

Paper-ID: VGI\_198010



## Rechnerunterstützte Entwicklung der Legendre'schen Reihen

K. Krack <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Hochschule der Bundeswehr München, Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen, Institut für Allgemeine Geodäsie, Werner Heisenberg-Weg 39, D-8014 Neubiberg*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **68** (4), S. 145–156

1980

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Krack_VGI_198010,  
Title = {Rechnerunterst{\u}tzte Entwicklung der Legendre'schen Reihen},  
Author = {Krack, K.},  
Journal = {{{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {145--156},  
Number = {4},  
Year = {1980},  
Volume = {68}  
}
```



## Vermessungsgesetz novelliert!

Mit dem Bundesgesetz vom 22. Oktober 1980, BGBl. Nr. 480, das am 1. Dezember 1980 in Kraft getreten ist, wurde das Vermessungsgesetz zum zweiten Male novelliert.

Diese Novelle war im Hinblick auf die Einrichtung der Grundstücksdatenbank erforderlich.

Die Grundstücksdatenbank stellt ein gemeinsames Projekt des Bundesministeriums für Bauten und Technik und des Bundesministeriums für Justiz dar. Ziel des Projekts ist die gemeinsame zentrale Speicherung aller Daten von Kataster und Grundbuch im Bundesrechenamt und deren dezentrale Führung in den Vermessungsämtern und Bezirksgerichten mittels Datenfernverarbeitung unter Wahrung der gesetzlichen Zuständigkeiten.

Durch die Zusammenfassung der Daten von Kataster und Grundbuch in Form der Grundstücksdatenbank werden durch das Wegfallen der Führung identischer Daten innerbehördliche Rationalisierungseffekte erzielt werden und die boden- und grundstücksbezogenen Daten aktueller und benutzerfreundlicher dargeboten werden.

Die entsprechenden legislativen Voraussetzungen auf dem Gebiete des Grundbuchwesens wurden mit dem Bundesgesetz vom 27. November 1980, BGBl. Nr. 550/1980, über die Umstellung des Grundbuches auf automationsunterstützte Datenverarbeitung und die Änderung des Grundbuchgesetzes und des Gerichtskommissionengesetzes (Grundbuchumstellungsgesetz – GUG) geschaffen.

*Friedrich Hrbek*

## Rechnerunterstützte Entwicklung der Legendre'schen Reihen

Von *K. Krack*, München

Zur Lösung der beiden geodätischen Hauptaufgaben auf Rotationsellipsoiden im System der geographischen Koordinaten  $(B, L)$  stellen die Legendre'schen Reihen ein wichtiges Hilfsmittel dar.

Sie liegen sowohl den Übertragungsformeln von Boltz [1] zur Lösung der ersten geodätischen Hauptaufgabe als auch den Gauß'schen Mittelbreitenformeln in der z.B. von Hubeny [2] verwendeten Form zur Lösung der zweiten geodätischen Hauptaufgabe zugrunde.

Die Legendre'schen Reihen beinhalten die Integration der Differentialgleichungen der Geodätischen Linie durch Reihenentwicklungen. Diese Entwicklungen lauten, wenn  $P_1$  den Anfangspunkt und  $P_2$  den Endpunkt einer unter dem Azimut  $A_1$  ausgehenden Geodätischen Linie der Länge  $S$  bezeichnet:

$$B_2 - B_1 = \sum \frac{1}{n!} \frac{d^n B}{dS^n} \cdot S^n = \sum \{n\}_B$$

$$L_2 - L_1 = \sum \frac{1}{n!} \frac{d^n L}{dS^n} \cdot S^n = \sum \{n\}_L \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

$$A_2 - A_1 = \sum \frac{1}{n!} \frac{d^n A}{dS^n} \cdot S^n = \sum \{n\}_A$$

Die in (1) enthaltenen Differentialquotienten lassen sich nun durch fortgesetztes Differenzieren, wie etwa in [3] beschrieben, ableiten und eignen sich wegen ihres formal einfachen Bildungsgesetzes gut für eine rechnerunterstützte Entwicklung.

Einen Ansatz hierzu gibt das Verfahren von Grabowsky [4], mit dessen Unterstützung Welsch [5] die Koeffizienten bis zur Ordnung  $n = 6$  vollständig abgeleitet hat.

Eine andere Möglichkeit, die sich in jüngerer Zeit anbietet, ist die Verwendung von Programmiersprachen und Programmen, die speziell für Formelmanipulationen geschaffen sind. Besonders geeignet für das hier vorliegende Problem erwiesen sich die Programmiersprachen "Lisp" [6] und das darauf aufbauende Programm "Reduce 2" [7].

Reduce 2 ist ein Programm, welches algebraische Berechnungen im weitesten Sinne durchführen kann und u.a. besonders für

- die Ausführung symbolischer Berechnungen und
- die symbolische Differentiation geeignet ist.

Das Programm ist auf dem Großrechner Burroughs 7800 der HSBw München installiert und ermöglicht mit verhältnismäßig geringem Rechenaufwand die vollständige Entwicklung der

Koeffizienten der Legendre'schen Reihen z.B. bis zur Ordnung  $n = 10$

Die nachstehende Tabelle soll einen Überblick über den Umfang der geleisteten Rechenarbeit geben, wobei die sphärischen und ellipsoidischen Anteile in den Koeffizienten getrennt sind:

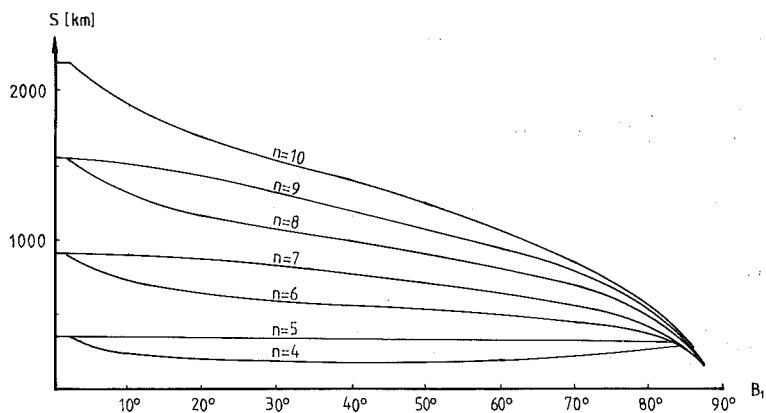
$$\begin{aligned} \{n\}_B &= \{n\}_B^{\text{sphär}} + \{n\}_B^{\text{E11}} \\ \{n\}_L &= \{n\}_L^{\text{sphär}} + \{n\}_L^{\text{E11}} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2) \\ \{n\}_A &= \{n\}_A^{\text{sphär}} + \{n\}_A^{\text{E11}} \end{aligned}$$

Anzahl der Summanden in den sphärischen und ellipsoidischen Anteilen der Koeffizienten der Legendre'schen Reihen									
n	$\frac{1}{n!} \frac{d^n B}{ds^n} s^n$		$\frac{1}{n!} \frac{d^n L}{ds^n} s^n$		$\frac{1}{n!} \frac{d^n A}{ds^n} s^n$		Rechenzeit CPU [sec]		
	$\{n\}_B^{\text{sphär}}$	$\{n\}_B^{\text{Ell}}$	$\{n\}_L^{\text{sphär}}$	$\{n\}_L^{\text{Ell}}$	$\{n\}_A^{\text{sphär}}$	$\{n\}_A^{\text{Ell}}$	$\{n\}_B$	$\{n\}_L$	$\{n\}_A$
7	12	85	15	40	16	54	26	57	28
8	16	114	16	54	20	88	41	108	42
9	20	168	24	97	25	120	60	173	64
10	25	215	25	120	30	176	81	435	95

Es zeigt sich, daß die Anzahl der Summanden der sphärischen Anteile in der Minderzahl ist und daß die Anzahl der Summanden der ellipsoidischen Anteile schnell an Umfang zunimmt.

Für die praktische Anwendung ist nach erfolgter Entwicklung zu klären, in welchem Umfang die einzelnen Koeffizienten das Ergebnis beeinflussen. Bei dieser Abschätzung können die sphärischen Anteile ausgeschlossen werden, da sie, wie Schödlbauer in [8] und [9] gezeigt hat, vollständig und in aller Strenge durch Formeln der sphärischen Trigonometrie ersetzt werden können.

Eine entsprechende Abschätzung für die ellipsoidischen Anteile ergibt bei einem maximal zulässigen linearen Punktfehler von ca. 1 mm in Breite und Länge die in dem nachstehenden Schaubild dargestellten Übertragungsreichweiten in Abhängigkeit der Ausgangsbreite  $B_1$  und der Länge  $S$  der Geodätischen Linie.



Mögliche Reichweite der Punktübertragung, abgeleitet aus den maximalen Beträgen der ellipsoidischen Anteile in den Koeffizienten der Legendre'schen Reihen, für einen zulässigen linearen Punktfehler von ca. 1 mm in Breite und Länge.

Unter diesen Einschränkungen tragen alle Glieder mit  $\eta^8$  und höheren Potenzen von  $\eta^2$  nichts mehr zum Rechenergebnis bei und sind deshalb vernachlässigbar.

In dieser gekürzten Form sind die ellipsoidischen Anteile der Legendre'schen Reihen nun nachstehend wiedergegeben. Sie sind abweichend von [8] und in Übereinstimmung mit [10] auf eine Kugel mit Radius  $N$  bezogen.

Es bedeuten  $v = S \cdot \sin A$

$u = S \cdot \cos A$

$$(1)_B^{E11} = \frac{u}{N} \cdot n^2$$

$$(2)_B^{E11} = \frac{v^2}{N^2} \cdot t \left(-\frac{1}{2} n^2\right) + \frac{u^2}{N^2} \cdot t \cdot \left(-\frac{3}{2} n^4 - \frac{3}{2} n^2\right)$$

$$(3)_B^{E11} = \frac{v^2 u}{N^3} \{t^2 \cdot \left(\frac{3}{2} n^4 + n^2\right) + \left(-\frac{1}{6} n^4 - \frac{1}{3} n^2\right)\} + \frac{u^3}{N^3} \cdot \{t^2 \left(\frac{5}{2} n^6 + 3n^4 + \frac{1}{2} n^2\right) + \left(-\frac{1}{2} n^6 - n^4 - \frac{1}{2} n^2\right)\}$$

$$(4)_B^{E11} = \frac{v^4}{N^4} \{t^3 \cdot \left(-\frac{3}{8} n^4 - \frac{1}{4} n^2 + t \cdot \left(\frac{1}{24} n^4 + \frac{1}{12} n^2\right)\right)\} + \frac{v^2 u^2}{N^4} \{t^3 \cdot \left(-\frac{15}{4} n^6 - 3n^4 + \frac{1}{4} n^2\right) + t \left(\frac{17}{12} n^6 + \frac{5}{2} n^4 + \frac{3}{4} n^2\right)\} + \frac{u^4}{N^4} \{t^3 \cdot \left(-\frac{25}{4} n^6 - \frac{15}{8} n^4\right) + t \cdot \left(\frac{21}{4} n^6 + \frac{27}{8} n^4 + \frac{1}{2} n^2\right)\}$$

$$(5)_B^{E11} = \frac{v^4 u}{N^5} \{t^4 \left(\frac{15}{8} n^6 + \frac{9}{8} n^4 - \frac{3}{8} n^2\right) + t^2 \cdot \left(-\frac{17}{20} n^6 - \frac{29}{20} n^4 - \frac{7}{20} n^2\right) + \left(\frac{1}{120} n^6 + \frac{1}{40} n^4 + \frac{1}{40} n^2\right)\} + \frac{v^2 u^3}{N^5} \{t^4 \left(-\frac{35}{4} n^6 + \frac{3}{4} n^4 + \frac{1}{4} n^2\right) + t^2 \left(-\frac{63}{3} n^6 - \frac{28}{5} n^4 - \frac{1}{5} n^2\right) + \left(\frac{47}{60} n^6 + \frac{13}{20} n^4 + \frac{1}{12} n^2\right)\} + \frac{u^5}{N^5} \{t^4 \cdot \left(\frac{45}{8} n^6 + \frac{3}{8} n^4\right) + t^2 \cdot \left(-\frac{297}{20} n^6 - \frac{73}{20} n^4 - \frac{1}{10} n^2\right) + \left(\frac{69}{40} n^6 + \frac{31}{40} n^4 + \frac{1}{10} n^2\right)\}.$$

$$(6)_B^{E11} = \frac{v^6}{N^6} \{t^5 \cdot \left(-\frac{5}{16} n^6 - \frac{3}{16} n^4 + \frac{1}{16} n^2\right) + t^3 \cdot \left(\frac{17}{120} n^6 + \frac{29}{120} n^4 + \frac{7}{120} n^2\right) + t \cdot \left(-\frac{1}{720} n^6 - \frac{1}{240} n^4 - \frac{1}{240} n^2\right)\} + \frac{v^4 u^2}{N^6} \{t^5 \cdot \left(-\frac{75}{16} n^6 + \frac{9}{16} n^4 - \frac{9}{16} n^2\right) + t^3 \cdot \left(\frac{1199}{120} n^6 + \frac{373}{120} n^4 - \frac{31}{120} n^2\right) + t \cdot \left(-\frac{863}{720} n^6 - \frac{229}{240} n^4 - \frac{53}{720} n^2\right)\} + \frac{v^2 u^4}{N^6} \{t^5 \cdot \left(-\frac{85}{16} n^6 - \frac{3}{16} n^4 + \frac{1}{4} n^2\right) + t^3 \cdot \left(\frac{3533}{120} n^6 + \frac{31}{8} n^4 + \frac{1}{10} n^2\right) + t \cdot \left(-\frac{6481}{720} n^6 - \frac{2083}{720} n^4 - \frac{47}{180} n^2\right) + \frac{u^6}{N^6} \{t^5 \cdot \left(-\frac{35}{16} n^6\right) + t^3 \cdot \left(\frac{2179}{120} n^6 + \frac{31}{20} n^4\right) + t \cdot \left(-\frac{2173}{240} n^6 - \frac{113}{60} n^4 - \frac{1}{15} n^2\right)\}$$

$$\begin{aligned}
 \{7\}_B^{E11} = & \frac{v^6 u}{N^7} \left\{ t^6 \left( \frac{5}{4} n^6 - \frac{3}{8} n^4 + \frac{1}{4} n^2 \right) + t^4 \left( -\frac{95}{28} n^6 - \frac{237}{280} n^4 + \frac{3}{20} n^2 \right) \right. \\
 & + t^2 \left( \frac{43}{84} n^6 + \frac{113}{280} n^4 + \frac{11}{420} n^2 \right) + \left. \left( -\frac{1}{1260} n^6 - \frac{1}{840} n^4 - \frac{1}{1260} n^2 \right) \right\} \\
 & + \frac{v^4 u^3}{N^7} \left\{ t^6 \left( \frac{5}{8} n^6 + \frac{3}{4} n^4 - \frac{13}{16} n^2 \right) + t^4 \left( -\frac{18019}{840} n^6 - \frac{293}{420} n^4 - \frac{103}{240} n^2 \right) \right. \\
 & + t^2 \left( \frac{10211}{840} n^6 + \frac{1181}{420} n^4 + \frac{27}{112} n^2 \right) + \left. \left( -\frac{155}{504} n^6 - \frac{37}{252} n^4 + \frac{1}{144} n^2 \right) \right\} \\
 & + \frac{v^2 u^5}{N^7} \left\{ t^6 \cdot \left( \frac{5}{4} n^6 - \frac{3}{16} n^4 + \frac{1}{4} n^2 \right) + t^4 \cdot \left( -\frac{11581}{420} n^6 - \frac{449}{560} n^4 + \frac{3}{20} n^2 \right) \right. \\
 & + t^2 \left( \frac{1777}{60} n^6 + \frac{6707}{1680} n^4 - \frac{37}{420} n^2 \right) + \left. \left( -\frac{2141}{1260} n^6 - \frac{757}{1680} n^4 - \frac{9}{140} n^2 \right) \right\} \\
 & + \frac{u^7}{N^7} \left\{ t^6 \left( \frac{5}{16} n^6 \right) + t^4 \cdot \left( -\frac{6101}{560} n^6 - \frac{31}{140} n^4 \right) \right\} \\
 & + t^2 \left( \frac{29123}{1680} n^6 + \frac{323}{210} n^4 + \frac{1}{105} n^2 \right) + \left. \left( -\frac{25}{16} n^6 - \frac{39}{140} n^4 - \frac{1}{105} n^2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{8\}_B^{E11} = & \frac{v^8}{N^8} \left\{ t^7 \cdot \left( -\frac{5}{32} n^6 + \frac{3}{64} n^4 - \frac{1}{32} n^2 \right) + t^5 \cdot \left( \frac{95}{224} n^6 + \frac{237}{2240} n^4 - \frac{3}{160} n^2 \right) \right. \\
 & + t^3 \cdot \left( -\frac{43}{672} n^6 - \frac{113}{2240} n^4 - \frac{11}{3360} n^2 \right) + t \cdot \left( \frac{1}{10080} n^6 + \frac{1}{6720} n^4 + \frac{1}{10080} n^2 \right) \\
 & + \frac{v^6 u^2}{N^8} \left\{ t^7 \cdot \left( \frac{15}{16} n^6 - \frac{3}{4} n^4 + \frac{21}{32} n^2 \right) + t^5 \cdot \left( \frac{4337}{560} n^6 - \frac{157}{280} n^4 + \frac{61}{160} n^2 \right) \right. \\
 & + t^3 \cdot \left( -\frac{1681}{240} n^6 - \frac{257}{210} n^4 - \frac{397}{3360} n^2 \right) + t \cdot \left( \frac{83}{240} n^6 + \frac{137}{840} n^4 - \frac{11}{1120} n^2 \right) \\
 & + \frac{v^4 u^4}{N^8} \left\{ t^7 \cdot \left( -\frac{15}{16} n^6 + \frac{63}{64} n^4 - \frac{9}{8} n^2 \right) + t^5 \cdot \left( -\frac{1081}{80} n^6 + \frac{837}{2240} n^4 - \frac{57}{80} n^2 \right) \right. \\
 & + t^3 \cdot \left( -\frac{18339}{560} n^6 - \frac{5749}{2240} n^4 + \frac{33}{70} n^2 \right) + t \cdot \left( \frac{8539}{1680} n^6 + \frac{2323}{2240} n^4 + \frac{121}{560} n^2 \right) \\
 & + \frac{v^2 u^6}{N^8} \left\{ t^7 \cdot \left( \frac{5}{32} n^6 - \frac{3}{16} n^4 + \frac{1}{4} n^2 \right) + t^5 \cdot \left( \frac{353}{32} n^6 - \frac{3}{56} n^4 + \frac{1}{5} n^2 \right) \right. \\
 & + t^3 \cdot \left( -\frac{27721}{672} n^6 - \frac{893}{560} n^4 - \frac{1}{7} n^2 \right) + t \cdot \left( -\frac{22657}{2016} n^6 + \frac{59}{42} n^4 - \frac{103}{1260} n^2 \right) \\
 & + \frac{u^8}{N^8} \left\{ t^5 \cdot \left( \frac{353}{112} n^6 \right) + t^3 \cdot \left( -\frac{13403}{840} n^6 - \frac{141}{280} n^4 \right) + t \cdot \left( \frac{3513}{560} n^6 + \frac{451}{840} n^4 + \frac{1}{210} n^2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{9\}_B^{E11} = & \frac{v^8 u}{N^9} \left\{ t^8 \cdot \left( -\frac{25}{64} n^6 + \frac{15}{64} n^4 - \frac{25}{128} n^2 \right) + t^6 \cdot \left( -\frac{1571}{1008} n^6 + \frac{85}{336} n^4 - \frac{11}{96} n^2 \right) \right. \\
 & + t^4 \cdot \left( \frac{6269}{3360} n^6 + \frac{953}{3360} n^4 + \frac{41}{1344} n^2 \right) + t^2 \cdot \left( -\frac{1741}{15120} n^6 - \frac{13}{240} n^4 + \frac{103}{30240} n^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{36288} n^6 + \frac{1}{36288} n^4 + \frac{1}{72576} n^2 \right) + \frac{v^6 u^3}{N^9} \{ t^8 \cdot \left( \frac{25}{16} n^6 - \frac{45}{32} n^4 + \frac{45}{32} n^2 \right) \\
& + t^6 \cdot \left( -\frac{565}{504} n^6 - \frac{149}{168} n^4 + \frac{43}{48} n^2 \right) + t^4 \cdot \left( \frac{5492}{315} n^6 + \frac{761}{1680} n^4 - \frac{47}{84} n^2 \right) \\
& + t^2 \cdot \left( -\frac{39029}{7560} n^6 - \frac{709}{840} n^4 - \frac{3929}{15120} n^2 \right) + \left( \frac{19}{336} n^6 + \frac{103}{6048} n^4 - \frac{101}{30240} n^2 \right) \} \\
& + \frac{v^4 u^5}{N^9} \{ t^8 \cdot \left( -\frac{75}{64} n^6 + \frac{81}{64} n^4 - \frac{3}{2} n^2 \right) + t^6 \cdot \left( -\frac{149}{48} n^6 + \frac{89}{168} n^4 - \frac{55}{48} n^2 \right) \\
& + t^4 \cdot \left( \frac{68833}{2016} n^6 - \frac{389}{1120} n^4 + \frac{899}{1008} n^2 \right) + t^2 \cdot \left( -\frac{21265}{1008} n^6 - \frac{243}{140} n^4 + \frac{3259}{5040} n^2 \right) \\
& + \left( \frac{1175}{1728} n^6 + \frac{401}{2880} n^4 + \frac{89}{2160} n^2 \right) \} + \frac{v^2 u^7}{N^9} \{ t^8 \cdot \left( \frac{5}{32} n^6 - \frac{3}{16} n^4 + \frac{1}{4} n^2 \right) \\
& + t^6 \cdot \left( -\frac{1571}{1008} n^6 - \frac{9}{112} n^4 + \frac{1}{4} n^2 \right) + t^4 \cdot \left( \frac{66679}{2520} n^6 + \frac{2333}{5040} n^4 - \frac{10}{63} n^2 \right) \\
& + t^2 \cdot \left( -\frac{382859}{15120} n^6 - \frac{5699}{5040} n^4 - \frac{697}{3780} n^2 \right) + \left( \frac{25489}{18144} n^6 + \frac{1667}{11340} n^4 - \frac{227}{11340} n^2 \right) \} \\
& + \frac{u^9}{N^9} \{ t^6 \cdot \left( -\frac{353}{1008} n^6 \right) + t^4 \cdot \left( \frac{4241}{560} n^6 + \frac{47}{840} n^4 \right) \\
& + t^2 \cdot \left( \frac{145573}{15120} n^6 - \frac{443}{1260} n^4 - \frac{1}{1890} n^2 \right) + \left( \frac{11441}{15120} n^6 + \frac{13}{216} n^4 + \frac{1}{1890} n^2 \right) \} \\
\{10\}_B^{E11} & = \frac{v^{10}}{N^{10}} \{ t^9 \cdot \left( \frac{5}{128} n^6 - \frac{3}{128} n^4 + \frac{5}{256} n^2 \right) + t^7 \cdot \left( \frac{1571}{10080} n^6 - \frac{17}{672} n^4 + \frac{11}{960} n^2 \right) \\
& + t^5 \cdot \left( -\frac{6269}{33600} n^6 - \frac{953}{33600} n^4 - \frac{41}{13440} n^2 \right) \\
& + t^3 \cdot \left( \frac{1741}{151200} n^6 + \frac{13}{2400} n^4 - \frac{103}{302400} n^2 \right) \\
& + t \cdot \left( -\frac{1}{362880} n^6 - \frac{1}{362880} n^4 - \frac{1}{725760} n^2 \right) \} \\
& + \frac{v^8 u^2}{N^{10}} \{ t^9 \cdot \left( -\frac{125}{128} n^6 + \frac{195}{256} n^4 - \frac{185}{256} n^2 \right) + t^7 \cdot \left( -\frac{12223}{10080} n^6 + \frac{1361}{2240} n^4 - \frac{29}{64} n^2 \right) \\
& + t^5 \cdot \left( -\frac{173027}{33600} n^6 + \frac{10261}{67200} n^4 + \frac{3877}{13440} n^2 \right) \\
& + t^3 \cdot \left( \frac{73243}{30240} n^6 + \frac{769}{2240} n^4 + \frac{41143}{302400} n^2 \right) \\
& + t \cdot \left( -\frac{3691}{72576} n^6 - \frac{1231}{80640} n^4 + \frac{3683}{1209600} n^2 \right) \} \\
& + \frac{v^6 u^4}{N^{10}} \{ t^9 \cdot \left( \frac{325}{128} n^6 - \frac{315}{128} n^4 + \frac{85}{32} n^2 \right) + t^7 \cdot \left( \frac{5461}{3360} n^6 - \frac{1593}{1120} n^4 + \frac{31}{16} n^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + t^5 \cdot \left( -\frac{393461}{33600} n^6 + \frac{28307}{33600} n^4 - \frac{2809}{1680} n^2 \right) + t^3 \cdot \left( \frac{380143}{21600} n^6 + \frac{12121}{16800} n^4 - \frac{3491}{2800} n^2 \right) \\
 & + t \cdot \left( -\frac{37823}{24192} n^6 - \frac{19039}{67200} n^4 - \frac{5833}{50400} n^2 \right) + \frac{v^4 u^6}{N^{10}} \left\{ t^9 \cdot \left( -\frac{185}{128} n^6 + \frac{51}{32} n^4 - \frac{31}{16} n^2 \right) \right. \\
 & + t^7 \cdot \left( -\frac{643}{1440} n^6 + \frac{319}{420} n^4 - \frac{53}{30} n^2 \right) + t^5 \cdot \left( -\frac{434291}{33600} n^6 - \frac{6119}{4200} n^4 + \frac{827}{560} n^2 \right) \\
 & + t^3 \cdot \left( \frac{5012681}{151200} n^6 + \frac{337}{4200} n^4 + \frac{60691}{37800} n^2 \right) + t \cdot \left( -\frac{304133}{51840} n^6 - \frac{166037}{453600} n^4 + \frac{2131}{8100} n^2 \right) \} \\
 & + \frac{v^2 u^8}{N^{10}} \left\{ t^9 \cdot \left( \frac{5}{32} n^6 - \frac{3}{16} n^4 + \frac{1}{4} n^2 \right) + t^7 \cdot \left( \frac{5}{144} n^6 - \frac{3}{28} n^4 + \frac{3}{10} n^2 \right) \right. \\
 & + t^5 \cdot \left( -\frac{9859}{1200} n^6 + \frac{2143}{8400} n^4 - \frac{71}{420} n^2 \right) + t^3 \cdot \left( \frac{1946117}{75600} n^6 + \frac{2537}{4200} n^4 - \frac{1382}{4725} n^2 \right) \} \\
 & + t \cdot \left( -\frac{37657}{5600} n^6 - \frac{12269}{37800} n^4 - \frac{2}{27} n^2 \right) + \frac{u^{10}}{N^{10}} \left\{ t^5 \cdot \left( -\frac{14911}{8400} n^6 \right) \right. \\
 & \left. + t^3 \cdot \left( \frac{55109}{7560} n^6 + \frac{587}{6300} n^4 \right) + t \cdot \left( -\frac{63709}{25200} n^6 - \frac{599}{6300} n^4 - \frac{1}{4725} n^2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$(1)_L^{E11} = \emptyset$$

$$(2)_L^{E11} = \emptyset$$

$$(3)_L^{E11} = \frac{u^2 v}{N^3 \cos B} \left\{ \frac{1}{3} n^2 \right\}$$

$$(4)_L^{E11} = \frac{u^3 v}{N^4 \cos B} \left\{ t \cdot \left( -\frac{1}{3} n^4 + \frac{1}{3} n^2 \right) \right\} + \frac{u \cdot v^3}{N^4 \cos B} \left\{ t \cdot \left( -\frac{1}{3} n^2 \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (5)_L^{E11} &= \frac{u^4 v}{N^5 \cos B} \left\{ t^2 \cdot \left( \frac{2}{5} n^6 - \frac{1}{5} n^4 + \frac{2}{5} n^2 \right) + \left( -\frac{1}{15} n^6 + \frac{1}{5} n^2 \right) \right\} \\
 &+ \frac{u^2 v^3}{N^5 \cos B} \left\{ t^2 \cdot \left( \frac{7}{15} n^4 - \frac{13}{15} n^2 \right) + \left( -\frac{1}{15} n^4 - \frac{2}{15} n^2 \right) + \frac{v^5}{N^5 \cos B} \left\{ t^2 \cdot \left( \frac{1}{15} n^2 \right) \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6)_L^{E11} &= \frac{u^5 v}{N^6 \cos B} \left\{ t^3 \cdot \left( \frac{1}{15} n^6 - \frac{4}{15} n^4 + \frac{7}{15} n^2 \right) + t \cdot \left( \frac{1}{9} n^6 - \frac{2}{15} n^4 + \frac{17}{45} n^2 \right) \right\} \\
 &+ \frac{u^3 v^3}{N^6 \cos B} \left\{ t^3 \cdot \left( -\frac{11}{15} n^6 + \frac{13}{15} n^4 - \frac{26}{15} n^2 \right) + t \cdot \left( \frac{13}{45} n^6 - \frac{13}{15} n^2 \right) \right\} \\
 &+ \frac{u \cdot v^5}{N^6 \cos B} \left\{ t^3 \cdot \left( -\frac{1}{5} n^4 + \frac{7}{15} n^2 \right) + t \cdot \left( \frac{2}{45} n^4 + \frac{4}{45} n^2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7)_L^{E11} &= \frac{u^6 v}{N^7 \cos B} \left\{ t^4 \cdot \left( \frac{23}{105} n^6 - \frac{32}{105} n^4 + \frac{8}{15} n^2 \right) + t^2 \cdot \left( \frac{2}{105} n^6 - \frac{23}{105} n^4 + \frac{64}{105} n^2 \right) \right. \\
 &\left. + \left( -\frac{1}{315} n^6 + \frac{11}{315} n^4 + \frac{34}{315} n^2 \right) + \frac{u^4 v^3}{N^7 \cos B} \left\{ t^4 \cdot \left( -\frac{94}{105} n^6 + \frac{163}{105} n^4 - 3n^2 \right) \right\} \right\}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + t^2 \cdot \left( -\frac{4}{63} \eta^6 + \frac{7}{15} \eta^4 - \frac{782}{315} \eta^2 \right) + \left( \frac{13}{315} \eta^6 - \frac{13}{105} \eta^4 - \frac{13}{63} \eta^2 \right) \\
& + \frac{u^2 v^5}{N^7 \cos B} \left\{ t^4 \cdot \left( \frac{17}{35} \eta^6 - \frac{82}{105} \eta^4 + \frac{26}{15} \eta^2 \right) + t^2 \cdot \left( -\frac{82}{315} \eta^6 + \frac{2}{35} \eta^4 + \frac{94}{105} \eta^2 \right) \right. \\
& + \left( \frac{2}{315} \eta^6 + \frac{2}{105} \eta^4 + \frac{2}{105} \eta^2 \right) + \frac{v^7}{N^7 \cos B} \left\{ t^4 \cdot \left( \frac{1}{35} \eta^4 - \frac{1}{15} \eta^2 \right) \right. \\
& \left. + t^2 \cdot \left( -\frac{2}{315} \eta^4 - \frac{4}{315} \eta^2 \right) \right\} \\
(8)_L^{E11} & = \frac{u^7 v}{N^8 \cos B} \left\{ t^5 \cdot \left( \frac{8}{35} \eta^6 - \frac{12}{35} \eta^4 + \frac{3}{5} \eta^2 \right) + t^3 \cdot \left( \frac{6}{35} \eta^6 - \frac{12}{35} \eta^4 + \frac{31}{35} \eta^2 \right) \right. \\
& + t \cdot \left( -\frac{29}{315} \eta^6 - \frac{2}{105} \eta^4 + \frac{31}{105} \eta^2 \right) \left. \right\} + \frac{u^5 v^3}{N^8 \cos B} \left\{ t^5 \cdot \left( -\frac{163}{105} \eta^6 + \frac{263}{105} \eta^4 - \frac{71}{15} \eta^2 \right) \right. \\
& + t^3 \cdot \left( -\frac{16}{105} \eta^6 + \frac{149}{105} \eta^4 - \frac{115}{21} \eta^2 \right) + t \cdot \left( \frac{26}{105} \eta^6 - \frac{34}{105} \eta^4 - \frac{128}{105} \eta^2 \right) \left. \right\} \\
& + \frac{u^3 v^5}{N^8 \cos B} \left\{ t^5 \cdot \left( \frac{134}{105} \eta^6 - \frac{78}{35} \eta^4 + \frac{71}{15} \eta^2 \right) + t^3 \cdot \left( -\frac{5}{21} \eta^6 - \frac{2}{5} \eta^4 + \frac{419}{105} \eta^2 \right) \right. \\
& + t \cdot \left( -\frac{2}{21} \eta^6 + \frac{2}{7} \eta^4 + \frac{10}{21} \eta^2 \right) + \frac{u \cdot v^7}{N^8 \cos B} \left\{ t^5 \cdot \left( -\frac{1}{7} \eta^6 + \frac{9}{35} \eta^4 - \frac{3}{5} \eta^2 \right) \right. \\
& \left. + t^3 \cdot \left( \frac{3}{35} \eta^6 - \frac{1}{35} \eta^4 - \frac{11}{35} \eta^2 \right) + t \cdot \left( -\frac{1}{315} \eta^6 - \frac{1}{105} \eta^4 - \frac{1}{105} \eta^2 \right) \right\} \\
(9)_L^{E11} & = \frac{u^8 v}{N^9 \cos B} \left\{ t^6 \cdot \left( \frac{16}{63} \eta^6 - \frac{8}{21} \eta^4 + \frac{2}{3} \eta^2 \right) + t^4 \cdot \left( \frac{2}{9} \eta^6 - \frac{17}{35} \eta^4 + \frac{76}{63} \eta^2 \right) \right. \\
& + t^2 \cdot \left( -\frac{1}{189} \eta^6 - \frac{5}{63} \eta^4 + \frac{188}{315} \eta^2 \right) + \left( -\frac{1}{81} \eta^6 + \frac{29}{945} \eta^4 + \frac{31}{567} \eta^2 \right) \left. \right\} \\
& + \frac{u^6 v^3}{N^9 \cos B} \left\{ t^6 \cdot \left( -\frac{149}{63} \eta^6 + \frac{79}{21} \eta^4 - 7 \eta^2 \right) + t^4 \cdot \left( -\frac{278}{315} \eta^6 + \frac{331}{105} \eta^4 - \frac{656}{63} \eta^2 \right) \right. \\
& + t^2 \cdot \left( \frac{2342}{2835} \eta^6 - \frac{274}{945} \eta^4 - \frac{3664}{945} \eta^2 \right) + \left( -\frac{8}{945} \eta^6 - \frac{6}{35} \eta^4 - \frac{64}{315} \eta^2 \right) \left. \right\} \\
& + \frac{u^4 v^5}{N^9 \cos B} \left\{ t^6 \cdot \left( \frac{107}{35} \eta^6 - \frac{183}{35} \eta^4 + \frac{161}{15} \eta^2 \right) + t^4 \cdot \left( -\frac{53}{315} \eta^6 - \frac{718}{315} \eta^4 + \frac{3959}{315} \eta^2 \right) \right. \\
& + t^2 \cdot \left( -\frac{641}{945} \eta^6 + \frac{991}{945} \eta^4 + \frac{3014}{945} \eta^2 \right) + \left( \frac{4}{189} \eta^6 + \frac{16}{189} \eta^4 + \frac{2}{27} \eta^2 \right) \left. \right\} \\
& + \frac{u^2 v^7}{N^9 \cos B} \left\{ t^6 \cdot \left( -\frac{223}{315} \eta^6 + \frac{19}{15} \eta^4 - \frac{43}{15} \eta^2 \right) + t^4 \cdot \left( \frac{68}{315} \eta^6 + \frac{41}{315} \eta^4 - \frac{22}{9} \eta^2 \right) \right. \\
& + t^2 \cdot \left( \frac{19}{315} \eta^6 - \frac{13}{63} \eta^4 - \frac{317}{945} \eta^2 \right) + \left( -\frac{4}{2835} \eta^6 - \frac{2}{945} \eta^4 - \frac{4}{2835} \eta^2 \right) \left. \right\} \\
& + \frac{v^9}{N^9 \cos B} \left\{ t^6 \cdot \left( \frac{1}{63} \eta^6 - \frac{1}{35} \eta^4 + \frac{1}{15} \eta^2 \right) + t^4 \cdot \left( -\frac{1}{105} \eta^6 + \frac{1}{315} \eta^4 + \frac{11}{315} \eta^2 \right) \right. \\
& \left. + t^2 \cdot \left( \frac{1}{2835} \eta^6 + \frac{1}{945} \eta^4 + \frac{1}{945} \eta^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \frac{E^{11}}{L} &= \frac{u^9 v}{N^{10} \cos B} \{t^7 \cdot (\frac{88}{315} n^6 - \frac{44}{105} n^4 + \frac{11}{15} n^2) + t^5 \cdot (\frac{164}{525} n^6 - \frac{341}{525} n^4 + \frac{11}{7} n^2) \\
 &+ t^3 \cdot (-\frac{118}{4725} n^6 - \frac{298}{1575} n^4 + \frac{1628}{1575} n^2) + t \cdot (-\frac{692}{14175} n^6 + \frac{121}{2835} n^4 + \frac{2764}{14175} n^2)\} \\
 &+ \frac{u^7 v^3}{N^{10} \cos B} \{t^7 \cdot (-\frac{1073}{315} n^6 + \frac{563}{105} n^4 - \frac{148}{15} n^2) \\
 &+ t^5 \cdot (-\frac{214}{105} n^6 + \frac{1042}{175} n^4 - \frac{5653}{315} n^2) + t^3 \cdot (\frac{1163}{945} n^6 + \frac{64}{315} n^4 - \frac{14918}{1575} n^2) \\
 &+ t \cdot (\frac{184}{567} n^6 - \frac{442}{675} n^4 - \frac{3596}{2835} n^2)\} + \frac{u^5 v^5}{N^{10} \cos B} \{t^7 \cdot (\frac{671}{105} n^6 - \frac{161}{15} n^4 + \frac{322}{15} n^2) \\
 &+ t^5 \cdot (\frac{172}{175} n^6 - \frac{1312}{175} n^4 + \frac{161}{5} n^2) + t^3 \cdot (-\frac{1396}{525} n^6 + \frac{3398}{1575} n^4 + \frac{20303}{1575} n^2) \\
 &+ t \cdot (-\frac{106}{4725} n^6 + \frac{67}{75} n^4 + \frac{1699}{1575} n^2)\} + \frac{u^3 v^7}{N^{10} \cos B} \{t^7 \cdot (-\frac{803}{315} n^6 + \frac{473}{105} n^4 - \frac{148}{15} n^2) \\
 &+ t^5 \cdot (\frac{674}{1575} n^6 + \frac{2398}{1575} n^4 - \frac{3671}{315} n^2) + t^3 \cdot (\frac{121}{189} n^6 - \frac{1891}{1575} n^4 - \frac{5008}{1575} n^2) \\
 &+ t \cdot (-\frac{502}{14175} n^6 - \frac{2008}{14175} n^4 - \frac{251}{2025} n^2)\} + \frac{u \cdot v^9}{N^{10} \cos B} \{t^7 \cdot (\frac{11}{63} n^6 - \frac{11}{35} n^4 + \frac{11}{15} n^2) \\
 &+ t^5 \cdot (-\frac{32}{525} n^6 - \frac{11}{525} n^4 + \frac{22}{35} n^2) + t^3 \cdot (-\frac{73}{4725} n^6 + \frac{89}{1575} n^4 + \frac{143}{1575} n^2) \\
 &+ t \cdot (\frac{8}{14175} n^6 + \frac{4}{4725} n^4 + \frac{8}{14175} n^2)\}
 \end{aligned}$$

$$\{1\}_A^{E^{11}} = \emptyset$$

$$\{2\}_A^{E^{11}} = \frac{u \cdot v}{N^2} \cdot (\frac{1}{2} n^2)$$

$$\{3\}_A^{E^{11}} = \frac{u^2 v}{N^3} \{t \cdot (-\frac{2}{3} n^4 + \frac{1}{6} n^2)\} + \frac{v^3}{N^3} \{t \cdot (-\frac{1}{6} n^2)\}$$

$$\begin{aligned}
 \{4\}_A^{E^{11}} &= \frac{u^3 v}{N^4} \{t^2 \cdot (n^6 + \frac{1}{6} n^4 + \frac{1}{3} n^2) + (-\frac{1}{6} n^6 - \frac{1}{8} n^4 + \frac{1}{4} n^2)\} \\
 &+ \frac{u \cdot v^3}{N^4} \{t^2 \cdot (\frac{1}{2} n^4 - \frac{1}{3} n^2) + (-\frac{1}{24} n^4 - \frac{1}{12} n^2)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{5\}_A^{E^{11}} &= \frac{u^4 v}{N^5} \{t^3 \cdot (-\frac{4}{5} n^6 - \frac{3}{10} n^4 + \frac{2}{5} n^2) + t \cdot (\frac{5}{6} n^6 - \frac{1}{40} n^4 + \frac{23}{60} n^2)\} \\
 &+ \frac{u^2 v^3}{N^5} \{t^3 \cdot (-\frac{6}{5} n^6 + \frac{4}{15} n^4 - \frac{13}{15} n^2) + t \cdot (\frac{11}{30} n^6 + \frac{1}{4} n^4 - \frac{3}{5} n^2)\} \\
 &+ \frac{v^5}{N^5} \{t^3 \cdot (-\frac{1}{10} n^4 + \frac{1}{15} n^2) + t \cdot (\frac{1}{120} n^4 + \frac{1}{6} n^2)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{6\}_A^{E11} &= \frac{u^5 v}{N^6} \{t^4 \cdot (\frac{17}{30} n^6 - \frac{4}{15} n^4 + \frac{7}{15} n^2) + t^2 \cdot (-\frac{193}{180} n^6 - \frac{13}{40} n^4 + \frac{11}{18} n^2) \\
&+ (\frac{97}{720} n^6 + \frac{43}{720} n^4 + \frac{107}{720} n^2)\} + \frac{u^3 v^3}{N^6} \{t^4 \cdot (\frac{4}{15} n^6 + \frac{13}{15} n^4 - \frac{26}{15} n^2) \\
&+ t^2 \cdot (-\frac{133}{90} n^6 + \frac{19}{60} n^4 - \frac{26}{15} n^2) + (\frac{37}{360} n^6 - \frac{7}{120} n^4 - \frac{13}{72} n^2)\} \\
&+ \frac{u \cdot v^5}{N^6} \{t^4 \cdot (\frac{1}{2} n^6 - \frac{1}{5} n^4 + \frac{7}{15} n^2) + t^2 \cdot (-\frac{11}{60} n^6 - \frac{41}{360} n^4 + \frac{29}{90} n^2) \\
&+ (\frac{1}{720} n^6 + \frac{1}{240} n^4 + \frac{1}{240} n^2)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{7\}_A^{E11} &= \frac{u^6 v}{N^7} \{t^5 \cdot (\frac{31}{210} n^6 - \frac{32}{105} n^4 + \frac{8}{15} n^2) + t^3 \cdot (\frac{421}{420} n^6 - \frac{61}{168} n^4 + \frac{92}{105} n^2) \\
&+ t \cdot (-\frac{2927}{5040} n^6 - \frac{191}{1680} n^4 + \frac{577}{1680} n^2)\} + \frac{u^4 v^3}{N^7} \{t^5 \cdot (-\frac{233}{210} n^6 + \frac{163}{105} n^4 - 3n^2) \\
&+ t^3 \cdot (\frac{1591}{1260} n^6 + \frac{71}{56} n^4 - \frac{2509}{630} n^2) + t \cdot (-\frac{653}{1680} n^6 - \frac{391}{1680} n^4 - \frac{121}{112} n^2)\} \\
&+ \frac{u^2 v^5}{N^7} \{t^5 \cdot (\frac{19}{70} n^6 - \frac{82}{105} n^4 + \frac{26}{15} n^2) + t^3 \cdot (\frac{229}{252} n^6 - \frac{37}{120} n^4 + \frac{37}{21} n^2) \\
&+ t \cdot (-\frac{227}{1680} n^6 + \frac{9}{112} n^4 + \frac{407}{1680} n^2)\} + \frac{v^7}{N^7} \{t^5 \cdot (-\frac{1}{14} n^6 + \frac{1}{35} n^4 - \frac{1}{15} n^2) \\
&+ t^3 \cdot (\frac{11}{420} n^6 + \frac{41}{2520} n^4 - \frac{29}{630} n^2) + t \cdot (-\frac{1}{5040} n^6 - \frac{1}{1680} n^4 - \frac{1}{1680} n^2)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{8\}_A^{E11} &= \frac{u^7 v}{N^8} \{t^6 \cdot (\frac{8}{35} n^6 - \frac{12}{35} n^4 + \frac{3}{5} n^2) + t^4 \cdot (\frac{1}{70} n^6 - \frac{18}{35} n^4 + \frac{83}{70} n^2) \\
&+ t^2 \cdot (\frac{121}{180} n^6 - \frac{103}{840} n^4 + \frac{557}{840} n^2) + (-\frac{25}{288} n^6 + \frac{193}{6720} n^4 + \frac{779}{10080} n^2)\} \\
&+ \frac{u^5 v^3}{N^8} \{t^6 \cdot (-\frac{163}{105} n^6 + \frac{263}{105} n^4 - \frac{71}{15} n^2) + t^4 \cdot (-\frac{61}{35} n^6 + \frac{187}{70} n^4 - \frac{549}{70} n^2) \\
&+ t^2 \cdot (\frac{1489}{840} n^6 + \frac{31}{210} n^4 - \frac{2827}{840} n^2) + (-\frac{87}{1120} n^6 - \frac{1103}{6720} n^4 - \frac{713}{3360} n^2)\} \\
&+ \frac{u^3 v^5}{N^8} \{t^6 \cdot (\frac{134}{105} n^6 - \frac{78}{35} n^4 + \frac{71}{15} n^2) + t^4 \cdot (-\frac{29}{70} n^6 - \frac{53}{35} n^4 + \frac{89}{14} n^2) \\
&+ t^2 \cdot (\frac{67}{210} n^6 + \frac{123}{280} n^4 + \frac{1579}{840} n^2) + (\frac{23}{3360} n^6 + \frac{271}{6720} n^4 + \frac{7}{160} n^2)\} \\
&+ \frac{u \cdot v^7}{N^8} \{t^6 \cdot (-\frac{1}{7} n^6 + \frac{9}{35} n^4 - \frac{3}{5} n^2) + t^4 \cdot (-\frac{9}{35} n^6 + \frac{1}{10} n^4 - \frac{43}{70} n^2) \\
&+ t^2 \cdot (\frac{127}{2520} n^6 - \frac{13}{420} n^4 - \frac{11}{120} n^2) + (-\frac{1}{10080} n^6 - \frac{1}{6720} n^4 - \frac{1}{10080} n^2)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9)_A^{E11} = & \frac{u^8 v}{N^9} \{ t^7 \cdot (\frac{16}{63} \eta^6 - \frac{8}{21} \eta^4 + \frac{2}{3} \eta^2) + t^5 \cdot (\frac{239}{630} \eta^6 - \frac{71}{105} \eta^4 + \frac{97}{63} \eta^2) \\
 & + t^3 \cdot (-\frac{293}{945} \eta^6 - \frac{233}{840} \eta^4 + \frac{67}{60} \eta^2) + t \cdot (\frac{11981}{90720} \eta^6 + \frac{895}{36288} \eta^4 + \frac{22103}{90720} \eta^2) \} \\
 & + \frac{u^6 v^3}{N^9} \{ t^7 \cdot (-\frac{149}{63} \eta^6 + \frac{79}{21} \eta^4 - 7 \eta^2) + t^5 \cdot (-\frac{35}{18} \eta^6 - \frac{151}{30} \eta^4 - \frac{1753}{126} \eta^2) \\
 & + t^3 \cdot (-\frac{2137}{4536} \eta^6 + \frac{1217}{1512} \eta^4 - \frac{62057}{7560} \eta^2) + t \cdot (\frac{419}{567} \eta^6 - \frac{7309}{15120} \eta^4 - \frac{11603}{9072} \eta^2) \} \\
 & + \frac{u^4 v^5}{N^9} \{ t^7 \cdot (\frac{107}{35} \eta^6 - \frac{183}{35} \eta^4 + \frac{161}{15} \eta^2) + t^5 \cdot (\frac{971}{630} \eta^6 - \frac{3083}{630} \eta^4 + \frac{11299}{630} \eta^2) \\
 & + t^3 \cdot (-\frac{17347}{7560} \eta^6 + \frac{4127}{7560} \eta^4 + \frac{61477}{7560} \eta^2) + t \cdot (\frac{2399}{15120} \eta^6 + \frac{5669}{10080} \eta^4 + \frac{23}{30} \eta^2) \} \\
 & + \frac{u^2 v^7}{N^9} \{ t^7 \cdot (-\frac{223}{315} \eta^6 + \frac{19}{15} \eta^4 - \frac{43}{15} \eta^2) + t^5 \cdot (-\frac{11}{630} \eta^6 + \frac{481}{630} \eta^4 - \frac{349}{90} \eta^2) \\
 & + t^3 \cdot (-\frac{1}{8} \eta^6 - \frac{87}{280} \eta^4 - \frac{9067}{7560} \eta^2) + t \cdot (\frac{11}{1620} \eta^6 - \frac{1843}{45360} \eta^4 - \frac{1997}{45360} \eta^2) \} \\
 & + \frac{v^9}{N^9} \{ t^7 \cdot (\frac{1}{63} \eta^6 - \frac{1}{35} \eta^4 + \frac{1}{15} \eta^2) + t^5 \cdot (\frac{1}{35} \eta^6 - \frac{1}{90} \eta^4 + \frac{43}{630} \eta^2) \\
 & + t^3 \cdot (-\frac{127}{22680} \eta^6 + \frac{13}{3780} \eta^4 + \frac{11}{1080} \eta^2) + t \cdot (\frac{1}{90720} \eta^6 + \frac{1}{60480} \eta^4 + \frac{1}{90720} \eta^2) \}
 \end{aligned}$$

Die numerische Überprüfung der hergeleiteten Koeffizienten mittels des Normalbeispiels in [11] ergab Übereinstimmung im Rahmen der Genauigkeit des Vergleichsbeispiels. Die Rückrechnung des nachstehenden Rechenbeispiels mittels der Verfahren von Helmert-Bessel [12] oder Moritz [13] bestätigte im weiteren die vorgegebenen Punktfehler von  $\Delta B = 1 \cdot 10^{-8}$  und  $\Delta L = 1 \cdot 10^{-8} / \cos B$ .

Rechenbeispiel (Verfahren von Schödlbauer [8]):

Bezugsellipsoid : Besselellipsoid

- $B_1 = 45^\circ$
- $L_1 = 0^\circ$
- $S = 1320284,666 \text{ m}$
- $A_1 = 29^\circ 3' 15'', 4598$

$B_1$	$45^\circ$	$L_1$	$0^\circ$	$A_1 \cdot 2$	$29,054 \ 294 \ 39^\circ$
$\Delta B$	$9,975 \ 244 \ 519^\circ$	$\Delta L$	$9,999 \ 657 \ 060^\circ$	$\Delta A$	$7,695 \ 885 \ 71^\circ$
$\{1\}_B^{E11}$	$.034 \ 777 \ 669^\circ$	$\{3\}_L^{E11}$	$.000 \ 297 \ 300^\circ$	$\{2\}_A^{E11}$	$- .001 \ 745 \ 35^\circ$
$\{2\}_B^{E11}$	$- .010 \ 426 \ 275^\circ$	$\{4\}_L^{ELL}$	$.000 \ 036 \ 955^\circ$	$\{3\}_A^{E11}$	$.000 \ 071 \ 26^\circ$
$\{3\}_B^{E11}$	$.000 \ 242 \ 800^\circ$	$\{5\}_L^{E11}$	$.000 \ 008 \ 660^\circ$	$\{4\}_A^{E11}$	$.000 \ 051 \ 89^\circ$
$\{4\}_B^{E11}$	$.000 \ 163 \ 497$	$\{6\}_L^{E11}$	$.000 \ 000 \ 497^\circ$	$\{5\}_A^{E11}$	$.000 \ 006 \ 96^\circ$

$\{5\}_B^{E11}$	- .000 001 426°	$\{7\}_L^{E11}$	- .000 000 242°	$\{6\}_A^{E11}$	.000 000 65°
$\{6\}_B^{E11}$	.000 000 805°	$\{8\}_L^{E11}$	- .000 000 154°	$\{7\}_A^{E11}$	- .000 000 26°
$\{7\}_B^{E11}$	.000 000 002°	$\{9\}_L^{E11}$	- .000 000 054°	$\{8\}_A^{E11}$	- .000 000 15°
		$\{10\}_L^{E11}$	- .000 000 015°		
$B_2$	54.999 999 98°	$L_2$	10.000 000 02 °	$A_2$	36.752 055 8 °
$\hat{=}$	54° 59' 59".99993	$\hat{=}$	10° 0' 0".00007	$\hat{=}$	36° 45' 7".4009

#### Literaturnachweis:

- [1] Boltz, H., Formeln und Tafeln zur numerischen Berechnung geographischer Koordinaten aus den Richtungen und Längen. Veröffentlichung des Geodätischen Instituts, Potsdam 1942, Neue Folge Nr. 110
- [2] Hubeny, K., Weiterentwicklung der Gauß'schen Mittelbreitenformeln. ZfV 1959
- [3] Großmann, W., Geodätische und ebene Abbildungen in der Landesvermessung. Verlag K. Wittwer, Stuttgart 1976, S. 90
- [4] Grabowsky, L. Über die Potenzreihen zur sog. Geodätischen Hauptaufgabe. ÖZfV 1917
- [5] Welsch, W., Über die Weiterentwicklung der Legendre'schen Reihen. ÖZfV 1974
- [6] Weissmann, C., Lisp 1.5 Primer, Dickenson 1967
- [7] Hearn, A.C., Reduce 2 User's Manual, University of Utah, Salt Lake City, USA, 1974
- [8] Schödlbauer, A., Übertragung geographischer Koordinaten auf Bezugsellipsoiden. AVN 1979
- [9] Schödlbauer, A., Berechnung von Längen und Azimuten geodätischer Linien auf Bezugsellipsoiden. AVN 1980
- [10] Schödlbauer, A., siehe Beitrag zur Festschrift
- [11] Jordan-Eggert-Kneissl, Handbuch der Vermessungskunde, Band IV, 2. Teil, S. 950
- [12] Großmann, W., siehe [3], S. 115
- [13] Moritz, H., Untersuchungen über eine direkte Lösung der 2. Hauptaufgabe auf dem Rotationsellipsoid. Institutsmitteilungen aus dem 1. Geodätischen Institut der TH Graz, Folge 3