

Paper-ID: VGI_198301



Zur Messung kleiner Richtungsänderungen vertikaler Achsen mittels Autokollimation

Gerhard Brandstätter ¹

¹ *Technische Universität Wien, Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie,
Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **71** (1), S.
1–7

1983

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Brandstaetter_VGI_198301,  
Title = {Zur Messung kleiner Richtungs{"a"}nderungen vertikaler Achsen mittels  
Autokollimation},  
Author = {Brandst{"a"}tter, Gerhard},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u"}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {1--7},  
Number = {1},  
Year = {1983},  
Volume = {71}  
}
```



Zur Messung kleiner Richtungsänderungen vertikaler Achsen mittels Autokollimation

Von G. Brandstätter, Wien

Zusammenfassung

Die Meßanordnung wird beschrieben und ihr strenges mathematisches Modell angegeben. Die erhaltenen Formeln werden mit Rücksicht auf die sorgfältige Justierung von Laborgeräten angewendet. Abschließend werden die Meßergebnisse geometrisch interpretiert und die Möglichkeiten der Ausgleichung besprochen.

Abstract

The disposition of the method is described and its rigorous mathematical model is given. These formulas are applied with regard to the careful adjustment of laboratory instruments. Finally a geometric interpretation of the results is shown and the possibilities of least-squares-adjustment are discussed.

0. Einleitung

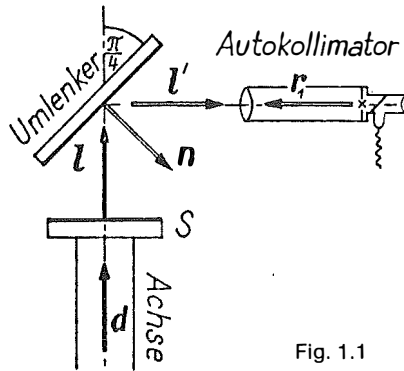
Der Nachweis des raumstabilen Umlaufs vertikaler Achsen ist eine nicht nur im geodätischen Instrumentenbau auftretende Aufgabe. Trotzdem ist es angebracht, entsprechende Versuchsanordnungen an der Stehachse eines Theodolits zu erproben, weil in diesem Fall einige hierfür erforderliche Komponenten – z. B. für Ausrichtung und Positionierung – schon vorgegeben sind.

Die prinzipielle Behandlung der Aufgabe ist nicht neu. Sie findet sich in mehreren älteren Publikationen, insbesondere aber in [H. Matthias, 1961] und [R. Schwebel, 1968]. Bei der praktischen Anwendung der dort enthaltenen Resultate ergeben sich jedoch immer wieder Fragen hinsichtlich der geometrischen Interpretation der Meßergebnisse, weshalb nachstehend versucht wird, ein möglichst durchsichtiges geometrisches Modell für diese Feinmeßmethode zu entwerfen.

1. Meßanordnung

Die als Prüfling anzusehende Stehachse \mathbf{d} eines Gerätes wird anhand der Alhidadenlibelle möglichst vertikal ausgerichtet und so mit einem Planspiegel S versehen, daß dessen Flächennormale \mathbf{l} möglichst parallel zu \mathbf{d} ist. Die Lageänderung der Spiegelnormalen wegen Drehung um \mathbf{d} ist mittels Autokollimation zu messen, weshalb zwischen einem horizontal ausgerichteten Autokollimatorfernrohr mit der Zielachse r_1 und dem Prüfling ein Umlenkspiegel (Normale \mathbf{n}) mit einer Neigung von ca. $\pi/4$ anzuordnen ist (Fig. 1.1). Dadurch wird ein annähernd vertikaler Lichtstrahl in Richtung \mathbf{l} in eine annähernd horizontale Richtung \mathbf{l}' umgelenkt und kann so bequem mit dem horizontalen Fernrohr beobachtet werden.

Zur Beobachtung dient entweder ein speziell hierfür gefertigter Kollimator, in welchem mit Hilfe eines bidirektionalen Mikrometers die Lage des reflektierten Fadenkreuzbildes in der Fadenkreuzebene ausgemessen wird, oder das auf Unendlich fokussierte Fernrohr eines Präzisionstheodoliten mit Autokollimationsokular, so daß durch Herstellung der Koinzidenz von Fadenkreuz und Fadenkreuzbild die beiden Parameter der Richtung \mathbf{l}' als Meßgrößen vorliegen.



2. Analytische Beschreibung des Beobachtungsvorganges

Die Projektion des Fadenkreuzes erfolgt mit einem Parallelstrahlenbündel in Richtung r_1 . Diese wird am Umlenker nach der in [G. Brandstätter, 1980] angegebenen Beziehung

$$r_2 = (E - 2N)r_1$$

($N = nn^T$, E ...Einheitstensor) auf den Spiegel S gelenkt, dort zufolge

$$r_3 = (E - 2L)r_2$$

($L = ll^T$) reflektiert und schließlich nach einer zweiten Umlenkung

$$r_4 = (E - 2N)r_3$$

wieder dem Fernrohr zugeführt, wo in der Brennebene das Bild des Fadenkreuzes entsteht.

Zwecks Prüfung ihrer Raumstabilität wird die Achse in festen Winkelschritten $\Delta\alpha = 2\pi/r$ positioniert und die Auswirkung dieser Drehung auf die Spiegelnormale l beobachtet. Ihre jeweilige Lage ist nach [K. Rinner, 1957] anhand der Beziehung

$$l = \{E \cos\alpha + D(1 - \cos\alpha) + A \sin\alpha\} l_0 = R l_0 \tag{2.1}$$

zu berechnen. Hierin bedeuten:

$$D = dd^T = \begin{pmatrix} d_1d_1 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2d_2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3d_3 \end{pmatrix} \text{ Projektionstensor bezüglich } d,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_1 & d_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ schiefsymmetrischer Tensor bezüglich } d,$$

R Drehtensor der allgemeinen räumlichen Drehung

und l_0 eine beliebige Ausgangslage der Spiegelnormalen. Die zuvor verwendeten Tensoren L und N unterliegen demselben Bildungsgesetz wie D und sind die Projektionstensoren bezüglich der Normalen l bzw. n .

Aus den drei Reflexionsvorgängen und dem Drehvorgang (2.1) ergibt sich schließlich mit

$$\begin{aligned} r_4 &= (E - 2N)(E - 2L)(E - 2M)r_1 = \\ &= (E - 2N)\{E - 2(Rl_0)(Rl_0)^T\}(E - 2M)r_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

jene hinsichtlich r_1 explizite Vektorgleichung, welche für beliebig ausgerichtete d , l , n und r_1 die resultierende Richtung r_4 liefert.

Die sorgfältige Ausrichtung der Versuchsanordnung ergibt natürlich gewisse Vereinfachungen in den Elementen der allgemeinen Gl. (2.2) (Fig. 2.1):

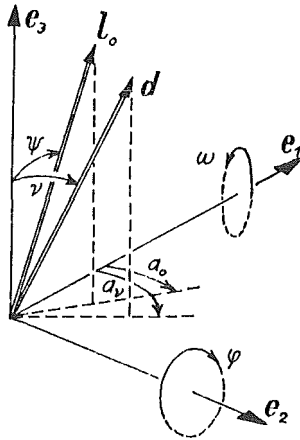


Fig. 2.1

... d und l_0 weichen nur geringfügig von der örtlichen Lotrichtung ab, somit sind die ersten beiden Komponenten von

$$\begin{aligned} d^T &= (d_1 = \nu \cos a_\nu, d_2 = \nu \sin a_\nu, d_3 = 1) \text{ und} \\ l_0^T &= (l_{01} = \psi \cos a_\psi, l_{02} = \psi \sin a_\psi, l_{03} = 1) \end{aligned}$$

klein von erster Ordnung.

... die Normale n des Umlenkspiegels soll möglichst genau in der $[e_1, e_3]$ -Ebene liegen. Sie kann daher mit Hilfe kleiner Neigungen ω (bezüglich e_1) und φ (bezüglich e_2) aus der Sollnormalen $n_0^T = (\sin \pi/4, 0, -\cos \pi/4)$ anhand der Beziehung

$$n = n_0 + dA_n n_0 = n_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi \\ 0 & 0 & -\omega \\ -\varphi & \omega & 0 \end{pmatrix} n_0$$

berechnet werden.

Dies wirkt sich folgendermaßen aus:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & d_2 \\ 1 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_3(\alpha) + d\mathbf{R}(\alpha)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{D}(1 - \cos\alpha) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix} \sin\alpha$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{R}_3 \mathbf{l}_0 + d\mathbf{R} \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} l_{11} = 1 & l_{12} = 0 & l_{13} = 0 \\ l_{21} = 0 & l_{22} = 1 & l_{23} = 0 \\ l_{31} = 0 & l_{32} = 0 & l_{33} = 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & d_1(1 - \cos\alpha) + d_2 \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & d_2(1 - \cos\alpha) - d_1 \sin\alpha \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & l_2 \\ l_1 & l_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{n}\mathbf{n}^T = (\mathbf{n}_0 + d\mathbf{A}_n \mathbf{n}_0)(\mathbf{n}_0 + d\mathbf{A}_n \mathbf{n}_0)^T = \mathbf{N}_0 + d\mathbf{A}_n \mathbf{N}_0 + \mathbf{N}_0 d\mathbf{A}_n^T$$

$$\mathbf{N}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - 2\varphi & \omega & -1 \\ \omega & 0 & -\omega \\ -1 & 1 + 2\varphi & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} - 2\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2\varphi & -\omega & 1 \\ -\omega & 1 & \omega \\ 1 & \omega & -2\varphi \end{pmatrix}$$

Das Parallelstrahlenbündel hat daher beim Austritt aus dem Spiegelsystem die Richtung

$$\mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2\omega - 2l_2 & 4\varphi - 2l_1 \\ -2\omega - 2l_2 & 1 & 0 \\ 4\varphi - 2l_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}_1$$

deren Beobachtung entweder Mikrometerkoordinaten (y, z) oder Richtungsparameter (Horizontal- und Vertikalablesung) liefert.

3. Beobachtungsmethoden

3.1 Beobachtung mittels festem Kollimator

Das Bild des Fadenkreuzschnittpunktes entsteht in der Bildebene des Kollimators mit der Brennweite f aufgrund der wohlbekannten projektiven Abbildungsgleichungen

$$y = f \frac{\mathbf{r}_4 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{r}_4 \cdot \mathbf{e}_1} \quad \text{und} \quad z = f \frac{\mathbf{r}_4 \cdot \mathbf{e}_3}{\mathbf{r}_4 \cdot \mathbf{e}_1}, \quad (3.1)$$

wenn der Kollimator genau nach den Koordinatenachsen \mathbf{e}_i justiert ist, was hier vereinfachend angenommen sei. Damit gilt auch $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{e}_1$ und mit Hilfe der Ausdrücke für \mathbf{l} aus (2.3)

$$\mathbf{r}_4 = - \begin{pmatrix} -1 \\ -2\omega - 2l_2 \\ 4\varphi - 2l_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \{ l_{01} \sin\alpha + l_{02} \cos\alpha + d_2(1 - \cos\alpha) - d_1 \sin\alpha + \omega \} \\ 2 \{ l_{01} \cos\alpha - l_{02} \sin\alpha + d_1(1 - \cos\alpha) + d_2 \sin\alpha - 2\varphi \} \end{pmatrix}$$

Eine entsprechende Auswertung der Gleichungen (3.1) ergibt dann

$$\begin{aligned} y &= -2f \{ (1_{o1} - d_1) \sin \alpha + (1_{o2} - d_2) \cos \alpha + d_2 + \omega \} \\ z &= -2f \{ -(1_{o2} - d_2) \sin \alpha + (1_{o1} - d_1) \cos \alpha + d_1 - 2\varphi \}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

woraus folgt, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die Gesamtheit der fehlerfreien Bildpunkte auf einem Kreis mit dem Radius

$$r = 2f \left\{ (1_{o1} - d_1)^2 + (1_{o2} - d_2)^2 \right\}^{1/2} = 2f \left\{ \nu^2 + \psi^2 - 2\nu\psi \cos(a_o - a_\nu) \right\}^{1/2}$$

und den Mittelpunktskoordinaten

$$m_2 = -2f(d_2 + \omega), \quad m_3 = -2f(d_1 - 2\varphi)$$

liegt. Dies steht nicht im Widerspruch zu der in [R. Schwebel, 1968] wiedergegebenen Auswertung solcher Messungen nach einer Soll-Ellipse. Sobald nämlich Neigungen zweiter Ordnung am Umlenker vorliegen oder etwa die Kollimatorachse um einen endlichen Neigungsbetrag aus der Horizontalen e_1 abweicht, liegen y und z auf einer Ellipse, was anhand der Gleichungen (3.1) leicht zu sehen ist. Bei guter Ausrichtung aller Elemente muß aber die Einrechnung einer Ellipse in die Mikrometerkoordinaten wegen zu geringer Exzentrizität numerisch instabil werden. Es genügt dann, die Auswertung nach einem ausgleichenden Kreis wie in [H. Matthias, 1961] vorzunehmen.

3.2 Beobachtung mittels Autokollimationsfernrohr

Die Messung erfolgt durch Ablesung an den beiden Kreisen eines mit Autokollimationsokular versehenen Sekundentheodolits, wenn zwischen Fadenkreuz und Fadenkreuzbild Koinzidenz vorliegt. Dies bedeutet, daß mit dem Fernrohr direkt die Richtung $-l'$ erfaßt wird, und zwar in der Form:

$$-l'^T = r_1^T = (\cos(\eta + o) \sin(z + i), \sin(\eta + o) \sin(z + i), \cos(z + i))$$

- η ... Horizontalrichtung,
- o ... Orientierung des Horizontalkreises,
- z ... Zenitdistanz,
- i ... Indexfehler des Vertikalkreises.

Die strenge Gleichung für den Strahlengang lautet dann

$$r_1 = -(E - 2M)Rl'_0$$

welche bei guter Justierung (wegen η , o , i und $\zeta = \pi/2 - z$ klein von 1. Ordnung) in die Linearform

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \eta + o \\ \zeta - i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1_2 + \omega \\ 1_1 - 2\varphi \end{pmatrix}$$

übergeht und ein zu (3.2) analoges Gleichungspaar

$$\begin{aligned}\eta &= -(l_{01}-d_1)\sin\alpha - (l_{02}-d_2)\cos\alpha - d_2 - \omega - o \\ \zeta &= (l_{02}-d_2)\sin\alpha - (l_{01}-d_1)\cos\alpha - d_1 + 2\varphi + i\end{aligned}\quad (3.3)$$

liefert. Fehlerfreie Meßwerte η und ζ haben als geometrischen Ort somit ebenfalls einen Kreis, Radius ρ und Mittelpunktskoordinaten (μ_1, μ_2) sind leicht zu entnehmen.

l_0 und d sind im allgemeinen nicht trennbar. Nur wenn Umlenker und Fernrohr weitestgehend fehlerfrei ausgerichtet sind ($\omega = 2\varphi = o = i = 0!$), was mit einigem Aufwand erreichbar ist, können die Komponenten von d und in Folge auch von l_0 berechnet werden. Auf diesem Wege wäre es z. B. möglich, die plausibelste Raumlage von d und bei Verwendung eines Biplanspiegels die Orthogonalität der Auflagefläche für S bezüglich d nachzuweisen.

4. Zur Auswertung der Meßergebnisse

Die Zielsetzung derartiger Untersuchungen an Theodoliten ist die Ermittlung von Taumelfehlern der Stehachse. Sie erfolgen über eine Kreisinterpolation in die Meßwerte gemäß (3.2) oder (3.3), Berechnung der Residuen und Interpretation derselben. Da aufgrund des Verfahrens in n über den Vollkreis gleich verteilten Positionen α_j Meßwerte vorliegen, nehmen die Normalgleichungen der Interpolation Diagonalform an, die Kreisparameter ergeben sich etwa im Falle des Ansatzes (3.3) bei Gleichgewichtigkeit der Beobachtungen mit

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -(l_{01}-d_1) = \frac{1}{n} ([\eta \sin\alpha] - [\zeta \cos\alpha]), \\ \rho_2 &= -(l_{02}-d_2) = \frac{1}{n} ([\eta \cos\alpha] + [\zeta \sin\alpha]), \\ \mu_1 &= -d_2 - \omega - o = \frac{1}{n} [\eta], \quad \mu_2 = -d_1 + 2\varphi + i = \frac{1}{n} [\zeta],\end{aligned}$$

als einfache Mittelbildungen, die einzelnen Residuen lauten

$$\begin{aligned}\delta_{1j} &= \eta_j - \rho_1 \sin\alpha_j - \rho_2 \cos\alpha_j - \mu_1 \\ \delta_{2j} &= \zeta_j + \rho_1 \cos\alpha_j - \rho_2 \sin\alpha_j - \mu_2\end{aligned}$$

und ihre Quadratsumme folgt aus

$$[\delta\delta] = [\eta\eta] + [\zeta\zeta] - n(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2). \quad (4.1)$$

Die δ sind untereinander nicht korreliert, ebenso die gewöhnlich aus ihnen gebildeten Radialkomponenten

$$\delta_{rj} = \delta_{1j} \cos\alpha_j + \delta_{2j} \sin\alpha_j = (\eta_j - \mu_1) \cos\alpha_j + (\zeta_j - \mu_2) \sin\alpha_j - \rho_2,$$

welche daher ohne weitere Komplikationen mittels Fourier-Analyse auf systematische Anteile untersucht werden können. Die Amplituden und Phasen der Analyse müssen natürlich signifikant und vor allem reproduzierbar sein, weshalb meist mehrere aufeinanderfolgende Meßdurchgänge durchzuführen sind. In Abhängigkeit von der Achskonstruktion muß außerdem ein ganz bestimmtes Phasenverhalten auftreten [R. Schwebel, 1968], welches aber nach einer Untersuchung in [G. Gerstbach, 1977]

bei den gängigen Universalgeräten nur im Fall der „dynamischen“ Primärachse signifikant reproduzierbar ist. Bei schwacher oder nicht signifikanter Reproduzierbarkeit liefert (4.1) nach Abspaltung der Meßunsicherheit praktisch die Varianz des Rundlaufs der Stehachse, welche bekanntlich in die Horizontalrichtungen mit der Tangente des Höhenwinkels, in die Zenitdistanzen direkt eingeht.

Literatur

Brandstätter, G.: Richtungsfehler außerachsialer Strahlengänge in Kompensatorfernrohren. Mitteilungen d. geod. Inst. d. TU Graz, Nr. 35, Graz 1980.

Gerstbach, G.: Zur Azimutmessung mit Sekundentheodoliten. Österr. Zeitschr. f. Vermesungsw. u. Photogr., 64. Jg., Heft 2, Wien 1977.

Matthias, H.: Umfassende Behandlung der Theodolitachsenfehler auf vektorieller Grundlage unter spezieller Berücksichtigung der Taumelfehler der Kippachse. Diss. ETH Zürich, Verlag Leemann, Zürich 1961.

Rinner, K.: Über räumliche Drehungen. DGK, Reihe A, Nr. 25, München 1957.

Schwebel, R.: Untersuchung instrumenteller Fehler von Universal- und Passageinstrument mit Hilfe von Autokollimation. DGK, Reihe C, Nr. 117, München 1968.

Manuskript eingelangt: August 1982.

Die Minimaldifferenzen-Anfelderung

Von *J. Kitzmüller*, Graz

Zusammenfassung

Aus den Problemen bei Montagen von Karten- und Katastralmappenblättern mit vorausgehender Maßstabsänderung (Vergrößerung oder Verkleinerung) ist eine mathematische Methode entwickelt worden, die die Minimierung von Blattstoßdifferenzen erlaubt. Im folgenden wird diese Methode verallgemeinert wiedergegeben, da sie unter bestimmten Voraussetzungen auch auf andere, in Einzelflächen unterteilte Maßzahlenfelder (Gesamtflächen) anwendbar ist. Dabei können auch mehrere solcher Gesamtflächen übereinander liegen. Das Rechenschema entspricht weitgehend dem eines vermittelnden Ausgleiches.

Abstract

From the problems of mounting maps and cadastral map sheets, in which the scale has been previously altered (enlarged or reduced), a mathematical method has been developed, which minimizes the differences of fitting the sheet edges together.

The following lines explain this method in a generalized way, because in certain circumstances it can also be used for other fields with measurements (total fields), which are divided into single planes. It is also allowed that several total fields are lying on top of another. The scheme of calculation corresponds largely to an adjustment of observation equations.