

Paper-ID: VGI\_198402



## Lokale Geoidbestimmung und Lotabweichungsfeld in Österreich

Erhard Erker <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen, Abt. K 2 (Erdmessung),  
Schiffamtsgasse 1-3, 1020 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **72** (1), S.  
10–24

1984

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Erker_VGI_198402,  
Title = {Lokale Geoidbestimmung und Lotabweichungsfeld in {"0}sterreich},  
Author = {Erker, Erhard},  
Journal = {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {10--24},  
Number = {1},  
Year = {1984},  
Volume = {72}  
}
```



Wenn es also gelänge, z.B. bei den Frequenzen, denen die Wellenlängen 400 nm und 1 000 nm entsprechen, Laufzeitunterschiede beider Frequenzen auf  $10^{-10}$  der gesamten Laufzeit zu bestimmen, so müßte es möglich sein, auf die Laufzeit im leeren Raum zu extrapolieren und das Resultat sollte dann auf etwa  $10^{-8}$  richtig sein. Wir wollen aber über dieses Verfahren hier nicht weiter sprechen und dies Berufeneren überlassen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß aufgrund der neuen Meterdefinition Strecken im leeren Raum, also im extraterrestrischen Bereich auf einige  $10^{-10}$  meßbar sind und daß zu erwarten ist, daß dieser Wert in den nächsten Jahrzehnten auf  $10^{-13}$  bis  $10^{-14}$  gesenkt werden kann.

Die neue Meterdefinition wird sehr lange Zeit unverändert in Geltung bleiben können, da sie auf dem für die Lichtgeschwindigkeit festgesetzten Wert und auf der Sekunde beruht; sie ist jedoch in ihrem Wortlaut von der Sekundendefinition unabhängig.

Die neue Meterdefinition entspricht der Forderung, die die Gründer des metrischen Maßsystems vor rund 200 Jahren aufgestellt haben; sie beruht auf Naturmaßen, die allen Völkern dieser Erde in gleicher Weise zugänglich sind.

---

Manuskript eingelangt: Jänner 1984

#### Literatur

*Braunbeck, J.; Hasenauer, W., Lewisch, R.* (1980): Von der Elle zum Atommaß, Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien, 1980

*Moreau, H.* (1975): Le système métrique; Editions Chiron, Paris, 1975

*Ulbrich, K.* (1972): 100 Jahre metrisches Maßsystem in Österreich, Veröffentlichung des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien, 1972

*Beschlüsse* der 17. Generalkonferenz der Internationalen Kommission für Maß und Gewicht, Paris, 1983

## Lokale Geoidbestimmung und Lotabweichungsfeld in Österreich

Von *E. Erker*, Wien

#### Abstract

After an estimation of the influences of geoid undulations and deflections of the vertical to geodetic measurements the Austrian efforts in the determination of gravity field parameters are shown in a historical view. The presentation of corresponding modern results is divided into two parts. The first one deals with investigations of the Austrian Federal Bureau of Standards and Surveying, which were executed in the sense of Helmert's astro-geodetic levelling but in a slightly modified way. The second part is a presentation of the calculations of the Graz group (Technical University of Graz), who was applying the modern algorithm of collocation. The last chapter is a trial to explain the small but systematic discrepancies between the two solutions.

### 1. Einleitung

In der klassischen Geodäsie galt schon seit den Tagen von Gauß und Helmert die Bestimmung des Geoides — der Niveaulfläche des Erdschwerefeldes in der mittleren Höhe der Weltmeere — als zentrales Problem. Diese Hauptaufgabe der Höheren Geodäsie erlangt heute von neuem größte Bedeutung und zwar sowohl in wissenschaftlich-geophysikalischer Hinsicht als auch für praktisch-geodätische Zielsetzungen.

Für den Praktiker ermöglicht die Kenntnis des Schwerefeldes der Erde bzw. des Geoides die Transformation der geodätischen Beobachtungsdaten aus dem physikalischen Raum der Messung in den geometrischen Raum der Abbildung.

Jede geodätische Messung — soll sie einer zweidimensionalen Berechnung zugeführt werden — bezieht sich auf Parameter des Erdschwerefeldes. Transformationselemente sind im Falle des Nivellements oder für die Reduktion von Raumstrecken die Geoidundulationen — die Höhen des Geoides über dem Referenzellipsoid — und im Falle von Vertikal- oder Horizontalmessungen die Lotabweichungen — die Richtungsunterschiede zwischen astronomischen und ellipsoidischen Zenit.

Eine noch nicht voll abschätzbare große Bedeutung könnte die Bestimmung des regionalen Schwerefeldes erlangen, sobald geodätische Navigationsgeräte (Trägheitsplattformen — geodetic inertial systems) in der Praxis ihre Anwendung finden.

### 2. Der Einfluß von Geoidundulationen und Lotabweichungen auf Raumstrecken, Richtungen und Vertikalwinkel

Um den Einfluß von Geoidhöhen und Lotabweichungen auf die geodätischen Daten abschätzen zu können, seien im folgenden die bekannten Reduktionsformeln zusammengestellt. (Heiskanen, Moritz, 1967, Seite 189 — 193)

#### 2.1. Raumstrecken:

$$L_o = \sqrt{\frac{L^2 - (h_2 - h_1)^2}{(1 + n_1/R)(1 + h_2/R)}} \qquad s_o = 2R \sin^{-1} L_o / 2R \qquad (1a,b)$$

- L ... Raumstrecke
- L<sub>o</sub> ... Sehne
- s<sub>o</sub> ... Bogen
- h<sub>i</sub> ... ellipsoidische Höhen mit h<sub>i</sub> = H<sub>i</sub> + N<sub>i</sub>
- H<sub>i</sub> ... orthometrische Höhen
- N<sub>i</sub> ... Geoidundulationen

Der Einfluß ΔL<sub>o</sub> der vernachlässigten Undulationsdifferenz ΔN ergibt sich aus der Differenziation der Formel (1a) (s. auch Zeger (1978)).

$$\Delta L_o = - \frac{\Delta h}{L_o} \Delta N \doteq - \text{ctg } z \Delta N \qquad (1c)$$

z ... Zenitdistanz

### 2.2. Richtungen bzw. Horizontalwinkel:

$$\Delta\alpha = \eta \operatorname{tg}\varphi + (\xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha) \operatorname{ctg} z \quad (2)$$

$\xi, \eta$  . . . Lotabweichungskomponenten in N-S bzw. O-W-Richtung  
 $\alpha$  . . . Azimut  
 $\varphi$  . . . geogr. Breite

Der erste Term in dieser Formel repräsentiert die Laplace'sche Gleichung in ihrer üblichen vereinfachten Form und bewirkt ausschließlich eine Drehung des gesamten Richtungssatzes, sodaß für nahezu horizontale Visuren die gesamte Reduktion vernachlässigt werden kann.

Bei größeren Höhenwinkeln erreicht  $\Delta\alpha$  sein Maximum für

$$\Delta\alpha_{\max} = \varepsilon \operatorname{ctg} z \quad \varepsilon \dots \text{Lotabweichung}$$

Testberechnungen in den österreichischen Alpen haben gezeigt, daß Reduktionen bis über 30<sup>cc</sup> möglich sind (Erker, 1983; Zeger, 1983).

### 2.3 Vertikalwinkel:

Der Einfluß der Lotabweichung auf einen Vertikalwinkel erreicht maximal den Betrag der Lotabweichung selbst (im Gebirge Werte bis 70<sup>cc</sup>!)

$$\Delta z = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha \quad \Delta z_{\max} = \varepsilon \quad (3)$$

## 3. Zur Geschichte der Geoidbestimmung in Österreich

Obwohl die oben angeführten vermessungstechnischen Probleme natürlich schon seit langem zum theoretischen Rüstzeug des Geodäten gehören, war man bis vor wenigen Jahren nur in Ausnahmefällen in der Lage, sie in der Praxis zu lösen. Grund hierfür war der hohe meßtechnische Aufwand, der vor allem bei der Bestimmung von Lotabweichungen in Kauf zu nehmen war. Erst die Verwendung von Prismenastrolabien und von transportablen Zenitkamern, zusammen mit handlichen Kleinquarzuhren, sowie die konsequente Unterstützung durch ausgereifte EDV-Programme ermöglichte das Beobachten und Aufbereiten der notwendigen umfangreichen Datensätze.

Trotz dieser Schwierigkeiten gibt es in Österreich eine lange Tradition in der Geoidbestimmung.

Schon kurz nach den klassischen Arbeiten Galles im Harz (Galle, 1914) und lange vor dem viel zitierten astronomischen Nivellement im Meridian von St. Gotthard wurde in Österreich von Oberst Ing. Andres ein Geoidprofil mit Punktabständen von 3 — 5 km im Meridian von Laibach bestimmt (Andres, 1919). Bekannter, und von großräumiger Erstreckung sind die Arbeiten von Hopfner, Prey und Ledersteger (1951), die im wesentlichen Lotabweichungen auf Triangulierungspunkten 1. Ordnung verwendeten. Auf dieselbe Punktdichte mußte sich auch die Studie von Litschauer (1953) beschränken, die zum ersten Mal versuchte, ein lokales, österreichisches Geoid darzustellen.

1971 wurde von G. Bomford — 1975 bzw. 1978 von Levallois und Monge ergänzt — ein europäisches Geoid präsentiert, das allerdings im österreichischen Bereich nur bedingt repräsentativ war. Grund hierfür war, daß bei der Geoidberechnung alle Stationen, auf denen die  $\eta$ -Komponenten der Lotabweichung aus Azimutmessungen bestimmt worden waren, nicht

verwendet werden konnten. Da das Triangulierungsnetz 1. Ordnung noch keinem astronomisch-geodätischen Netzausgleich unterzogen worden war, waren alle geodätischen Azimute mit dem Laplace'schen Widerspruch  $w$  behaftet und deshalb nicht verwendbar. Die  $\eta$ -Komponente der Lotabweichung wäre damit ebenfalls um den Betrag von  $w$  verfälscht gewesen:

$$\eta = (\alpha_A - \alpha_G) \operatorname{ctg} \varphi \quad (4)$$

$$(\alpha_A - \alpha_G) = (\lambda_A - \lambda_G) \sin \varphi + w \quad (5)$$

$\alpha_A$  . . . astronomisches Azimut

$\alpha_G$  . . . geodätisches Azimut

$\lambda_A$  . . . astronomische Länge

$\lambda_G$  . . . geodätische Länge

$\varphi$  . . . Breite

Gleichung (5) stellt bekanntlich die (vereinfachte) Laplace - Bedingung dar.

Nach der Neuberechnung des österreichischen Triangulationsnetzes 1. Ordnung im Rahmen von ED 79 — einem astronomisch-geodätischen Netzausgleich — waren selbstverständlich auch die aus Azimut-Messungen stammenden Lotabweichungen für eine Geoidbestimmung verwendbar. (Die aus zusätzlichen Messungen von  $\lambda$  bestimmten Laplace'schen Widersprüche  $w$  nach dem Ausgleich waren fast alle  $< 1''$  !) Allerdings waren von den 107 beobachteten Lotabweichungsstationen in der 1. Ordnung etwa 40 auszuscheiden, weil die Winkelmeßgenauigkeit nicht den modernen Anforderungen entsprach.

Der Grund für die Inangriffnahme von Lotabweichungsmessungen auf allen Punkten 1. Ordnung nach dem 2. Weltkrieg lag übrigens in der nachdrücklichen Empfehlung der Subkommission RETrig der IAG (Internat. Assoziation für Geodäsie), daß die Reduktion von astronomischen auf den ellipsoidischen Zenit gemäß Formel (2) für alle Richtungssätze der 1. Ordnung durchzuführen wäre. Nachdem klassische Längenmessungen auf den hochalpinen Stationen nahezu unmöglich waren, mußte man die praktisch und theoretisch unzulänglichen Azimutmessungen zur Bestimmung der Ost-West-Komponente der Lotabweichung verwenden. Abgeschlossen wurden diese Arbeiten im Jahre 1976. (Erker, Litschauer, Losert, 1979)

Messungen zur astrogeodätischen Geoidbestimmung mit Hilfe von modernen Simultanverfahren (Zeiss Ni2 Astrolabium) wurden vom Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen (BEV) im Jahre 1977 gestartet. Erste Versuche in der Geoidbestimmung mit klassischen Methoden waren bereits in den frühen Sechzigerjahren unternommen worden. Das Zeiss Ni2 Astrolabium war schon seit 1975 in der Lotabweichungsbestimmung auf Punkten 1. Ordnung eingesetzt, sodaß eine enge Vertrautheit mit Methode und Gerät bereits zu Beginn des Projektes „Geoidbestimmung“ gegeben war.

Motiviert durch die Resolutionen Nr. 25 und 26 der XVI. Generalversammlung der IAG, in denen die Dringlichkeit der Schaffung von Geoidkarten betont und vor allem die Alpenländer aufgefordert worden waren, ihre diesbezüglichen Arbeiten zu intensivieren, kam es 1978 zur ersten Kooperation des BEV mit den Technischen Universitäten Graz, Innsbruck und Wien bei der Bestimmung eines Geoidprofils im Parallel 47° nördl. Breite. Außerdem wurden von den beteiligten Arbeitsgruppen Pilotstudien zur Optimierung der Meß- und Rechenverfahren in Angriff genommen (Erker, 1980; Sünkel, 1982). Gefestigt wurde die begonnene Zusammenarbeit zur Geoidbestimmung im Rahmen der ÖKIE (Österr. Kommission für die Internat. Erdmessung) und im Nationalkomitee für Geodäsie und Geophysik der Österr. Akademie der Wissenschaften, indem die Bestimmung eines möglichst genauen österreichischen Geoides als zentrale geodätische Aufgabe in Österreich definiert wurde.

Das Produkt dieser koordinierten Anstrengungen konnte im August 1983 im Rahmen der XVIII. Generalversammlung der IAG in Hamburg der internationalen Fachwelt präsentiert werden: **Das Geoid in Österreich**, Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internat. Erdmessung, Neue Folge, Bd. III; Herausgeber: ÖKIE, Graz, 1983.

Diese vorerst erste Iterationsstufe ist ein astro-geodätisch bestimmtes Geoidstück, das etwa vier Fünftel des Staatsgebietes von der Ostgrenze Österreichs bis nach Osttirol überdeckt. Die Berechnungen, unabhängig nach zwei verschiedenen Methoden, erfolgten aus 564 Lotabweichungen, gemessen auf Punkten der Landesaufnahme mit Abständen von 10 — 15 km. Das BEV verwendete den klassischen Algorithmus des astronomischen Flächennivellements in etwas modifizierter Form, der die Reduktion der Oberflächenlotabweichungen wegen Lotkrümmung und eine nichtlineare, von der topographischen Situation abhängige Verdichtung der Lotabweichungen am Geoid vorsieht. Die Grazer Gruppe verwendete die Methode der Kollokation nach kleinsten Quadraten, ergänzt durch eine topographisch-isostatische Datenreduktion und ein Erdmodell in Form einer Kugelfunktionsentwicklung.

#### 4. Die Berechnungen des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen

Grundlage des *astro-geodätischen Flächennivellements* ist das astronomische Nivellement entlang von Profilen. Diese auf Helmert zurückgehende älteste Methode der Geoidbestimmung basiert auf der Umformung der Lotabweichungen  $\varepsilon_o$  als Wegableitungen des Geoides durch Integration in Geoidhöhendifferenzen  $\Delta N$ .

$$\Delta N_{AB} = N_B - N_A = - \int_A^B \varepsilon_o \, ds \quad (6)$$

dabei bezieht sich  $\varepsilon_o$  auf das Geoid (Höhe 0).

$$\varepsilon_o = \xi_o \cos \alpha + \eta_o \sin \alpha \quad (7)$$

Die gemessenen Oberflächenlotabweichungen  $\varepsilon$  sind also vor ihrer Integration noch um den Betrag der Lotkrümmung

$$LK = \varepsilon - \varepsilon_o$$

zu reduzieren. Von Bedeutung ist diese Reduktion allerdings nur im Gebirge; hier aber kann sie Werte bis zu 30<sup>cc</sup> annehmen.

Die Integration der reduzierten Lotabweichungen kann numerisch aber auch graphisch erfolgen. Die Fläche unter der Lotabweichungskurve ergibt in Abhängigkeit vom Weg die Undulationsdifferenz. Da diese Kurve — auch für die wegen Lotkrümmung reduzierten Lotabweichungen — im Gebirge sehr bewegt verläuft, ist bei der Wahl des Beobachtungsortes und der Aufpunktsdistanz bei erhöhten Genauigkeitsanforderungen besondere Vorsicht geboten. Untersuchungen darüber waren schon vor Jahren u. a. von Hunziker im Meridian von St. Gotthard durchgeführt worden (Gurtner 1978).

Das BEV hat — vor allem zur Abschätzung der notwendigen Punktdichte — vor Beginn der Meßkampagnen zur Geoidbestimmung ein Testfeld bei Rauris für ähnliche Untersuchungen eingerichtet (Erker, 1980). Um den Betrag der Lotabweichungen in einem alpinen Profil quer zur Streichungsrichtung der Gebirgszüge sowie die dadurch bedingten Undulationsdifferenzen abschätzen zu können, wurden im Rauriser Testfeld in geringen Abständen von 2 — 4 km Lotabweichungen gemessen, wegen Lotkrümmung reduziert und integriert. Es ergaben sich dabei Werte für  $\Delta N$  bis zu 20 cm bei relativen Höhenunterschieden von 1000 m, natürlich in Abhängigkeit von der im Modell freigewählten Höhe der Geländeoberfläche über dem Geoid.

Wichtigste Aussage dieses Tests war, daß eine Interpolation von zusätzlichen Lotabweichungen nur im Umweg über die Topographie als weitere Information bei der aus finanziellen und terminlichen Gründen möglichen Punktdichte von 12 — 15 km sinnvoll ist.

Da bei Beginn der Berechnungen ein digitales Geländemodell nur in einem kleinen Teil Österreichs zur Verfügung stand, wurde als *Näherungslösung* versucht, die Topographie durch regelmäßige, geometrische Körper — in erster Linie lange, gleichschenkelige Prismen — zu approximieren. Synthetische Untersuchungen über die *Einflüsse regelmäßiger Körper auf die Niveauflächen* in der Nähe der Erdoberfläche wurden bereits von Helmert (1884) durchgeführt. Mit Hilfe der Helmert'schen Formeln lassen sich Betrag und Lage der maximalen Lotabweichungen in der Falllinie eines Gebirgshanges und auch im korrespondierenden Punkt in der Basisfläche des Prismas (in der Höhe 0) abschätzen, sodaß auf Grund von Modellrechnungen mit der Höhe des Prismas und der Hangneigung als Parameter eine Verdichtung des bestehenden Lotabweichungsfeldes ermöglicht wird.

Im konkreten Fall liefern die im Talboden gelegenen Beobachtungsstationen den langwelligen Anteil (den Trend) der Lotabweichung bzw. der Geoidundulationen. Zwischen den Aufpunkten wird diesem Trend als Signal der Anteil der Topographie der unmittelbaren Umgebung in den zu interpolierenden Punkten überlagert. Bei einiger Erfahrung kann man diese Signalanteile auf 2 — 3" genau empirisch abschätzen. Eine einfache mathematische Formulierung läßt sich u.U. mit Hilfe der Darstellung der Lotabweichungskurve durch eine Parabel finden (Gerstbach, 1983).

Wie aus Formel (6) hervorgeht, erfolgt die zur Geoidbestimmung notwendige Integration der Lotabweichungen in der Höhe 0, d.h. der Anteil der *Lotkrümmung* in der gemessenen Oberflächenlotabweichung ist vor der Integration abzuschätzen bzw. abzuziehen. Steht ein digitales Geländemodell nicht zur Verfügung, muß man schon bei der Wahl des Beobachtungspunktes versuchen, den Einfluß der Lotkrümmung zu minimieren. Dieses Ziel kann in den meisten Fällen erreicht werden, indem man beachtet, daß das Gelände in Bezug auf den Aufpunkt radialsymmetrisch ist; z.B. bei der Lage des Aufpunktes im tiefsten Bereich einer Talsohle mit geradliniger Erstreckung.

Die Lotkrümmung kann in erster Näherung als Differenz der aus Massen gerechneten Lotabweichungen an der Oberfläche  $\epsilon_{HTop}$  und im korrespondierenden Punkt in der Höhe 0  $\epsilon_{OTop}$  gerechnet werden (Elmiger, 1969). Dazu kommt noch die normale Lotkrümmung für die  $\xi$ -Komponente  $\Delta \epsilon_F$ , sodaß sich Formel (6) auch in folgender Form schreiben läßt:

$$\Delta N_{AB} = - \int_A^B [\epsilon_H - (\epsilon_{HTop} - \epsilon_{OTop}) - \Delta \epsilon_F] ds \quad (6a)$$

Andererseits ist die Lotkrümmung auch als Horizontalableitung der orthometrischen Korrektur OC definiert, sodaß auch gilt:

$$\Delta N_{AB} = - \int_A^B \epsilon ds - OC_{AB} \quad (6b)$$

Die Dimension der orthometrischen Korrektur, in der bekanntlich die Nichtparallelität der Niveauflächen zum Ausdruck kommt, läßt sich z.B. aus Mader (1954) abschätzen. Für den Bereich der Hohen Tauern ergeben sich Werte für OC im Bereich einiger Dezimeter.

Um nun auch diesen systematischen Anteil zu vermeiden, sowie um lokale topographische Einflüsse auszuschließen, wurde für die Geoidbestimmung des BEV beschlossen, konsequent in allen vorliegenden Aufpunkten die Reduktion der Oberflächenlotabweichungen wegen Lotkrümmung durchzuführen. Eine gewisse Einschränkung war allerdings durch das derzeit noch unvollständige digitale Geländemodell gegeben. Im hochalpinen Bereich (Osttirol) oder bei Hanglage des Punktes wurde bei nichtvorhandenem Geländemodell durch händische Entnahme von Knoten aus der Österreichischen Karte 1 : 50 000 bzw. 1 : 25 000 versucht, die Lotkrümmung mit ausreichender Genauigkeit zu bestimmen.

Verwendet wurde hierbei zur Berechnung der Lotabweichungen aus Massen im Aufpunkt und in der Höhe 0 sowohl die sogenannte Sektorenmethode als auch die Quadermethode (bei größerer Entfernung vom Aufpunkt ersetzt durch die Linienformel).

Die auf das Geoid reduzierten Lotabweichungen wurden durch zusätzliche Werte vor allem in den zu erwartenden Extremstellen ergänzt und in *Isolinienkarten* für  $\xi_0$  und  $\eta_0$  graphisch dargestellt.

Um eine flächenhafte Bestimmung des Geoides zu erhalten, können die mit dem Helmer'schen Wegintegral berechneten Undulationsdifferenzen gitterförmig zusammengesetzt und die in jedem Gitterelement auftretenden Widersprüche in der Art eines Nivellementnetzes ausgeglichen werden. Die *Ausgleichung* wurde nach bedingten Beobachtungen durchgeführt, vor allem, um die Dimension der Normalgleichungsmatrix möglichst klein zu halten. Die Dimension dieser schwach besetzten Bandmatrix war letztlich (782 x 782). Die Auflösung erfolgte mit Hilfe des Cholesky-Algorithmus.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{Bedingungsgleichungen} \quad (7a)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{k} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{Normalgleichungen} \quad (7b)$$

Aus den Korrelatengleichungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{k} \quad \dots \quad (7c)$$

lassen sich sehr einfach die Verbesserungen  $v_i$  berechnen, vor allem, wenn man bedenkt, daß die Matrix  $\mathbf{A}$  im Falle eines Nivellementnetzes als Koeffizienten nur 0, -1 oder +1 enthält.

Aus der Reduktion der Widersprüche ergibt sich als Varianz

$$m_0^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} / u = 1,69$$

Daraus abgeleitet der mittlere Kilometerfehler im Sinnes des Nivellements:

$$m_{1 \text{ km}} = \pm 1,5 \text{ cm}$$

Mit Hilfe der Verbesserungen wurden die Undulationsdifferenzen neu durchgerechnet und die Gitterpunkte kotiert.

Der vorliegende Geoidausschnitt wurde sowohl im System ED 79 in einer mittleren Höhe zum Geoid von Levallois als auch im System der österreichischen Landesvermessung (Datum MGI) orientiert und graphisch mit Linien gleicher Undulationen dargestellt (Abb. 1).

### 5. Berechnungen an der Technischen Universität Graz

Seit etwa 15 Jahren werden in zunehmenden Maße in der Geodäsie *statistische Interpolationsmethoden* verwendet, die vor allem in den letzten Jahren, bedingt durch die zum Teil anfallenden heterogenen Datensätze, zur Methode der Kollokation nach kleinsten Quadraten erweitert wurden (Moritz, 1973; Moritz, 1980).

Unter *Kollokation* versteht man in der numerischen Mathematik die Anpassung einer analytischen Näherungsfunktion an eine Anzahl gegebener linearer Funktionale.

Im speziellen Fall der Geoidbestimmung liegen z.B. Oberflächenlotabweichungen  $\xi$  und  $\eta$ , Schwereanomalien  $\Delta g$  und eventuell auch aus der Altimetrie oder aus Dopplermessungen gewonnene Geoidhöhen  $N$  als lineare Funktionale des Schwerepotentials (bzw. des Störpotentials  $T$ ) vor (Heiskanen, Moritz, 1967, S. 88).

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x} & \eta &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y} \\ \Delta g &= -\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{2}{R} T \\ N &= \frac{T}{\gamma} \end{aligned} \right\} \{ \xi, \eta, \Delta g \} = L_1 T \quad (8a - c)$$

$\gamma$  . . . Normalschwere



Will man für einen beliebigen zusätzlichen Punkt im Raum den zugehörigen Wert für T präzisieren (inter- oder extrapolieren) bzw. im Sinne der Statistik eine optimale Schätzung  $S_p$  bei kleinster Varianz durchführen, so gilt:

$$S_p = \mathbf{c}_p^T \mathbf{C}_{Sx}^{-1} \mathbf{x} \quad (9)$$

Die quadratische, symmetrische Matrix  $\mathbf{C}_{xx}$  wird dabei aus den gegenseitigen Kovarianzen aller gegebenen Meßgrößen  $\mathbf{x}$  (im Falle der Geoidbestimmung vorerst der Lotabweichungen  $\xi$  und  $\eta$ ) gebildet. Diese Kovarianzen  $C_{ik}$  repräsentieren die statistische Korrelation zwischen den Meßwerten  $i$  und  $k$ . Sie können in der Regel als Funktion der Distanz  $s$  zwischen den beiden Meßpunkten  $P_i$  und  $P_k$  und deren Höhe dargestellt werden. Für  $s = 0$  geht die Kovarianz in die Varianz  $V = C_{ii}$  — dem Quadrat des mittleren Signals — über.

Der Vektor  $\mathbf{c}_p$  enthält die Kovarianzen zwischen dem Signal  $S_p$  und den Messungen  $\mathbf{x}$ .

Zur Berechnung der Kovarianzfunktion wird als Ansatz eine geeignete Funktion verwendet, deren freie Parameter aus den gegebenen Signalen bestimmt werden müssen.

Bei der Anwendung der Kollokation auf den in Österreich vorerst vorliegenden Datensatz der astro-geodätischen Lotabweichungen — ein entsprechendes Rechenprogramm ist in (Sünkel, 1980) beschrieben — läßt sich die Interpolationsgenauigkeit wesentlich erhöhen, wenn die Meßwerte vorher *topographisch-isostatisch reduziert* werden. Dies bedeutet, daß die topographischen Massen über Meeresebene so ins Erdinnere verlagert werden, daß isostatisch bedingte Massendefizite ausgeglichen werden. Durch die Reduktion bleibt nicht nur der harmonische Charakter des Störpotentials T außerhalb der Erdoberfläche erhalten, sondern T wird auch bis zum Meeresebene harmonisch, d.h. es erfüllt die Laplace'sche Differentialgleichung. Damit kann die Kollokation auch auf Meeresebene angewendet werden und ergibt dann Höhen  $N_c$  einer dem regularisierten Zustand entsprechenden Niveauläche, dem Kogeoid, über dem Ellipsoid. Für den Aufbau eines Lotabweichungsfeldes könnte ebenso auch die Prädiktion von (reduzierten) Lotabweichungen vorgenommen werden.

Berücksichtigt man außerdem eine vorgegebene globale *Approximation des Störfeldes* T z.B. in Form einer Kugelfunktionsentwicklung bis zum Grad  $n$ , so kann für den lokalen Bereich Österreichs zusätzlich eine Trendabspaltung erwartet werden. Erst dann ist streng genommen Gleichung (9) als 0-parametrische Form der Kollokation nach kleinsten Quadraten verwendbar.

Insgesamt konnte durch Anwendung beider Reduktionen die Varianz der Lotabweichungen von etwa 30" auf 5" reduziert werden. Diese reduzierten Lotabweichungen am Kogeoid beinhalten letztlich zwei wesentliche Einflüsse: einmal die Unzulänglichkeiten des verwendeten Geländemodelles und natürlich auch Auswirkungen von Beobachtungsfehlern.

Das für die Berechnung der topographisch-isostatischen Reduktion notwendige *digitale Geländemodell* wurde in Graz durch die Digitalisierung der Schichtenlinien der Österr. Karte 1 : 500 000 (Institut für Photogrammetrie der TU Wien) und die zusätzliche Verwendung von etwa 40 000 Knoten des BEV gewonnen. Die Kompartimentengröße liegt bei 20" x 20" (400 x 600 m). Weltweit stand ein 1° x 1° Modell zur Verfügung.

Die Anwendung der Kollokation auf die reduzierten Lotabweichungen ergibt, wie gesagt, für das Niveau 0 Kogeoidhöhen  $N_c$ . Die Geoidhöhen  $N$  ergeben sich aus diesen Kogeoidhöhen  $N_c$  durch Addition des *indirekten Effektes*  $\Delta N$ :

$$N = N_c + \Delta N \quad (10a)$$

Nach Bruns ist der Betrag der Hebung der ursprünglichen Niveauläche (der indirekte Effekt) gleich dem Quotienten aus dem Gravitationspotential der zusätzlichen Massen dividiert durch die Normalschwere:

$$N = \frac{T_{PI}}{\gamma} \quad (10b)$$

Der indirekte Effekt zufolge topographisch-isostatischer Reduktion zusammen mit dem Modell des Gravitationsfeldes (Rapp, 1981) beinhaltet bereits den wesentlichsten Anteil der lokal-österreichischen Geoidstrukturen, entsprechend der topographischen Gliederung Böhmisches Masse, Alpenvorland, Alpen. (Eine gesondete graphische Darstellung dieses Anteiles wurde in "Das Geoid in Österreich" im Beitrag H. Sünkel gegeben.) Trotzdem enthielt das Restfeld noch einen signifikanten Trend in SW—NO—Richtung von etwa 3 m, der vor Anwendung der Kollokation in Abzug gebracht werden mußte. Der Kollokationsanteil selbst bewegt sich im Bereich einiger Dezimeter und weist zumeist großräumige Strukturen auf.

Mit Hilfe der Kollokation läßt sich aber neben der bisher skizzierten klassischen Lösung auch eine Aussage im Sinne der modernen *Theorie von Molodenskij* machen.

Nach Molodenskij wird einem Punkt P der Erdoberfläche ein Punkt Q zugeordnet, der auf der Lotlinie durch P so liegt, daß sein normales Schwerepotential  $U(Q)$  gleich ist dem tatsächlichen Potential  $W(P)$  des Punktes P. Dabei wird das Bezugsellipsoid (in seiner geozentrischen und achsparallelen Lage) als Niveaulfläche  $U = U_0 = \text{const.}$  des Normalschwerefeldes definiert (Niveauellipsoid). Der Abstand PQ entspricht der Höhenanomalie  $\zeta$  nach Molodenskij. Die Menge der Punkte Q definiert eine Hilfsfläche, die als Telluroid bezeichnet wird. Ihre Höhe über dem Bezugsellipsoid wird als „Normalhöhe“  $H^*$  bezeichnet. Wird die Höhenanomalie über dem Ellipsoid aufgetragen, so erhält man eine dem Geoid ähnliche Fläche, das Quasigeoid. Telluroid und Quasigeoid sind jedoch keine Niveaulflächen!

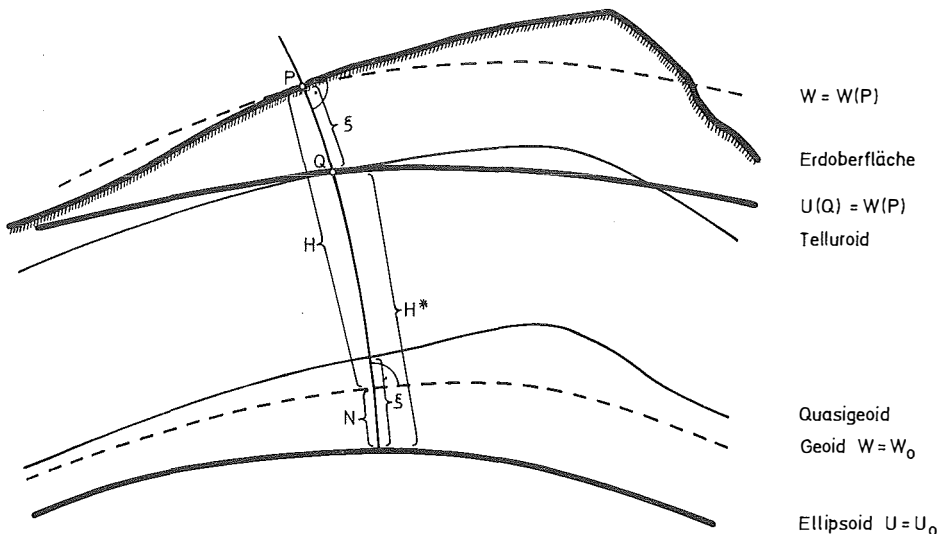


Abb. 2

Ziel der Überlegungen Molodenskij's war es, ein hypothesenfreies Höhensystem aufzubauen. In der klassischen Geodäsie wird die geometrische Höhe eines Punktes über dem Bezugsellipsoid — die ellipsoidische Höhe — zusammengesetzt aus seiner orthometrischen Höhe und der Geoidhöhe. In beiden Werten ist in irgendeiner Form das hypothetische Dichtegesetz mitenthalten. Bei Molodenskij ersetzt die Normalhöhe  $H^*$  die orthometrische Höhe  $H$  und die Höhenanomalie  $\zeta$  die Geoidundulation  $N$ . Beide Werte sind hypothesenfrei bestimmbar. Der große Nachteil dieser Methode liegt jedoch darin, daß die Ergebnisse physikalisch nicht interpretierbar sind.

Die Methode der Kollokation in Verbindung mit der topographisch-isostatischen Reduktion ermöglicht prinzipiell die Berechnung jeder Schwerefeldgröße in jedem beliebigen Punkt des Außenraumes. Um im Sinne Molodenskij's Höhenanomalien bzw. das Quasigeoid zu erhalten, war es nur notwendig, statt der Höhe 0, die für die Berechnung von Geoidundulationen verwendet wurde, die Höhe der Topographie einzusetzen.

Die Abweichung von Geoid und Quasigeoid ist damit natürlich stark mit der Topographie korreliert und folgt in bemerkenswerter Weise den theoretischen Erwartungen. Beide Flächen wurden für einen Raster mit der Maschengröße 3' (Breite) x 5' (Länge) gerechnet. Die Unterschiede zwischen Höhenanomalie und Geoidhöhe erreichen im Bereich der Zentralalpen Werte um 35 cm, in den flacheren Gebieten bleiben sie meist unter 5 cm, in Gebieten mit positiver Bougueranomalie werden sie erwartungsgemäß auch leicht negativ.

Das Grazer Ergebnis ist wieder in Form einer Schichtenlinienkarte dargestellt, diesmal allerdings im System ED 79 in einer mittleren Höhe zum Geoid der Bundesrepublik Deutschland (Lelgemann, 1981) (Abb.3). Die Berechnungen erfolgten allerdings voraussetzungs-gemäß im geozentrischen geodätischen Bezugssystem 1980 (GRS 80).

### 6. Vergleich und Diskussion der Ergebnisse

In der vorliegenden Geoidbestimmung sind alle größeren topographischen Informationen gut erkennbar und selbst kleinere Details finden ihren Niederschlag. Besonders auffallend ist nicht nur der stark ausgeprägte Abfall in die Pannonische Tiefebene, sondern auch die breite Grabenstruktur entlang der Donau in Oberösterreich. Die Übereinstimmung mit dem von Lelgemann berechneten Geoid für Deutschland im grenznahen Bereich ist hervorragend. (im 10 cm-Bereich). Der Vergleich mit den aus Dopplerdaten und orthometrischen Höhen abgeleiteten Geoidhöhen ergab eine Standardabweichung von 35 cm bei Maximalabweichungen von 60 cm.

Die Grazer Lösung erlaubte nicht nur die Schätzung von Lotabweichungen und ihrer (kollokationsinternen) Genauigkeit, sondern ermöglichte auch eine Schätzung der äußeren Genauigkeit durch Vergleich von prädierten mit gemessenen Werten. Mit dem vorhandenen Material an Lotabweichungen und dem derzeit verfügbaren digitalen Höhenmodell sind in Hilfe der Kollokation nach kleinsten Quadraten in Verbindung mit einer topographisch-isostatischen Reduktion folgende Genauigkeiten der Lotabweichungsprädiktion im Mittel erreichbar:

Flachland/Hügelland:	0,5" — 0,8"
Voralpengebiet:	1,0" — 1,5"
Hochgebirge:	1,5" — 2,5" <sup>1)</sup>

Eine Gegenüberstellung der mit den beiden Berechnungsmethoden in Wien und in Graz erzielten Ergebnisse läßt sich am einfachsten mit den Differentialformeln von Vening-Meinesz (1950) durchführen. Diese Formeln ergeben Änderungen  $\Delta N_i$  in den Punkten mit vorhandenen Geoidhöhen  $N_i$  in Funktion einer Änderung der Parameter  $\xi_o, \eta_o$ , und  $\Delta N_o$  in einem Zentralpunkt  $P_o$ . Sie können für den relativ kleinen Bereich Österreichs in folgender Form vereinfacht angeschrieben werden:

$$\Delta N_i = - \sin (\varphi_i - \varphi_o) \frac{a}{Q} \Delta \xi_o - \cos \varphi_i \sin (\lambda_i - \lambda_o) \frac{a}{Q} \Delta \eta_o + \cos (\varphi_i - \varphi_o) \Delta N_o \tag{11}$$

1) die in den letzten beiden Absätzen enthaltene Information entstammt einer persönlichen Mitteilung von H. Sünkel.

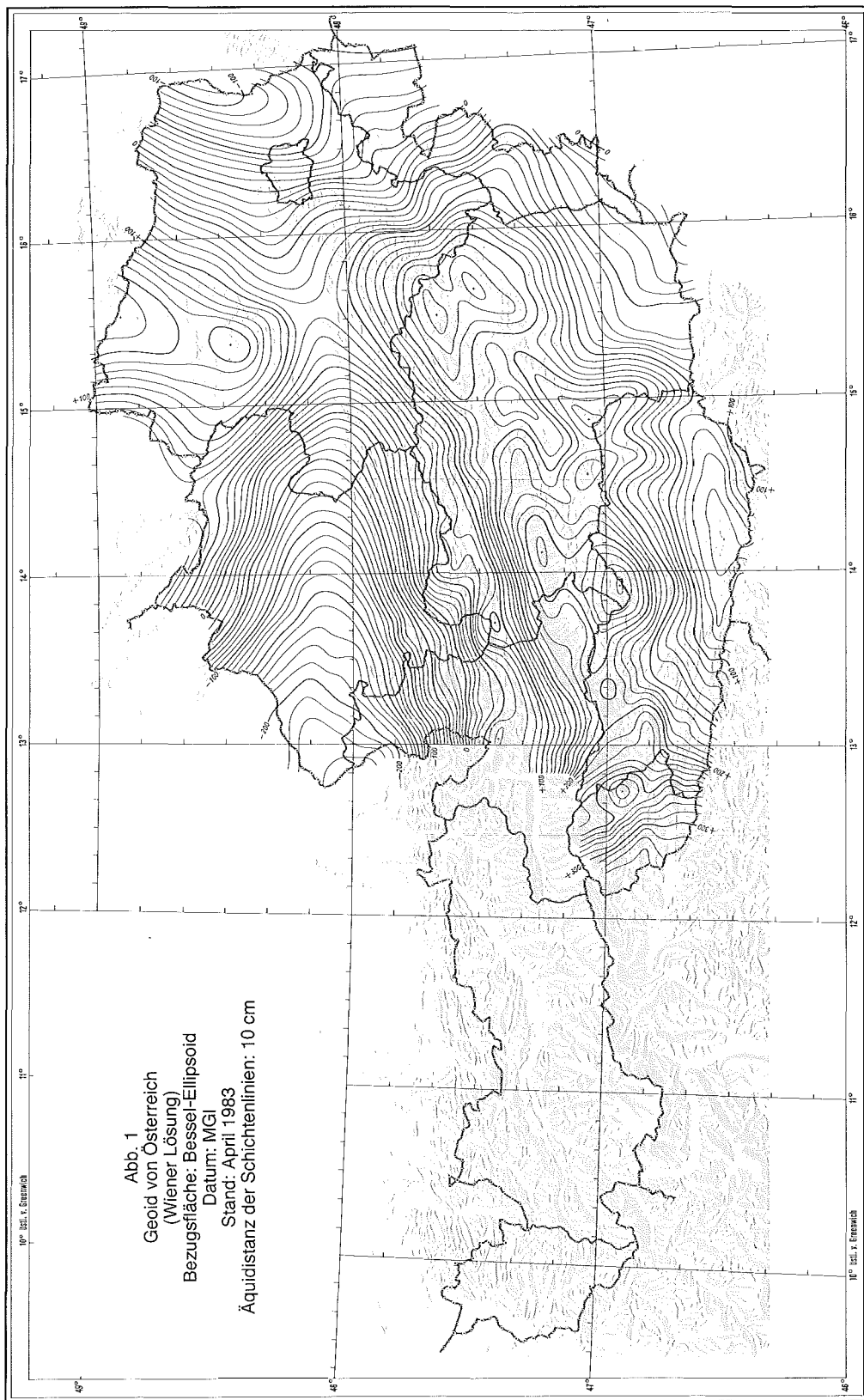


Abb. 1  
Geoid von Österreich  
(Wiener Lösung)  
Bezugsfläche: Bessel-Ellipsoid  
Datum: MGI  
Stand: April 1983  
Äquidistanz der Schichtenlinien: 10 cm

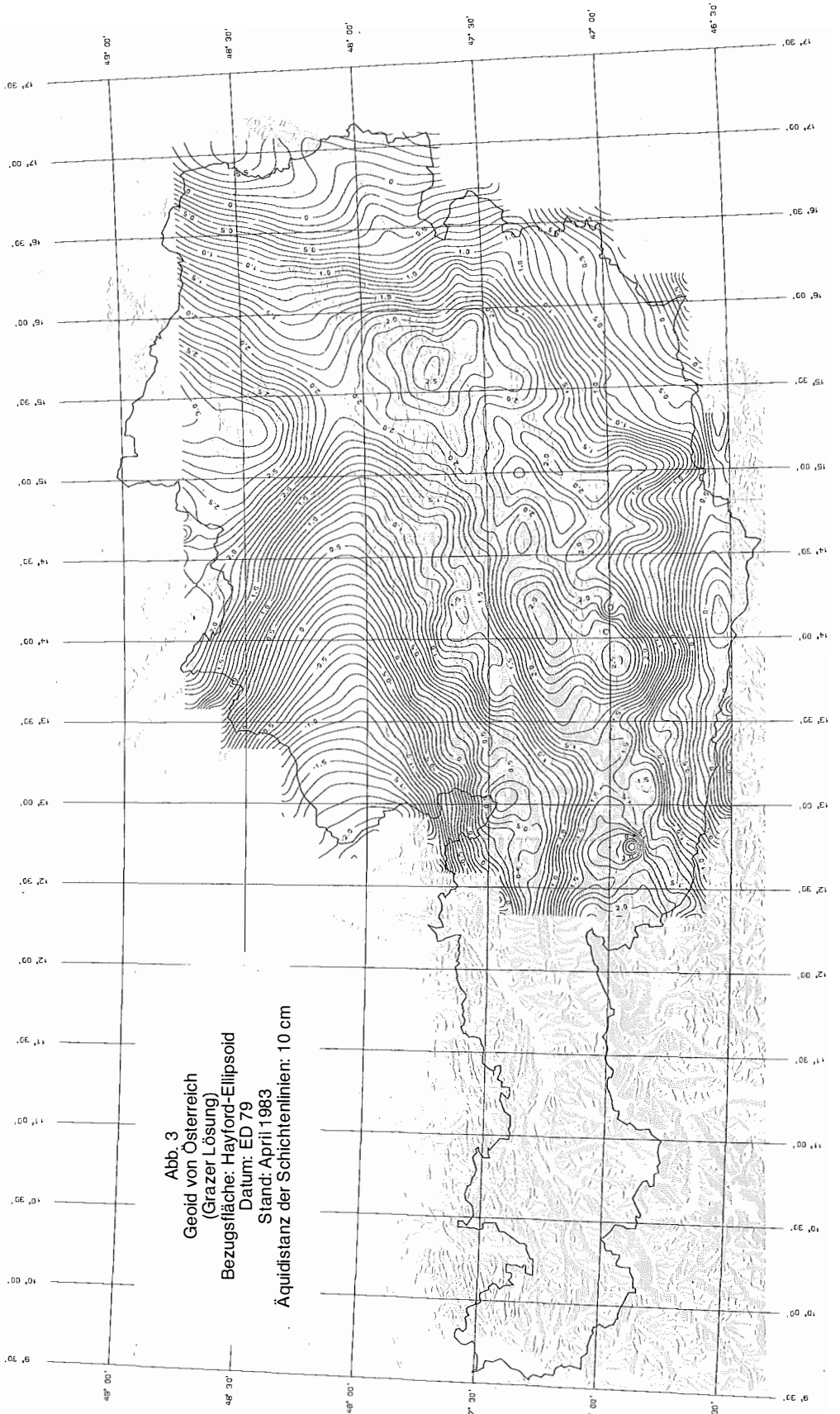


Abb. 3  
Geoid von Österreich  
(Grazer Lösung)  
Bezugsfläche: Hayford-Ellipsoid  
Datum: ED 79  
Stand: April 1983  
Äquidistanz der Schichtenlinien: 10 cm

Die beiden durch einen identen Raster beschriebenen Geoidflächen sollen nun in ihrer Lage so verändert werden, daß die Quadratsumme der Restklaffungen ein Minimum wird. Betrachtet man die Differenzen der Geoidhöhen in jedem Rasterpunkt als den Vektor  $\mathbf{l}$  eines Systems von Verbesserungsgleichungen

$$\mathbf{v}_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i$$

$$\mathbf{v}_i = \sin(\varphi_i - \varphi_0) x + \cos \varphi_i \sin(\lambda_i - \lambda_0) y + \cos(\varphi_i - \varphi_0) z - (N_{W_i} - N_{G_i})$$

$$\text{aus } N_{W_i} + \mathbf{v}_i + \Delta N_i = N_{G_i} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v}_i = -\Delta N_i + (N_{G_i} - N_{W_i}) \quad (12)$$

$N_G$  . . . Grazer Lösung

$N_W$  . . . Wiener Lösung

so ergeben sich für  $\Sigma v v \rightarrow \text{Min.}$  in üblicher Weise die Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{l} = 0 \quad (13)$$

wobei die drei Unbekannten  $x, y$  und  $z$  Funktionen der differentiellen Änderungen im Zentralpunkt sind.

$$x = \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \xi_0 \quad y = \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta \eta_0 \quad z = -\Delta N_0$$

Die Auflösung ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta \xi_0 &= + 0,443'' \pm 0,076'' \\ \Delta \eta_0 &= - 0,154'' \pm 0,058'' \\ \Delta N_0 &= - (146,39 \pm 2,6) \text{ cm} \end{aligned}$$

und daraus die Residuen  $v_i$  für jeden Rasterpunkt.

In Abb. 4 sind diese Differenzen  $v_i = N_G - N_W$  der beiden Geoiden *nach* der Transformation in Minimallage in Form von Isolinien dargestellt.

Unmittelbar daraus abzulesen ist die Überhöhung bzw. stärkere Krümmung der Grazer Lösung in SW-NO-Richtung, vor allem im hochalpinen Anteil des SW.

Ursachen für diese systematischen Effekte könnten in dem in Graz verwendeten digitalen Geländemodell begründet sein. Bei der Berechnung des topographisch-isostatischen Anteiles bedingt die Zerlegung des Geländes in 500 m - Kompartimente im alpinen Bereich eine systematische Massenverschiebung, da die Deckflächen der Kompartimente — in der Natur tatsächlich zum Teil stark geneigt — im Modell wegen der relativ geringen Auflösung weitgehend geglättet werden. Die Berechnung der topographisch-isostatischen Lotabweichungsanteile erfolgt in der Höhe des Aufpunktes; die Berechnung des indirekten Effektes hingegen für das Geoid in der Höhe 0, wo die oben angeführte Generalisierung bei größerer Geländehöhe  $H$  eine wesentlich kleinere Wirkung zeigt. D.h. die Fehler der Regularisierung werden bei der Berechnung des indirekten Effektes nicht vollständig kompensiert.

Durch die durch die Glättung bedingte Bewegung der Massen in der Höhe der Deckfläche näher zum Geoid wird jedoch sicher der indirekte Effekt zu groß berechnet. Die topographisch-isostatische Reduktion wird hingegen zu klein berechnet — die Differenzen können im Extremfall bis zu einigen Bogensekunden ansteigen — sodaß die Residuen einen zu großen Wert behalten. Beide Effekte addieren sich und bewirken eine stärkere Krümmung der Niveauflächen des Ergebnisses.

Natürlich sind in beiden Lösungen auch ausgleichsbedingte und modellbedingte Fehler enthalten, die sich vor allem in den Randbereichen auswirken können. Anfällig ist hier vermutlich eher die Helmert — Lösung, die in ihrer Konzeption einem großen Nivellementnetz entspricht.

Noch nicht geklärt sind die beiden Singularitäten im Bereich Osttirol — Kärnten. Ihre Ursache muß in der statistischen Methode gesucht werden, da ein Datenfehler im topographischen Anteil nicht erkennbar ist, ihre Auswirkung hingegen im Kollokationsanteil voll zur Geltung kommt.

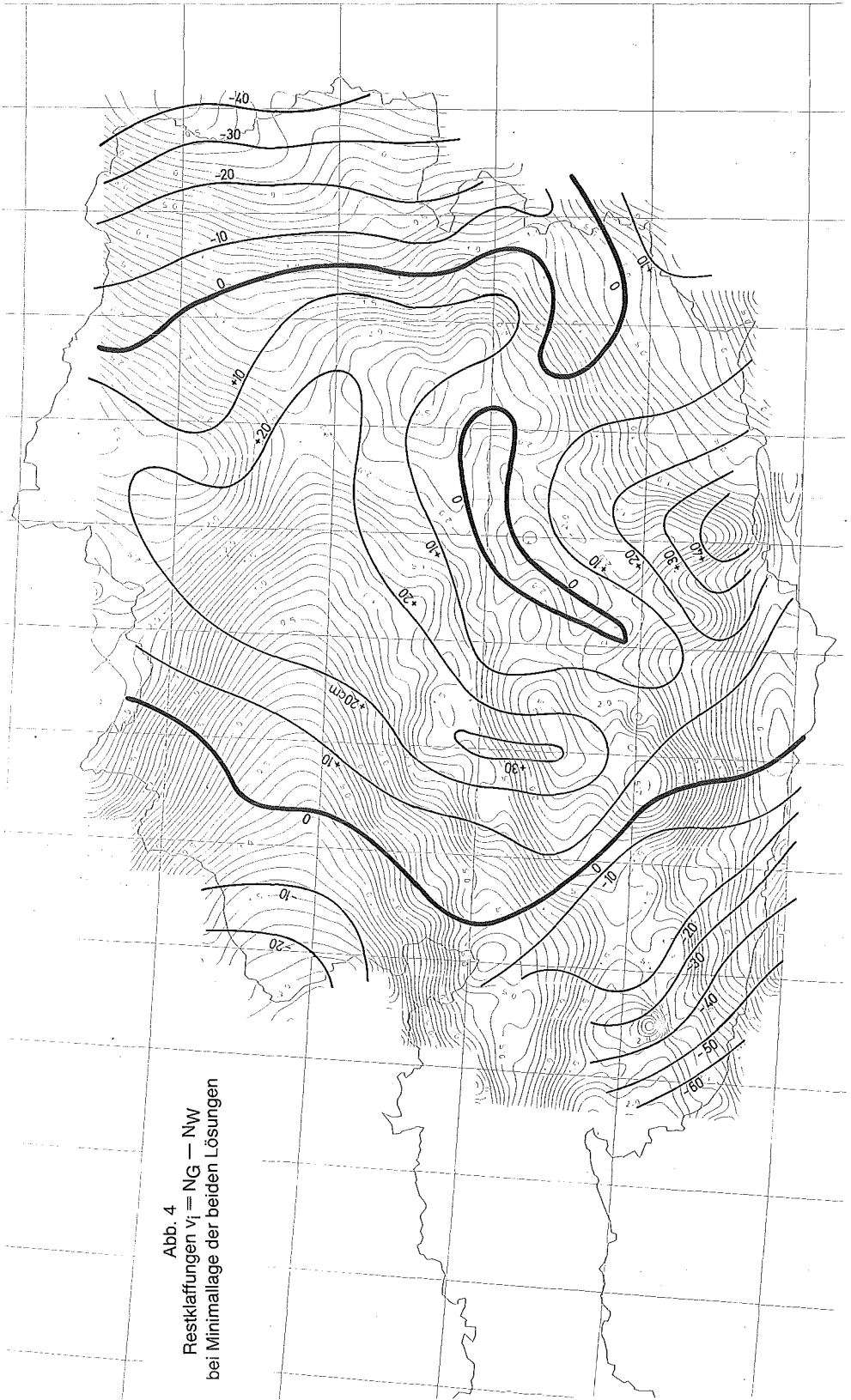


Abb. 4  
Restklassungen  $v_i = NG - Nw$   
bei Minimallage der beiden Lösungen

Eine endgültige Klärung dieser Umstimmigkeiten wird sicher die neuerliche Berechnung bringen, für die bereits ein wesentlich feineres Geländemodell zur Verfügung stehen wird.

Geplant ist weiters die Deckung des restlichen Bundesgebietes mit Messungen — voraussichtlich in den Jahren 1984 und 1985 — sodaß bis 1986 oder spätestens bis zum XIX. Kongreß der IAG im Jahre 1987 eine endgültige Version des österreichischen Geoides vorgelegt werden kann.

Manuskript eingelangt im Feber 1984

### Literatur

*Das Geoid in Österreich*, Geod. Arbeiten Österreichs für die internationale Erdmessung, Neue Folge, Bd. III; Herausg.: Österr. Kommission für die Internat. Erdmessung, Graz, 1983

*Andres, L. (1919)*: Ein astronomisches Nivellement im Meridian von Laibach; Mitt. des MGI, XXXIV. Bd., Wien, 1919.

*Elmiger, A. (1969)*: Studien über die Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz. Mitt. aus dem Inst. f. Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich, Nr. 12, 1969.

*Erker, E., Litschauer, J., Losert, W. (1979)*: Die astronomisch-geodätischen Arbeiten Österreichs für ED 77, Veröffentl. des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen, Wien, 1979.

*Erker, E. (1980)*: Überlegungen zur Geoidbestimmung in Österreich, ÖZfVuPh, 68. Jg., Heft 2, 1980, S. 79 — 89.

*Erker, E. (1983)*: The Influence of Deflections of the Vertical to Geodetic Networks in Mountainous Regions and the Establishment of a Deflection Field in Austria. Presented Paper to the XVII. Congress of the International Federation of Surveyors, Sofia, 1983.

*Galle, A. (1914)*: Das Geoid im Harz, Veröffentl. der Geodätischen Institute Potsdam, Neue Folge, Bd. 61, Berlin, 1914.

*Gerstbach, G. (1983)*: Zur trigonometrischen Höhenmessung in steilem Gelände. ÖZfVuPh, 71. Jg., Heft 3, 1983, S. 122 — 128.

*Gurtner, W. (1978)*: Das Geoid in der Schweiz; Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, 32. Bd., Zürich, 1978, S. 6ff.

*Heiskanen, W.A., Moritz, H. (1967)*: Physical Geodesy; Freeman & Co., San Francisco 1967, Reprint: Inst. f. Physikalische Geodäsie, TU Graz, 1981.

*Helmert, F.R. (1884)*: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, II. Teil. Leipzig 1884.

*Ledersteger, K. (1951)*: Die Näherungsmethoden des astronomischen Nivellements und das Geoid im Nordteil des Meridianbogens Großenhain — Kremsmünster — Pola; Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen, XXXIX. Jg., Nr. 2 — 4, Wien 1951.

*Lelgemann, D., Ehlert, D., Hauck, H. (1981)*: Eine astro-gravimetrische Berechnung des Quasi-geoides für die Bundesrepublik Deutschland; DGK. Reihe A, Heft Nr. 92, 1981.

*Levallois, J.J., Monge, H. (1975)*: Le géoïde Européen, version 1975, Inst. Geogr. Nat. Paris, IAG, 1975.

*Litschauer, J. (1953)*: Zur Frage der Geoidgestalt in Österreich; Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen, XLI. Jg., Nr. 6, Wien, 1953.

*Mader, K. (1954)*: Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern; Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, Sonderheft 15, Wien 1954.

*Moritz, H. (1973)*: Least Squares Collocation; DGK, Reihe A, Heft Nr. 75, 1973.

*Moritz, H. (1980)*: Advanced Physical Geodesy; Verl. Wichmann, Karlsruhe, 1980.

*Rapp, R.H. (1981)*: The Earth's gravity field to degree and order 180 using SEASAT altimeter data, terrestrial gravity data and other data. Report No. 322, Dept. of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

*Sünkel, H. (1980)*: A general surface representation module designed for geodesy; Report No. 292, Dept. of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

*Sünkel, H. (1982)*: Das Geoid im Testnetz Steiermark; Geodaesia Universalis, Mitt. d. geod. Inst. d. TU Graz; Folge 40, 1982, S. 331 — 345.

*Vening — Meinesz, F.A. (1950)*: New Formulas for Systems of Deflections of the Plumb-Line and Laplace's Theorem; Bull. géodésique, 1950, S. 33 — 42.

*Zeger, J. (1978)*: Untersuchungen über die trigonometrische Höhenmessung und die Horizontierung von schräg gemessenen Strecken; ÖZfVuPh, Sonderheft 32, Wien 1978.

*Zeger, J. (1983)*: Testbeispiel Rauris. Der Einfluß von Lotabweichungen und ellipsoidischen Höhen auf die Auswertung eines Triangulierungsoperates; ÖZfVuPh. 71 Jg., Heft 3, 1983, S. 129 — 144.