

Paper-ID: VGI\_198101



## Charakteristische Daten und Testberechnungen im österreichischen Anteil an ED 79

Erhard Erker <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Abteilung K 2 (Erdmessung),  
Friedrich-Schmidt-Platz 3, A-1082 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **69** (1), S.  
1–17

1981

BibT<sub>E</sub>X:

```
@ARTICLE{Erker_VGI_198101,  
Title = {Charakteristische Daten und Testberechnungen im {"o}sterreichischen  
Anteil an ED 79},  
Author = {Erker, Erhard},  
Journal = {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {1--17},  
Number = {1},  
Year = {1981},  
Volume = {69}  
}
```



## Charakteristische Daten und Testberechnungen im österreichischen Anteil an ED 79

Von *Erhard Erker*, Wien

### Zusammenfassung

Übereinstimmend mit internationalen Gepflogenheiten wurde auch in Österreich der nationale Anteil an RETrig II bzw. ED 79 einer kritischen Betrachtung unterzogen. In dieser Veröffentlichung werden die entsprechenden Ergebnisse, soweit sie bereits Gegenstand anderer Publikationen sind, zusammengefaßt und durch die folgenden neuen Untersuchungen ergänzt:

1. Untersuchung der Dreiecksschlüsse auf Normalverteilung und der Einfluß der Lotabweichung.
2. Aufdeckung von groben Fehlern mit Hilfe einer Untersuchung der Residuen (Pope-Test).
3. Untersuchung der Residuen auf Normalverteilung ( $\chi^2$ -Test).
4. Fisher-Test.

### Abstract

In accordance with international usages the national Austrian part of RETrig II respectively ED 79 was critical analysed too. As they are subjects of other publications, the corresponding results are mentioned in an abridged form in this paper. The following new investigations, computed by statistical methods are supplemented:

1. Investigation of the triangle misclosures with respect to their distribution and the influence of the deflection of the vertical,
2. Detection of blunders by scrutinizing the residuals (Pope-test),
3. Investigation of the residuals with respect to their distribution ( $\chi^2$ -test),
4. The Fisher-Test criterion.

## 1. Die Beobachtungsdaten

### 1.1. Richtungen

Der österreichische Anteil an ED 79 enthält 745 Richtungen in 138 Sätzen. Angebracht wurden die folgenden Reduktionen, bezogen auf das Internationale Ellipsoid von 1924 (Hayford):

- Reduktion vom astronomischen auf den ellipsoidischen Zenit (Reduktion wegen Lotabweichung im Standpunkt)
- Reduktion wegen der Höhe des Zielpunktes

Die Reduktion auf die geodätische Linie bleibt in allen Fällen so klein, daß sie vernachlässigt werden konnte.

Der mittlere Fehler einer Richtung wurde aus RETrig I mit 0,449" übernommen. Als Richtungsgewicht wurde 1 eingeführt.

Zur Abschätzung der Genauigkeit vor der Ausgleichung wurden *Untersuchungen der Dreieckswidersprüche* (Bjerhammar 1966 und Bretterbauer 1967 [1]) sowie der Seitengleichungswidersprüche (Litschauer 1973 [2]) durchgeführt. Von einer eingehenderen Diskussion der Daten nach Anbringung der Reduktion vom astronomischen auf den ellipsoidischen Zenit wurde, abgesehen von einer Gegenüberstellung der größten Dreiecks- und Seitengleichungswidersprüche vor und nach der Lotabweichungskorrektur in [3], Abstand genommen. Die Auswirkungen dieser Korrekturen im Gesamtnetz ergaben sich als sehr klein, und vor allem schien keine systematische Verfälschung enthalten gewesen zu sein. Eine graphische Darstellung der Restklaffungen nach einer Helmert-Transformation, die den Einfluß der Lotabweichungen aufzeigt, wurde ebenfalls in [3] gebracht. Die mittlere Restklaffung beträgt nur  $\pm 42$  mm.

Theoretisch müßte jedoch im alpinen Bereich Österreichs eine systematische Verfälschung der Richtungen und damit der Dreieckswidersprüche bemerkbar sein. Die nach der Formel  $\epsilon'' = F/R^2 \cdot \sin 1''$  berechneten Dreiecks-exzesse müßten im Gebirge einen zu kleinen Wert erhalten, da die Niveauflächen sicher stärker gekrümmt sind und damit ein kleineres R besitzen als die zugrunde liegende Schmiegunngskugel auf der Basis der Dimensionen des Referenzellipsoides. Damit würde die algebraische Summe der Dreieckswidersprüche einen zu großen Wert bzw. das Mittel einen Wert größer Null erhalten. Eine Korrektur wegen Lotabweichung müßte eine Verbesserung in Richtung Null bewirken.

Eine theoretische Abschätzung der Größenordnung des vermuteten Effektes ergibt Werte im Bereich von ungefähr  $0,1''$  bei einer angenommenen Lotabweichungsdifferenz von  $10''$  innerhalb eines Dreieckes. Sie erscheint jedoch problematisch, wenn man bedenkt, daß der Hauptanteil der Lotabweichung von der Gravitationswirkung der nächsten Punktumgebung abhängt, so daß lokale Effekte den vermuteten Trend vollkommen verdecken können.

Trotzdem wurde eine neuerliche Analyse der Dreieckswidersprüche durchgeführt, und das Ergebnis scheint obige theoretische Überlegung zu bestätigen.

Zum Unterschied zu [1] beschränkt sich die nachstehende Untersuchung auf den RETrig-Block A. Das zu untersuchende Kollektiv enthält somit nur mehr 220 Elemente, die sich zudem noch durch einige Änderungen von [1] unterscheiden. Ein Überblick kann aus der Darstellung des Blockes A in Abb. 1 mit dem in jedem Dreieck eingetragenen Dreiecksschluß gewonnen werden. Verwendet wurden natürlich hiebei die wegen Lotabweichung korrigierten Richtungen.

Die erste Analyse ergab:

Anzahl der Elemente:	$n = 220$
arithmetisches Mittel:	$M = +0,013''$
Standardabweichung:	$s = \pm 0,944''$

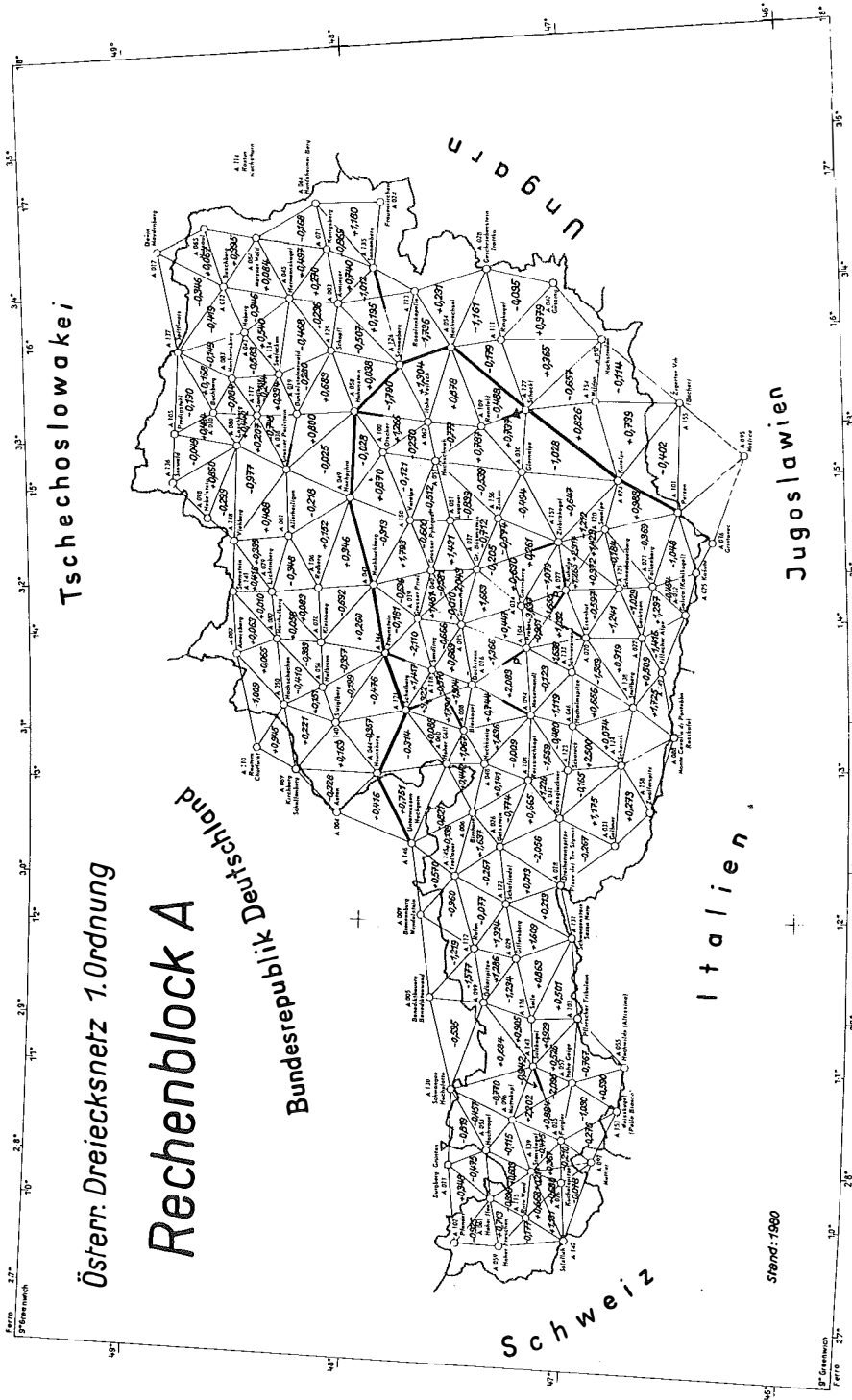


Abb. 1

Schließt man die beiden Werte  $-3,637''$  (104 Preber – 34 Greimberg – 77 Kuhalpe) und  $+3,322''$  (121 Schafberg – 118 Sandling – 8 Bleikogel), die erheblich über der dreifachen Standardabweichung von  $\pm 2,83''$  liegen, von einer weiteren Untersuchung aus, so ergeben sich die folgenden Daten:

$$\begin{aligned} n &= 218 & \Sigma w_{red} &= +3,088'' & M &= \Sigma w_{red}/n \\ M &= +0,014'' \\ s &= \pm 0,887'' \end{aligned}$$

Vor Anbringung der Lotabweichung hat sich für dasselbe Kollektiv ergeben:

$$\begin{aligned} n &= 218 & \Sigma w &= +4,999'' \\ M &= +0,023'' \\ s &= \pm 0,868'' \end{aligned}$$

Ein Vergleich der beiden algebraischen Summen  $\Sigma w_{red} = +3,088''$  und  $\Sigma w = +4,999''$  bestätigt die oben angeführte Vermutung eines systematischen Einflusses der Lotabweichung und eine Verbesserung des Mittels auf einen näher bei Null liegenden Wert.

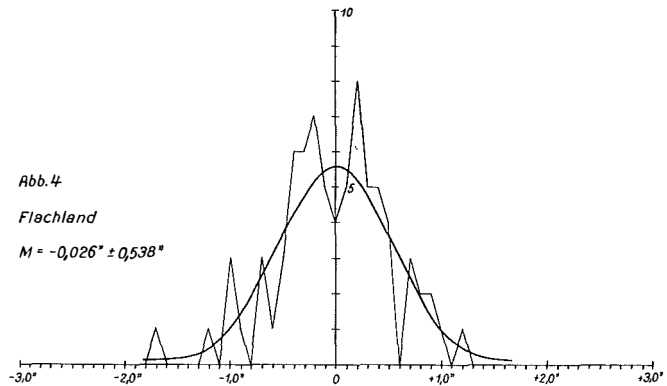
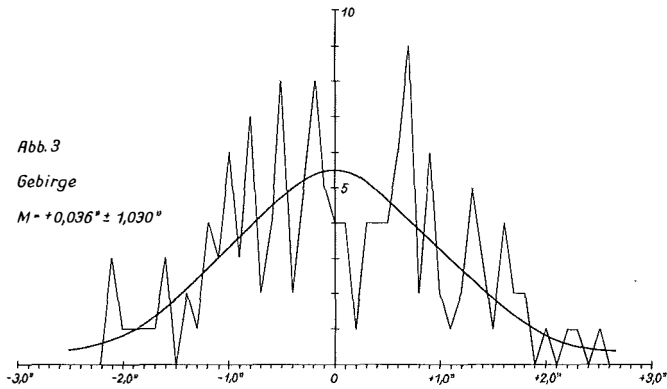
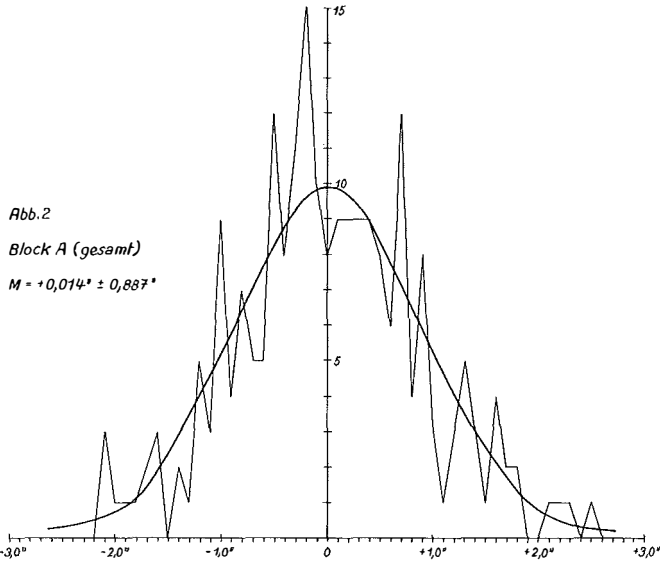
Eine kritische Betrachtung der Verteilung der Dreieckswidersprüche nach ihren Absolutbeträgen im gesamten Bundesgebiet läßt ein Zerfallen des Kollektivs in zwei Teilkollektive vermuten. Dem Bereich des alpinen Österreichs mit großen Dreiecksschlüssen steht das nordöstliche Flachland mit kleinen Werten gegenüber. In der Abb. 1 wurde die Abgrenzung der beiden Gebiete durch eine dicke Linie hervorgehoben. Sie entspricht etwa dem nördlichen und östlichen Rand des alpinen Österreichs. Die beiden Teilkollektive werden im folgenden dem Gesamtkollektiv gegenübergestellt und in bezug auf Normalverteilung untersucht. Im speziellen wurde, ähnlich wie in [1], dem Häufigkeitspolygon die Normalverteilungskurve gegenübergestellt, wobei das Klassenintervall mit  $0,1''$  angenommen wurde, das entspricht etwa einem Zehntel der Standardabweichung  $s$ . Die Normalverteilung ergibt sich aus:

$$y = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2s^2}$$

Weiters wurde die Kurtosis nach der Formel

$$K = \frac{[x^4](n-1)}{[x^2]^2}$$

berechnet. Dabei ist  $x$  die Abweichung vom arithmetischen Mittel  $M$ .  $K$  zeigt an, ob eine Verteilung gegenüber der Normalverteilung in der Spitze überhöht und im Mittelteil verengt oder aber in der Spitze verflacht und im Mittelteil verbreitert ist. Für eine Gaußsche Normalverteilung müßte  $K = 3,0$  sein. Für eine verflachte Kurve gilt  $K < 3,0$ , für eine überhöhte  $K > 3,0$ .



*Abb.2-4: Häufigkeitspolygone und Normalverteilungskurven der Dreiecks widersprüche im Netz 1. Ordnung (wegen LA korrigiert).*

Block A gesamt:	Gebirge:	Flachland:
$n = 218$	$n = 141$	$n = 77$
$\sum w_{\text{red}} = + 3,088''$	$\sum w_{\text{red}} = + 5,065''$	$\sum w_{\text{red}} = - 1,997''$
$M = + 0,014'' \pm 0,887''$	$M = + 0,036'' \pm 1,030''$	$M = - 0,026'' \pm 0,538''$
$K = 2,998$	$K = 2,410$	$K = 3,450$
$m_R = \pm 0,362''$	$m_R = \pm 0,420''$	$m_R = \pm 0,218''$

Tabelle 1

Der mittlere Fehler  $m_R$  einer Richtung wurde nach Ferrero mit

$$m_R = \pm \sqrt{\frac{[ww]}{6n}}$$

berechnet. Die Kurtosis ergibt für den gesamten Block A Normalverteilung. Durch die Zerlegung in die beiden Teilkollektive zeigt sich jedoch, daß dies für die Dreieckswidersprüche tatsächlich nicht zutrifft. Hier kann man deutlich eine Verflachung für die Werte im Gebirge und eine Überhöhung für die Flachlanddreiecke erkennen. Diese letztgenannte Überhöhung ist für Präzisionsmessungen durchaus normal, hingegen läßt die Verflachung für das Kollektiv Gebirge auf einen noch nicht berücksichtigten Einfluß schließen. Als mögliche Ursache könnten Zielfehler angenommen werden, die sich aus einseitigen Beleuchtungseffekten der durch Pyramiden signalisierten Zielpunkte ergeben würden. Darauf hindeuten würden auch die beiden im Häufigkeitspolygon für das Gebirge auftretenden beiderseits Null liegenden Maxima. Die Beobachtungen im Hochgebirge waren zumeist nur bei besonders gutem, d. h. wolkenfreiem Wetter möglich, so daß eine einseitige Sonnenbestrahlung des Signales obige Effekte bewirken könnte. Weiters war man natürlich bestrebt, die wenigen für eine Messung geeigneten Tage optimal auszunützen, so daß die Beobachtungen auch noch möglichst schnell, d. h. unter gleichen äußeren Bedingungen, durchgeführt wurden.

Als Folge obiger Ergebnisse wäre eventuell eine neue unterschiedliche Gewichtung der Richtungen vorzunehmen. Wenn man die beiden mittleren Fehler nach Ferrero heranzieht, würde sich ein Gewichtsverhältnis von 1 : 3,5 ergeben. Sicher nicht im nächsten Ausgleich mitzuverwenden sind die beiden Richtungen 8 Bleikogel nach 118 Sandling und 77 Kuhalpe nach 104 Preber. Als Kriterium für das Ausscheiden gerade dieser beiden Richtungen wurde zusätzlich ein Test nach Pope [4] herangezogen (s. Kapitel 6.1.), bei dem die erste oben genannte Richtung knapp an der Schranke liegt, die zweite Richtung eindeutig als Ausreißer definiert wurde.

### 1.2. Distanzmessungen

Im Block A enthalten sind 30 *Maßstabsseiten*, gemessen mit Geodimeter 2A und 8, sowie zwei aus Invar-Basismessungen abgeleitete Seiten 1. Ordnung (die „Wiener Basis“ bzw. die Seite 73 Königsberg – 84 Matznerwald und die Basis von Radovljica mit der Entwicklungsseite 32 Golica – 75 Košuta) sowie 12 *Verhältnisseiten*, gemessen mit Tellurometer. Für letztere wurde zusätzlich eine Maßstabsunbekannte mit in die Ausgleichung eingeführt. Die Basis-Entwicklungsseite 102 Pfänder – 119 Säntis (Basis „Heerbrugg“) liegt bereits im Block CH (Schweiz).

Alle Distanzen wurden auf das Internationale Ellipsoid 1924 (Hayford) unter Verwendung des Bomford-Geoides 1970/71 reduziert.

Die Gewichte der Seiten sind a-priori-Gewichte und entstammen den Fehleruntersuchungen der Drahtmessungen und der Vergrößerungsnetze bzw. sind bei den direkt gemessenen Seiten aus den mittleren Fehlern der Beobachtungen in Abhängigkeit von Seitenlänge und Anzahl der Wiederholungen abgeleitet. Sie erreichen Werte zwischen 15 und 617 bei 1 als Gewicht einer Richtungsbeobachtung. Eine Überprüfung der Richtigkeit der Gewichtsannahmen für die Distanzen wurde in Kapitel 6.3 versucht.

### 1.3. Azimute

Die Azimute basieren auf der Messung des Horizontalwinkels zwischen einem Polstern und der Zielstation (siehe [3]). An die gemessenen Daten wurde zusätzlich zu den in 1.1 angeführten Reduktionen noch die Laplace-Korrektur (bzw. der Laplace-Widerspruch) angebracht. Der mittlere Fehler eines Azimutes wurde mit 0,2" angenommen (Gewicht 5).

## 2. Die Beobachtungen im Gesamtnetz ED 79

	<u>ED 79 gesamt:</u>	<u>Block A:</u>
Richtungen:	20 238	745
Maßstabsseiten:	2732	32
Verhältnisseiten:	1660	12
Azimute:	481	12
n:	25 111	801
Unbekannte: Orientierung:	3941	138
Maßstab:	35	1
Koordinaten:	7194	274
Gesamt (u):	11 170	413
Redundanzen ( $r = n - u$ ):	13 941	388

Tabelle 2



Die ED 79 (gesamt) entsprechenden Daten wurden der RETrig-Publikation Nr. 13 „The European Datum 1979“ [5] entnommen.

Das Gesamtnetz besteht aus 10 Blöcken: A, B, CH, D, E, F, GB, I, NL, SKAN (DK, N, S, SF). Gemeinsame Punkte bestehen derzeit für A mit CH (4), D (10) und I (11). Der Block A enthält 126 Punkte 1. Ordnung und die Satellitenstation Lustbühel. Im Ausgleich weiters enthalten sind 10 Punkte in der CSR und in YU mit Beobachtungsdaten aus der Zeit der Monarchie.

### 3. Datenvorbereitung

#### 3.1. Standardisierungsfaktoren

Unter der Annahme, daß in den einzelnen Teilblöcken die Beobachtungen mit gleicher Genauigkeit durchgeführt worden wären, müßte der mittlere Gewichtseinheitsfehler in allen Blöcken gleich groß sein. Da dies jedoch nicht zutrifft, mußte vor der Vereinigung der Teilblöcke zum Gesamtnetz jede Einheit gesondert standardisiert werden, so daß der mittlere Gewichtseinheitsfehler für jeden Block gleich 1 wird.

Der Standardisierungsfaktor  $S_i$  ist gegeben durch:

$$S_i = 1/m_{oi}^2 \quad m_{oi}^2 = (1^T P 1)_i / r_i \quad r_i = n_i - u_i$$

#### 3.2. Konformitätstest

Die nationalen Normalgleichungssysteme wurden bis zu jener Stufe teilreduziert, in der nur mehr die von vornherein abbesprochenen gemeinsamen Punkte mit ihren Unbekannten sowie eventuell Satellitenstationen enthalten waren. Diese Nahtmatrizen wurden in den RETrig-Rechenstellen gesammelt und weiter bearbeitet. Um Spannungen zwischen den einzelnen Blöcken aufzudecken, wurden vorerst die Nahtmatrizen zweier benachbarter Länder unter Festhalten eines gemeinsamen Punktes und damit Verfügungen über die beiden Freiheitsgrade des Systems zu Ende reduziert. Die Ergebnisse wurden nach Helmert-Transformationen einander gegenübergestellt [5]. Die Restvektoren geben Aufschluß über systematische Einflüsse in Maßstab und Orientierung, sofern sie nach der Transformation klein werden im Vergleich mit den Werten vor der Transformation. Sind die Restvektoren nicht wesentlich kleiner, läßt dies bloß auf Beobachtungsfehler schließen.

Für den Block A treten die folgenden Differenzen in Maßstab und Orientierung zu seinen Nachbarblöcken auf:

	Maßstab	Orientierung
A – CH:	+ 1,6 ± 1,8 mm/km	+ 1,15" ± 0,38"
A – D:	+ 0,7 ± 0,4 mm/km	+ 0,97" ± 0,09"
A – I:	+ 1,7 ± 0,7 mm/km	– 0,60" ± 0,15"

### 3.3. Singularität

Vor der Vereinigung der teilreduzierten Nahtmatrizen zum Gesamtsystem wurde jede Nahtmatrix einem Singularitätstest unterzogen. Da in allen Blöcken durch Seitenmessungen und Laplace-Azimute bereits über Maßstab und Orientierung verfügt worden war, müßte der Rangdefekt jeder Nahtmatrix 2 sein, d. h. man kann nur mehr über die beiden Freiheitsgrade der Lage des Netzes verfügen. Anders ausgedrückt sollte die resultierende Restmatrix der Ordnung 2 eine Nullmatrix sein.

Für den Block A sind die folgenden Koeffizienten dieser Restmatrix bestimmt worden:

$$\begin{matrix} 0,000\ 0008 & - & 0,000\ 0002 \\ & & 0,000\ 0019 \end{matrix}$$

Die entsprechenden Werte für den Block D sind:

$$\begin{matrix} 0,000\ 0929 & 0,000\ 0044 \\ & 0,000\ 1121 \end{matrix}$$

Wenn man in Betracht zieht, daß die Abweichungen von Null (auch für D) niemals  $10^{-3}$  übersteigen und der größte Matrix-Koeffizient auf  $10^4$  ansteigt, ergibt sich eine Abweichung in der Größenordnung von  $10^{-7}$ . Abweichungen in dieser Größenordnung können sicher durch Rundungsfehler erklärt werden.

Um die Vereinbarkeit der Blöcke zu testen, wurden Singularitätstests jeweils auch für alle anschließenden Blöcke (jeweils zwei Blöcke zu einem System vereint) durchgeführt.

### 4. Der Gesamtausgleich

Die zehn teilnehmenden nationalen Blöcke wurden nach dem „Additionstheorem für reduzierte Normalgleichungen“ (H. Wolf, 1965) vereinigt.

Dieses Gesamtsystem als freies Netz enthält 313 Unbekannte:

- 226 Koordinatenunbekannte für 113 Nahtpunkte
- 48 Koordinatenunbekannte für 24 Satellitenstationen
- 14 Koordinatenunbekannte für 7 andere Stationen
- 23 Orientierungsunbekannte für gemeinsame Richtungssätze
- 2 Koordinatenunbekannte für den Zentralpunkt D 7835

Über die Koordinaten des Zentralpunktes D 7835 – München, Frauenkirche, nördl. Kuppelturm, wurde durch Anhalten der ED-50-Koordinaten verfügt.

$$\begin{matrix} \varphi = 48^\circ\ 08'\ 22,2273''\ N \\ \lambda = 11^\circ\ 34'\ 26,4862''\ E \end{matrix}$$

Das Gesamtnetz wurde nach der Methode der „Variation der Koordinaten“ ausgeglichen.

$$dx_i = M_i d\varphi_i$$

$$dy_i = N_i \cos \varphi_i d\lambda_i$$

$d\varphi_i$  und  $d\lambda_i$  ergeben die Verschiebungen gegenüber ED 50. Der Gewichtseinheitsfehler für das Gesamtsystem ED 79 ergab sich mit

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{1^m P_1}{r}} = \pm 1,007$$

### 5. Die Berechnung des RETrig-Teilblockes A

Die Berechnung des österreichischen Anteiles an RETrig wurde in einigen Teilstufen durchgeführt, um den Einfluß der jeweils neu hinzukommenden Daten (Distanzmessungen, Azimute etc.) abschätzen zu können. Eine detaillierte Darstellung der Netzvergleiche u. a. in Form von Helmert-Transformationen wurde in [6] gegeben. Zusammenfassend sollen hier nur einige charakteristische Zahlen angeführt werden:

Der Einfluß der gemessenen Maßstabsseiten ergibt sich bei einem Vergleich von ED 50 mit ED 77 mit  $-0,17 \cdot 10^{-6}$ , d. h. der Maßstab, gegeben durch ED 50, ist um den Faktor 0,17 mm/km zu groß. Bei einem Vergleich zwischen dem Gebrauchsnetz und ED 77 ergibt sich für den Westteil (W-Tirol, Vorarlberg) ein Faktor von  $+14,49 \cdot 10^{-6}$  und den Ostteil von  $+0,90 \cdot 10^{-6}$ . Der Übergang von ED 77 nach ED 79 macht sich im Maßstab kaum bemerkbar ( $+0,09 \cdot 10^{-6}$ ).

Die Zunahme der 12 Laplace-Azimute bewirkt im westlichen Teil eine Rotation im Uhrzeigersinn von 1,2", im östlichen Teil (einschließlich etwa Salzburg) eine Rotation in der anderen Richtung von 0,5".

Der Zwang der anschließenden Blöcke im letzten Teilschritt ist nur im westlichsten Teil Österreichs von Einfluß. Er erreicht hier Beträge bis etwa 30 cm.

Der Einfluß des erst 1979 in Madrid beschlossenen Überganges auf das neue System ED 79 sowie die endgültigen Koordinaten bzw. Azimute und Bogenlängen in diesem System wurden in [7] zusammengestellt.

### 6. Testberechnungen im Block A

Gemäß den internationalen Vereinbarungen (RETTrig Symposium Madrid 1979) wurden die Ergebnisse von ED 79 den folgenden kritischen Betrachtungen unterzogen.

- a) einem Ausreißer-Test nach Pope
- b) einem  $\chi^2$ -Test auf Normalverteilung
- c) einem Fisher-Test

6.1. Ausreißer-Test nach Pope ( $\tau$ -Kriterium) [4]:

Die in diesem Test fixierte Schranke  $\tau_s$  hängt von der Anzahl der Beobachtungen, der Anzahl der Unbekannten und der Wahrscheinlichkeit ab, daß ein korrekter Wert verworfen wird. Zur Bestimmung von  $\tau_s$  wurden die Tabellen in [4] verwendet.

Alle standardisierten Verbesserungen  $\bar{v}_i$ , die  $\tau_s$  übersteigen, werden verworfen.

$$\bar{v}_i = \left| v_i / m_{v_i} \right|$$

$$m_{v_i} = m_o \sqrt{Q_{v_i} v_i}$$

Dabei ist  $v_i$  die Restverbesserung (Residuum) und  $m_{v_i}$  der mittlere Fehler des Residuum.

$Q_{v_i}$  sind die Diagonalelemente der Matrix  $Q_v$ . Da die Berechnung der Matrix  $Q_v$  für große Netze auf enorme Schwierigkeiten stößt, können die  $m_{v_i}$  mit einer Näherungsformel nach Schive [8] ermittelt werden.

$$\bar{m}_{v_i} = \frac{m_o}{\sqrt{p_i}} \sqrt{\frac{n-u}{n}}$$

$n$  ..... Anzahl der Beobachtungen

$u$  ..... Anzahl der Unbekannten

$$\bar{v}_i = v_i / m_{v_i} \doteq v_i / \bar{m}_{v_i} = \frac{v_i}{m_o} \sqrt{p_i} \sqrt{\frac{n}{n-u}} = v_i \sqrt{p_i} \cdot 3,207$$

Für die Ausgleichung Österreich allein (November 1977) mit  $m_o = 0,448$  sowie  $n = 801$  und  $n - u = 388$  ergeben sich die folgenden Schrankenwerte:

$$\tau_{10} = 3,79 \quad \tau_{05} = 3,96 \quad \tau_{01} = 4,30$$

$\tau_{01}$  bedeutet, daß das Risiko, korrekte Werte ausgeschieden zu haben, größer ist als 1%.

Als Ausreißer konnten bei einem Risiko von 5% die folgenden Beobachtungen identifiziert werden:

Richtung 77 (Kuhalpe) nach 104 (Preber):  $v = 3,835^{cc} \bar{v}_i = 3,986$

Richtung 104 (Preber) nach 16 (Dachstein):  $v = 4,008^{cc} \bar{v}_i = 4,166$

In beiden Fällen ist  $\bar{v}_i > \tau_{05}$ , d. h. bei einem Risiko von 5% sind beide Richtungen als Ausreißer zu verwerfen (s. auch Kapitel 1.1). In Abbildung 1 sind die beiden Richtungen mit einer dicken Linie hervorgehoben und mit der Bezeichnung P („Pope“) versehen worden. Richtungen, deren  $\bar{v}_i$  knapp an der Schranke liegen, wurden ebenfalls eingezeichnet (nur dicke Linie). Knapp an der Schranke liegt auch das Laplace-Azimut 127 (Schöckl) nach 109 (Rennfeld) (Pfeil in Abb. 1).

### 6.2. Untersuchung der Residuen auf Normalverteilung

Um eine Untersuchung der Residuen  $v_i$  auf Normalverteilung zu ermöglichen, wurden sie vor Weiterverarbeitung wieder standardisiert

$$\bar{v}_i = v_i / m_{v_i}$$

und damit wahren Fehlern vergleichbar gemacht. Für die Berechnung von  $m_{v_i}$  wurde wieder wie in 6.1. die Näherungsformel von Schive verwendet.

Der Vergleich einer Stichprobe mit einem beliebigen theoretischen Verteilungsgesetz läßt sich am besten mit Hilfe des  $\chi^2$ -Anpassungstestes durchführen. Im speziellen werden die standardisierten Residuen des RETrig-Blockes A auf ihre Gaußsche Normalverteilung untersucht.

Die Stichprobe  $n$  wird in  $k$  Klassen unterteilt. Die empirischen Klassenhäufigkeiten seien  $n_j$ , so daß

$$n = \sum_{j=1}^k n_j$$

Ihnen gegenüber stehen die theoretischen der Normalverteilung entsprechenden Klassenhäufigkeiten  $np_j$ . Die Werte  $p_j$  können als Differenzen der Verteilungsfunktionen  $\Phi(x)$  der jeweiligen Klassengrenzen  $x$  entsprechenden Tabellen (z. B. Kreyszig [9], S. 393, oder Höpcke [10], S. 218) entnommen werden. Falls die Stichprobe normalverteilt ist, gilt nach K. Pearson asymptotisch

$$X = \frac{(n_j - np_j)}{\sqrt{np_j}} \sim N(0,1)$$

In Worten ausgedrückt: das Variat  $X$  ist eine eindimensionale Normalverteilung mit dem Erwartungswert 0 und der Streuung 1. (Die Streuung 1 ist durch die vorangegangene Standardisierung bedingt.) Dann nähert sich aber auch die Stichprobenfunktion  $\chi_o^2$  asymptotisch  $\chi_a^2$ .

$$\chi_o^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$$

Die Quantilen der  $\chi_a^2$ -Verteilung können wieder Tabellen entnommen werden (z. B. Kreyszig, S. 402, oder Höpcke, S. 185). Ist  $\chi_o^2 < \chi_a^2$  kann die Hypothese  $X \sim N(0,1)$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\alpha$  angenommen werden.

Ein  $\chi^2$ -Anpassungstest für die Richtungsverbesserungen nach dem Ausgleich ED 79 für den Block A ergibt die in nachstehender Tabelle enthaltenen Werte. Dabei wurden jedoch wieder, wie schon in 1.1, die Teilkollektive Flachland (1. Spalte) und Gebirge (2. Spalte) zusätzlich auch getrennt einem Test unterzogen. Anschaulich dargestellt wurden die Werte  $n_j - np_j$  in Abbildung 5.

x	$\phi(x)$	$n_j$	$p_j$	$n_j - np_j$	$x^2$
- 3,9	0	1/ 5/ 6	0,004	- 0,09/+ 3,16/+ 3,06	0,007/5,427/3,185
- 2,7	0,004	1/ 9/10	0,014	- 2,82/+ 2,53/- 0,29	2,082/0,989/0,008
- 2,1	0,018	3/33/36	0,049	-10,38/+10,36/- 0,02	8,053/4,741/ 0
- 1,5	0,067	17/56/73	0,117	-14,94/+ 1,95/-13,00	6,988/0,070/1,965
- 0,9	0,184	69/75/144	0,198	+14,95/-16,48/- 1,53	4,135/2,969/0,016
- 0,3	0,382	92/107/193	0,236	+27,57/- 8,03/+19,54	11,797/0,591/2,201
+ 0,3	0,618	65/86/151	0,198	+10,95/- 5,48/+ 5,47	2,218/0,328/0,206
+ 0,9	0,816	19/51/70	0,117	-12,94/- 3,05/-16,00	5,242/0,172/2,977
+ 1,5	0,933	5/29/34	0,049	- 8,38/+ 6,36/- 2,02	5,248/1,787/0,113
+ 2,1	0,982	1/11/12	0,014	- 2,82/+ 4,53/+ 1,71	2,082/3,172/0,284
+ 2,7	0,996	0/ 6/ 6	0,004	- 1,09/+ 4,16/+ 3,06	1,090/9,405/3,185
+ 3,9	1,000				

$$273/462/735 = n \quad \sum x^2 = \chi_0^2 = 48,942/29,651/14,140$$

$$k = 11 \quad f = k - 1 = 10 \quad \dots \quad \chi_{10;0,95}^2 = 18,31$$

$$\chi_{0,gesamt}^2 = 14,140 < \chi_{10;0,95}^2 = 18,31$$

Tabelle 3

Die Annahme, die Residuen wären normalverteilt, bestätigt sich nur für das Gesamtkollektiv. Bei Betrachtung der Teilkollektive zeigt sich wieder die respektable Überhöhung der Verteilungsfunktion gegenüber der Normalverteilung im Flachland. Im Gebirge tritt der umgekehrte Effekt auf. Ähnlich wie die Betrachtung der Dreieckswidersprüche in Kapitel 1.1 läßt die obige

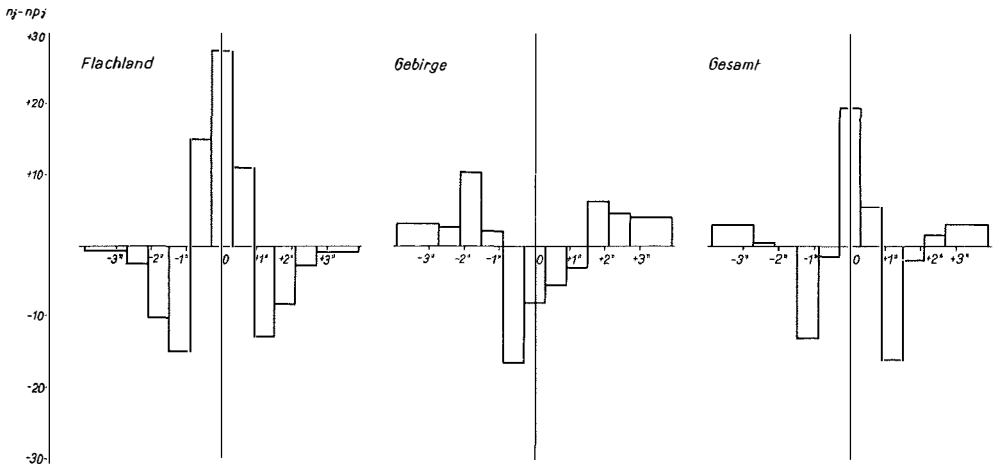


Abb. 5

Diskussion der Residuen darauf schließen, daß es angezeigt wäre, für die Richtungsbeobachtungen im Flachland und im Gebirge unterschiedliche Gewichte einzuführen.

### 6.3. Die Fisher-Verteilung

Statistische Schlüsse betreffend Azimut- und Distanzmessungen sind innerhalb des österreichischen Anteiles an ED 79 wegen der geringen Anzahl der Daten derzeit noch kaum repräsentativ. Trotzdem soll unter der Annahme der Normalverteilung zum Abschätzen der Richtigkeit des Gewichtsansatzes ein Fisher-Test versucht werden.

Die Fisher-Verteilung behandelt die stochastischen Eigenschaften zweier  $\chi^2$ -Verteilungen. Sie ermöglicht u. a. den Vergleich zweier empirischer Varianzen als Signifikanztest auszuführen. Unter der Annahme von Normalverteilung läßt sich damit der Fisher-Test auch auf die verschiedenen Beobachtungsgruppen (Richtungen, Distanzen, Azimute) des Blockes A anwenden. Da jedoch die einzelnen Versionen des Ausgleichs und somit auch ihre Gewichtseinheitsfehler  $m_i$  voneinander nicht unabhängig sind, wäre der Fisher-Test in etwas modifizierter Form anzuwenden.

Die prinzipielle Durchführung des Tests läßt sich in folgender Form angeben:  $m_1^2$  und  $m_2^2$  mit den Freiheitsgraden  $f_1$  und  $f_2$  ergeben:  $m_1^2 > m_2^2$ . Zu prüfen ist, ob  $m_1^2$  *signifikant* größer als  $m_2^2$  ist. Die Varianz  $m_1^2$  ist mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  signifikant größer als  $m_2^2$ , wenn

$$F = m_1^2 / m_2^2 > F_{f_1, f_2, 1 - \alpha}$$

Diese sogenannten einseitigen Quantilen  $F_{f_1, f_2, 1 - \alpha}$  der Fisher-Verteilung können Tabellen in den gängigen Lehrbüchern der Statistik entnommen werden (z. B. Kreyszig [9], S. 406–409).

Im Falle des RETrig-Blockes A stehen folgende Versionen zur Verfügung:

Version 1: Netz enthält ausschließlich Richtungen

Version 2: Netz enthält Richtungen und Azimute

Version 3: Netz enthält Richtungen und Distanzen

Version 4: Netz enthält Richtungen, Azimute und Distanzen

In der nachstehenden Tabelle enthalten sind die für das Netz Anteil A an RETrig (A separat ausgeglichen, Koordinaten 102 [Pfänder] ident ED 50) berechneten Werte für  $v^T P v$ . Dabei wurden die 6 fingierten Beobachtungen zur Bestimmung der Satellitenstation Lustbühel nicht berücksichtigt.

	$v^T P v$	$n_i$	$(f_i)$	$(m_i^2)$	$(m_i)$	$f_i$
1.) Richtungen:	72,191	741	359,8	0,201	0,448	332
2.) Ri + Azimute:	74,509	753	365,6	0,204	0,451	344
3.) Ri + Distanzen:	75,518	783	380,2	0,199	0,446	373
4.) Ri + Di + Az:	77,836	795	386,0	0,202	0,449	386
		$n_g = 795$				

$n_i$  ..... Anzahl der Beobachtungen

$n_g$  ..... Anzahl der Beobachtungen im Gesamtsystem

$(f_i)$  ... geschätzte Anzahl der Freiheitsgrade

$(m_i)$  ... geschätzter Gewichtseinheitsfehler des Systems

$$(m_i^2) = \frac{v^T P v}{(f_i)}$$

Tabelle 4

Problematisch ist die Angabe der Freiheitsgrade ( $f_i$ ), da hier keine unabhängigen Berechnungsgruppen einander gegenüberstehen. Als Näherung kann die für die Bestimmung der Freiheitsgrade im Teilsystem als bekannt vorausgesetzte Anzahl der Unbekannten im Teilsystem proportional der Anzahl der Beobachtungen gesetzt werden.

$$u_i = \frac{n_i u_g}{n_g} \quad (f_i) = n_i - \frac{n_i u_g}{n_g}$$

$u_g$  ..... Unbekannte im Gesamtsystem

Dieser Ansatz ist natürlich nicht übereinstimmend mit der Vorgangsweise bei der Ausgleichung der einzelnen Versionen. So bleibt zum Beispiel die



tatsächliche Anzahl der Unbekannten beim Übergang von Version 1 auf Version 2 gleich groß und beim Übergang von Version 1 auf Version 3 wäre nur zusätzlich die Maßstabsunbekannte der Tellurometermessungen zu berücksichtigen. Die dem entsprechenden tatsächlichen Freiheitsgrade  $f_i$  sind in obiger Tabelle ebenfalls enthalten.

Zum Vergleich jeweils zweier Versionen wurde das Verhältnis der Varianzen  $F$  folgendermaßen abgewandelt:

$$F = \left| \frac{(v^T P v)_2 - (v^T P v)_1}{(v^T P v)_1} \cdot \frac{(f_1)}{(f_2) - (f_1)} \right|$$

In dieser Formel beinhaltet die Beobachtungsgruppe 2 mit der Varianz ( $m_2^2$ ) auch die Beobachtungen der Gruppe 1. Die Entnahme der Quantilen erfolgt dann für

$$F(f_2) - (f_1), (f_1), 1 - \alpha$$

Die Durchführung des Fisher-Testes ergab für die obigen Annahmen volle Befriedigung bei 95% Wahrscheinlichkeit. D. h. die heterogenen Beobachtungsgruppen sind mit der durchgeführten Ponderierung durchaus kompatibel.

Die Ergebnisse können der folgenden Tabelle entnommen werden:

Version 1 - Version 2 :	$(m_{Ri}^2) = 0,201$	$F = 1,99$	$F_{0,95} = 2,15$
	$(m_{Az}^2) = 0,400$		
Version 1 - Version 3 :	$(m_{Ri}^2) = 0,201$	$F = 1,23$	$F_{0,95} = 1,87$
	$(m_{Di}^2) = 0,163$		
Version 1 - Version 4 :	$(m_{Ri}^2) = 0,201$	$F = 1,07$	$F_{0,95} = 1,50$
	$(m_{Az + Di}^2) = 0,215$		

Tabelle 5

$F$  ist für alle Fälle kleiner als  $F_{0,95}$ .

Die Anwendung des Fisher-Testes unter den gegebenen Voraussetzungen ist natürlich problematisch. Um eine korrekte Gewichtsabschätzung durchführen zu können, wäre es notwendig, einem reinen Richtungsnetz ein ausschließlich aus Distanzmessungen bestimmtes Netz gegenüberzustellen. Die aus getrennten Ausgleichungen sich ergebenden mittleren Fehler (a posteriori) würden dann unter Umständen eine verbesserte Gewichtsannahme für den Gesamtausgleich ermöglichen.

Eine entsprechende Testberechnung ist derzeit innerhalb der 1. Ordnung in Österreich wegen der diskreten Verteilung der Seiten- und Azimutmessungen nicht möglich.

**Literatur**

- [1] *Bretterbauer, K.*: Eine Statistik der Dreieckswidersprüche im österreichischen Netz 1. Ordnung. ÖZfV, 55. Jg., Heft 2, 1967.
- [2] *Litschauer, J.*: Die zweite Ausgleichung des österreichischen Dreiecksnetzes 1. Ordnung. Veröffentlichung des BAfEV, Wien 1973.
- [3] *Erker, E., Litschauer, J., Losert, W.*: Die astronomisch-geodätischen Arbeiten Österreichs für ED 77. Veröffentlichung des BAfEV, Wien 1979.
- [4] *Pope, A.*: The Statistics of Residuals and The Detection of Outliers. NOAA Technical Report NOS 65 NGS 1, Rockville, 1976.
- [5] RETrig Publ. No. 13: The European Datum 1979. Report on the Symposium of the IAG Subcommission for the New Adjustment of the European Triangulation held in Madrid from 7 to 12 May, 1979.
- [6] *Litschauer, J.*: Das österreichische Dreiecksnetz 1. Ordnung in ED 77. ÖZfVuPh, 67. Jg., Heft 2, 1979.
- [7] *Erker, E.*: Der österreichische Anteil am ED 79. Veröffentlichung des BAfEV, Wien 1980.
- [8] *Schive, J.*: Berechnung des mittleren Fehlers der ausgeglichenen Werte. ZfV 323–329, 1931.
- [9] *Kreyszig, E.*: Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1973.
- [10] *Höpcke, W.*: Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. W. de Gruyter, Berlin, New York 1980.

## **Höhenkorrelation, Kovarianzfunktion und Prädiktion von Schwereanomalien in lokal begrenzten Gebieten Österreichs**

Von *Hans Sünkel*, Graz, und *R. Malits*, Oberwart

### **Zusammenfassung**

Für vier Datensätze unterschiedlicher Struktur in lokal begrenzten Gebieten Österreichs wird das Korrelationsverhalten zwischen Freiluftanomalie und Höhe sowie das statistische Verhalten, ausgedrückt durch empirische Kovarianzfunktionen und deren wesentliche Parameter, untersucht.

Die beste lineare Schätzung von Bouguer-Anomalien und Freiluftanomalien wird als Kollokationsproblem nach kleinsten Quadraten mit Parametern dargestellt. Anhand eines der vier Datensätze wird gezeigt, daß für hinreichend kleine Gebiete mit homogener Datenverteilung und homogener geologischer Struktur eine Schätzung von Punktanomalien mit dem einfachen Modell linearer Korrelation mit einer Genauigkeit von etwa  $\pm 6$  mgal möglich ist.