünf in Karte und Luftbild einander entsprechende Punkte vorhanden, so ergibt sich eine zweite Gleichung:

$$\bar{K}_1 + \bar{K}_2 \xi + \bar{K}_3 \eta + \dots\dots\dots = 0 \dots 2)$$

Damit ist die Aufgabe bestimmt; denn wir haben zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten ξ, η .

Sind sechs in Karte und Luftbild einander entsprechende Punkte vorhanden (die Aufgabe ist damit überbestimmt), so ergibt sich eine dritte Gleichung:

$$\bar{\bar{K}}_1 + \bar{\bar{K}}_2 \xi + \bar{\bar{K}}_3 \eta + \dots\dots\dots = 0 \dots 3)$$

Wir haben sodann drei algebraische Gleichungen mit zwei Unbekannten ξ, η , die nach [6] S. 83 linear berechnet werden können.

Wären zehn in Karte und Luftbild entsprechende Punkte vorhanden, so würden sich noch vier weitere Gleichungen derselben Art ergeben. Wir hätten dann sieben lineare Gleichungen mit sieben Unbekannten:

$$\xi, \eta, \xi^2, \eta^2, \xi \eta, \xi^2 \eta, \eta \xi^2.$$

Bemerkung: Wir nehmen nochmals an, es wären nur vier in Karte und Luftbild einander entsprechende Punkte vorhanden. Es besteht sodann Gleichung 1). Wählen wir in dieser Gleichung ξ , d. h. man wählt α , so kann man η , d. h. β aus einer quadratischen Gleichung berechnen. Werden nun mit zusammengehörigen Winkeln α, β ebene Rückwärtseinschnitte bezüglich der Punkte A_0, A_1, A_2 sowie A'_0, A'_1, A'_2 ausgeführt, so ergeben sich einander zugeordnete Kurven in Karte und Luftbild [7].

6. Eine Doppelwinkel-Schnittaufgabe.

Diese in [1] behandelte Aufgabe lautet: *In drei Punkten, L, M, N, deren gegenseitige Lage bekannt ist, sind die Horizontalwinkel zu drei Neupunkten P, Q, R gemessen. Die Lage der drei Neupunkte ist zu bestimmen (Fig. 5).* Wir verwenden die in obiger Veröffentlichung angegebenen Bezeichnungen.

Stellt man die Bedingungen auf, daß sich in den drei Neupunkten je drei Gerade schneiden, so führt eine einfache längere Rechnung zu folgenden Gleichungen [1] S. 293:

$$\begin{aligned} c \psi \omega - c \chi \omega + (a - b) \chi + b \psi - a \omega &= 0 \\ A_1 \chi \psi \omega + B_1 \chi \psi + C_1 \psi \omega + D_1 \chi \omega + E_1 \chi + F_1 \psi + G_1 \omega + H_1 &= 0 \\ A_2 \chi \psi \omega + B_2 \chi \psi + C_2 \psi \omega + D_2 \chi \omega + E_2 \chi + F_2 \psi + G_2 \omega + H_2 &= 0 \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen wurden die cot-Zeichen vorübergehend weggelassen.

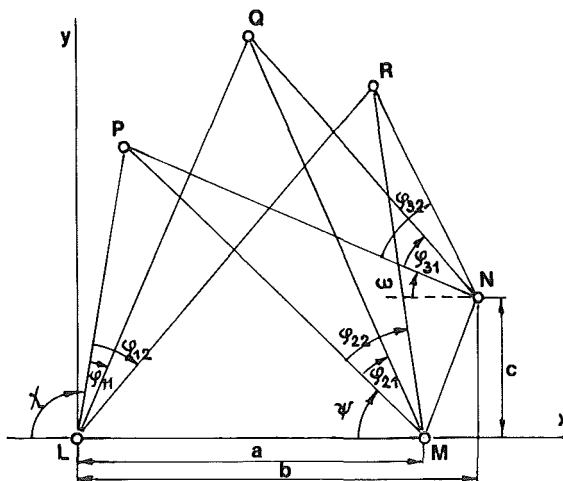


Fig. 5

Betrachtet man χ, ψ, ω als Unbekannte, so haben wir drei lineare Gleichungen mit sieben Unbekannten. Wären jedoch sieben Neupunkte auf obige Weise zu bestimmen, so hätte man sieben lineare Gleichungen mit sieben Unbekannten.

Es läßt sich zeigen, daß eine lineare Lösung bei vier Neupunkten möglich ist: Wir eliminieren χ aus den drei obigen Gleichungen, indem wir χ aus jeder der drei Gleichungen berechnen und die rechte Seite der ersten Gleichung der rechten Seite der zweiten und dritten gleichsetzen. Zieht man die Konstanten zusammen, so ergeben sich zwei Gleichungen:

$$K_1 + K_2\psi + K_3\omega + K_4\psi^2 + K_5\omega^2 + K_6\omega\psi + K_7\psi\omega^2 + K^8\psi\omega^2 = 0$$

$$\bar{K}_1 + \bar{K}_2\psi + \bar{K}_3\omega + \dots = 0$$

Ein vierter Neupunkt ergibt eine dritte Gleichung:

$$\bar{\bar{K}}_1 + \bar{\bar{K}}_2\psi + \bar{\bar{K}}_3\omega + \dots = 0$$

Wir haben also drei algebraische Gleichungen mit 2 Unbekannten ω, ψ , die nach [6] S. 83 zu einer linearen Lösung führen.

Umständlicher ist es, die Rechnung bis zu Gleichung 10) [1] S. 295. zu führen. Die zwei entstehenden Gleichungen 4. Grades könnten bekanntlich linear gelöst werden.

Weil diese Aufgabe auch praktische Bedeutung hat, dürfte ihre Programmierung nützlich sein. Sind nämlich L, M, N Fig. 5 drei Standpunkte, in denen photographische Aufnahmen z. B. bei Verkehrsunfällen gemacht wurden und wurden die Seiten des Dreiecks L, M, N etwa mit einem Meßband gemessen, so liegt unsere Aufgabe vor.

Literatur

- [1] *Ammermann*, Eine Doppelwinkel-Schnittaufgabe. Z.f.V. (1922), S. 290–298.
- [2] *Brünnow, F.*, Sphärische Astronomie, 3. Auflage (1871), S. 298–302.
- [3] *Dörrie, H.*, Triumph der Mathematik. Ferd. Hirt in Breslau (1933), S. 323–329.
- [4] *Grunert, J. A.*, Über eine merkwürdige Relation usw. Archiv für Mathematik und Physik 1 (1841), S. 89–95.
- [5] *Killian, K.*, Gleichzeitige Polhöhen- und Azimutbestimmung ohne Uhr. Z.f.V. (1934), S. 471–478.
- [6] *Killian, K.*, und *P. Meissl*, Zur Lösung geometrisch überbestimmter Probleme. Ö.Z.f.V. 3/4 (1977), S. 81–86.
- [7] *Krames, J.*, Die Pseudofokalkurven zweier ebenen Vierecke. Ö.Z.f.V. 2 (1965), S. 33–40.
- [8] *Ross, M.*, u. a., Space Optical Communications with the Nd.: YAG Laser Proceedings of the IEEE, Vol. 66, No. 3, March 1978.

Allgemeine Längsprofile mit Analogauswertegeräten

Von *P. Waldhäusl*, Wien

Vorwort

Das hier niedergelegte Gedankengut führte zu einer Diplomarbeit, die von Herrn G. Kucher am Institut für Elektrische Meßtechnik der Technischen Universität Wien (Vorstand o. Univ.-Prof. Dr. phil. Rupert Patzelt, Betreuer Dipl.-Ing. Ch. Aglassinger und Dipl.-Ing. H. Dietrich) in Zusammenarbeit mit dem Institut für Photogrammetrie ausgeführt wurde. Alle elektrotechnischen Details sind seiner Diplomarbeit entnommen.

1. Elektronische Datenverarbeitung und Photogrammetrie

Taschen- und Tischcomputer werden heute in der Photogrammetrie zur rechnergestützten relativen und absoluten Orientierung eingesetzt. Großcomputer dienen der Photogrammetrie vor allem zur Bearbeitung digitaler Geländemodelle und zur Berechnung von umfangreichen Blockausgleichungen. Die prozeßrechnergesteuerte analytische Auswertung führt zur Zeit zu einer Revolution im photogrammetrischen Gerätebau; sie löst die zu teuer werdenden Präzisionsauswertesysteme ab. Viele Zeichentische werden heute schon von Mikroprozessoren gesteuert. Auch die herkömmlichen Analogauswertegeräte könnten durch den Anschluß von Mikroprozessoren wesentlich aufgewertet werden. Im folgenden sollen Vorschläge dazu näher ausgeführt werden.