



## Über die Verteilung der Schwereanomalien in Österreich

Bernhard Hofmann-Wellenhof<sup>1</sup>, M. Wei<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Technische Universität Graz, Abteilung für Physikalische Geodäsie, Steyrergasse 17, A-8010 Graz*

<sup>2</sup> *Wuhan, z.Z. Technische Universität Graz, Abteilung für Physikalische Geodäsie, Steyrergasse 17, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **72** (2), S. 41–53

1984

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Hofmann-Wellenhof_VGI_198404,  
Title = {{\U}ber die Verteilung der Schwereanomalien in {"0}sterreich},  
Author = {Hofmann-Wellenhof, Bernhard and Wei, M.},  
Journal = {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {41--53},  
Number = {2},  
Year = {1984},  
Volume = {72}  
}
```



# Über die Verteilung der Schwereanomalien in Österreich

Von *B. Hofmann-Wellenhof*, Graz, und *M. Wei*, Wuhan (z. Z. Graz)

## Zusammenfassung

Es wird untersucht, welche Verteilung sich für die Schwereanomalien in Österreich ergibt. Theoretisch wird gezeigt, daß aufgrund der linearen Korrelation der Schwereanomalien mit der Höhe das Ergebnis eine Normalverteilung sein muß. Die Theorie wird durch praktische Beispiele anhand der vorliegenden Daten bestätigt.

## Abstract

The goal of this paper is to answer the question for the distribution of the gravity anomalies of Austria. It is shown by theoretical considerations that according to the linear correlation between the gravity anomalies and the heights the result must be a normal distribution. The theory is confirmed by practical examples using the available data.

## 1. Einleitung

Die Menschen tendieren im allgemeinen zur Ordnung und Übersichtlichkeit. Damit haben wir zumindest teilweise die Frage beantwortet, wozu wir etwas über die Verteilung der Schwereanomalien in Österreich wissen wollen. Ein weiteres Argument finden wir in *Moritz* (1980), Seite 297: Wir benötigen die Verteilung der Schwereanomalien, wenn wir statistische Tests durchführen wollen.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit folgenden Fragen. In Österreich steht eine bestimmte Anzahl von Schwereanomalien zusammen mit den entsprechenden geographischen (ellipsoidischen) Koordinaten zur Verfügung, das heißt, wir kennen  $\varphi_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $h_i$ ,  $\Delta g_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, N$ . Es bedeutet  $N$  die Gesamtanzahl der Schwereanomalien in den entsprechenden Punkten.

Wie zu erwarten ist und wie in Abschnitt 2 gezeigt wird, besteht zwischen den Schwereanomalien  $\Delta g_i$  und den Höhen  $h_i$  ein Zusammenhang.

Von den Koordinaten interessieren uns im weiteren  $\varphi_i$ ,  $\lambda_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$  nicht mehr. Wir verwenden nur mehr  $h_i$  und  $\Delta g_i$ . Wenn wir nun annehmen, daß die Höhen  $h_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$  normalverteilt (Gauß-verteilt) sind, dann können wir eine theoretische Aussage über die Verteilung der Schwereanomalien herleiten. Die Ableitung der Formeln zeigen wir in Abschnitt 3. Weiters beantworten wir die Frage, wie sich die Verteilung der Schwereanomalien verhält, wenn wir die gegebenen  $\Delta g_i$  nur in einem bestimmten Höhenintervall  $h_1 \leq h_i \leq h_2$  betrachten. In diesem Fall sprechen wir von einer bedingten Verteilung, weil die Schwereanomalien einer Bedingung, nämlich daß die zu  $\Delta g_i$  gehörende Höhe  $h_i$  im Höhenintervall liegt, unterliegen. Wenn wir diese Bedingung nicht einführen — dies kann man mathematisch formulieren, indem man das Höhenintervall ins Unendliche erstreckt, also  $-\infty \leq h_i \leq +\infty$  —, dann sprechen wir von einer Randverteilung. Beide Fälle, nämlich bedingte Verteilung und Randverteilung, werden im Abschnitt 3 behandelt.

Im Abschnitt 4 werden praktische Beispiele für eine Randverteilung und eine bedingte Verteilung mit dem in Österreich verfügbaren Datenmaterial gebracht. Die Ergebnisse der Verteilungen werden durch Histogramme dargestellt.

Im letzten Abschnitt, Kapitel 5, führen wir einen Test auf Normalverteilung durch. Wir prüfen, ob die Randverteilung und die bedingte Verteilung der Schwereanomalien als Normalverteilungen angesehen werden können.

*Anmerkung:* In den folgenden Abschnitten schreiben wir statt  $e^{[*]}$  stets  $\exp[*]$ .

## 2. Zusammenhang zwischen der Schwereanomalie und der Höhe

Einen Zusammenhang zwischen der Schwereanomalie  $\Delta g$  und der Höhe  $h$  können wir z. B. mit der Formel für die isostatische Anomalie herleiten, die wir in *Moritz* (1980), Seite 312, Formel (38-3), finden:

$$\Delta g_I = \Delta g - 2\pi G \rho (h - h_m) \quad (2-1)$$

In dieser Formel bedeutet  $\Delta g$ , die isostatische Anomalie, das  $\Delta g$  steht für die Schwereanomalie. Weiters bedeuten  $G$  die Gravitationskonstante,  $\rho$  die Dichte der Erde und  $h$  die topographische Höhe eines Punktes. Schließlich bezeichnet  $h_m$  die mittlere Höhe eines Gebietes. Nun bringen wir in Formel (2-1) die Schwereanomalie  $\Delta g$  auf die linke Seite:

$$\Delta g = 2\pi G \rho (h - h_m) + \Delta g_I \quad (2-2)$$

Nehmen wir nun an, wir betrachten ein bestimmtes Gebiet, dann gibt es für dieses Gebiet eine bestimmte mittlere Höhe  $h_m$ , die wir als konstant betrachten können. Wir führen daher in (2-2) die Multiplikation der Klammer aus:

$$\Delta g = -2\pi G \rho h_m + 2\pi G \rho h + \Delta g_I \quad (2-3)$$

Wenn wir nun die vereinfachende Annahme treffen, daß die Dichte  $\rho$  für unser betrachtetes Gebiet konstant sei, dann ist der erste Term von Gleichung (2-3) konstant. Wir führen hierfür

$$a = -2\pi G \rho h_m \quad (2-4)$$

als Bezeichnung ein. Wenn wir formal das  $\Delta g$ , als Signal oder Residuum  $s$  bezeichnen und noch die Abkürzung

$$b = 2\pi G \rho \quad (2-5)$$

eingeführen, dann erhalten wir statt (2-3) die Gleichung

$$\Delta g = a + bh + s \quad (2-6)$$

Diese Formel korrespondiert mit dem Kollokationsmodell mit den Parametern  $a$  und  $b$  von *Sünkel, Kraiger* (1983), Formel (2-4). Wie Formel (2-6) zeigt, setzt sich die Schwereanomalie  $\Delta g$  aus 3 Termen zusammen, nämlich einem konstanten Anteil, einem von der Höhe abhängigen Anteil und einem Residuum.

### 3. Die Verteilung der Schwereanomalie $\Delta g$ bei Normalverteilung der Höhe $h$

Wir gehen von Gleichung (2-6) aus und wollen die statistische Eigenschaft der Schwereanomalie  $\Delta g$  bzw. die Verteilung von  $\Delta g$  herleiten. Dazu betrachten wir die Schwereanomalien und die zugehörigen Höhen in den Beobachtungspunkten als Stichproben. Wir können daher in Gleichung (2-6)  $\Delta g$ ,  $h$  und auch  $s$  als Zufallsvariable ansehen. Wir wollen annehmen, daß die Höhen  $h$  und die Signale (Residuen)  $s$  normalverteilt sind. Dann können wir die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichten für  $h$  und  $s$  z. B. nach *Kreyszig* (1977), Seite 126, Formel (47.1), in der folgenden Form angeben:

$$\begin{aligned}
 f(h) &= \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{h-h_m}{\sigma_h}\right\}^2\right\} \\
 f(s) &= \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{s-s_m}{\sigma_s}\right\}^2\right\}
 \end{aligned}
 \tag{3-1}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 h_m &= E(h) & s_m &= E(s) \\
 \sigma_h^2 &= E\{(h-h_m)^2\} & \sigma_s^2 &= E\{(s-s_m)^2\}
 \end{aligned}$$

In (3-1) bedeutet  $\sigma$  die Varianz,  $h_m$  ist wie früher der Mittelwert der Höhen, und analog dazu ist  $s_m$  der Mittelwert der Residuen. Stetige Verteilungen mit der Wahrscheinlichkeitsdichte in der Form (3-1) nennen wir Gauß-Verteilung oder Normalverteilung. Wenn wir nun annehmen, daß  $h$  und  $s$  voneinander unabhängig sind, dann muß die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(h, s)$  folgende Bedingung erfüllen:

$$f(h, s) = f(h) \cdot f(s)
 \tag{3-2}$$

Vgl. hierzu *Kreyszig* (1977), Seite 148. Setzen wir für  $f(h)$  und  $f(s)$  die Formel (3-1) ein, so bekommen wir:

$$f(h, s) = \frac{1}{2\sigma_h \sigma_s \pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{h-h_m}{\sigma_h}\right\}^2 - \frac{1}{2}\left\{\frac{s-s_m}{\sigma_s}\right\}^2\right\}
 \tag{3-3}$$

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen  $\Delta g$  und  $h$ , dies können wir, ausgehend von (3-3), erreichen, wenn wir eine Transformation von  $f(h, s)$  in  $g(h, \Delta g)$  durchführen. Nun ist aus (2-6) abzulesen, daß  $s$  als Funktion von  $\Delta g$  und  $h$  dargestellt werden kann. Wir haben nun die Aufgabe,  $f(h, s[h, \Delta g])$  in  $g(h, \Delta g)$  zu transformieren. Dies können wir nach *Koch* (1980), Seite 90, mit Hilfe der Jacobi-Determinante  $J$  erreichen:

$$g(h, \Delta g) = J \cdot f(h, s(h, \Delta g))
 \tag{3-4}$$

Wie leicht nachzuprüfen ist, ergibt in unserem Fall die Jacobi-Determinante

$$J = 1
 \tag{3-5}$$

Setzen wir für  $s$  nach Formel (2-6) ein

$$s = \Delta g - a - bh \quad (3-6)$$

und berücksichtigen wir (3-5), so lautet die Formel für die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte für  $h$  und  $\Delta g$ :

$$g(h, \Delta g) = f(h, \Delta g - a - bh) \quad (3-7)$$

Wenden wir jetzt auf Formel (3-7) die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte (3-3) an, so bekommen wir

$$g(h, \Delta g) = \frac{1}{2\sigma_h\sigma_s\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{h-h_m}{\sigma_h}\right\}^2 - \frac{1}{2}\left\{\frac{\Delta g - a - bh - s_m}{\sigma_s}\right\}^2\right\} \quad (3-8)$$

Man kann durch Umformung des Exponenten zeigen, daß die Funktion  $g(h, \Delta g)$  eine zweidimensionale Normalverteilung darstellt. Der Unterschied in formaler Hinsicht zu Formel (3-3) besteht darin, daß in (3-3) die Größen  $h$  und  $s$  voneinander unabhängig sind, in (3-8) hingegen die Größen  $h$  und  $\Delta g$  voneinander abhängig sind. Eine allgemeine Formel für die zweidimensionale Normalverteilung kann z. B. in *Gnedenko* (1978), Seite 133, Formel (4), gefunden werden.

Für die im Abschnitt 4 angeführten Beispiele benötigen wir die bedingte Verteilung und die Randverteilung. Die Definition der bedingten Verteilung entnehmen wir z. B. *Koch* (1980), Seite 89:

$$g(\Delta g/h) = \frac{g(\Delta g, h)}{f(h)} \quad (3-9)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (3-9) können wir die Formeln (3-8) bzw. die erste Formel von (3-1) einsetzen. Durch elementare Rechnung erhalten wir:

$$g(\Delta g/h) = \frac{1}{\sigma_s\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\Delta g - a - bh - s_m}{\sigma_s}\right\}^2\right\} \quad (3-10)$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß diese bedingte Verteilung auch normalverteilt ist. Dies ist offensichtlich der Fall, wenn  $c$ , wobei

$$c = a + bh + s_m \quad (3-11)$$

der Mittelwert von  $\Delta g/h$  ist und  $\sigma_s$  die entsprechende Varianz. Wir zeigen, daß  $c$  der Mittelwert von  $\Delta g/h$  ist. Für den Mittelwert einer bedingten Verteilung finden wir in *Kreyszig* (1977), Seite 315:

$$E\{Y/X=x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y g(y/x) dy \quad (3-12)$$

Übertragen auf unser Beispiel müssen wir  $y$  durch  $\Delta g$  und  $x$  durch  $h$  ersetzen. Also

$$E\{\Delta g/h\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta g g(\Delta g/h) d\Delta g \quad (3-13)$$

Für  $g$  ( $\Delta g/h$ ) setzen wir die Formeln (3-10) und (3-11) ein:

$$E(\Delta g/h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta g \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\Delta g-c}{\sigma_s}\right\}^2\right\} d\Delta g \quad (3-14)$$

Nun führen wir die Substitution

$$y = \frac{\Delta g-c}{\sigma_s} \rightarrow \Delta g = y\sigma_s + c \quad (3-15)$$

$$\text{mit } dy = \frac{1}{\sigma_s} d\Delta g$$

durch und erhalten dadurch

$$E(\Delta g/h) = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy + \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy \quad (3-16)$$

Das erste der beiden Integrale ergibt 0, da der Integrand eine ungerade Funktion ist; siehe hierzu *Gnedenko* (1978), Seite 158. Das zweite Integral, also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy$$

ergibt als Resultat  $\sqrt{2\pi}$ , siehe z. B. *Kreyszig* (1977), Seite 129. Daher erhalten wir tatsächlich

$$E(\Delta g/h) = c \quad (3-17)$$

Damit haben wir gezeigt, daß  $c$  in Gleichung (3-11) der Mittelwert von  $\Delta g/h$  ist.

Nun müssen wir noch zeigen, daß  $\sigma_s$  die Varianz von  $\Delta g/h$  ist, damit sich der Beweis schließt, daß  $g$  ( $\Delta g/h$ ) in Formel (3-10) normalverteilt ist. Dazu schreiben wir nach *Kreyszig* (1977), Seite 88, die Varianz einer Verteilung in allgemeiner Form an:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_m)^2 f(x) dx \quad (3-18)$$

Hierin ist  $x_m$  der entsprechende Mittelwert der Verteilung. Mit dieser Formel berechnen wir die Varianz der bedingten Verteilung  $g$  ( $\Delta g/h$ ):

$$\sigma^2_{\Delta g/h} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta g-c)^2 g(\Delta g/h) d\Delta g \quad (3-19)$$

Mit (3-10) bekommen wir

$$\sigma^2_{\Delta g/h} = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta g-c)^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\Delta g-c}{\sigma_s}\right\}^2\right\} d\Delta g \quad (3-20)$$

Diese Formel entspricht genau der ersten Formel auf Seite 164 in *Gnedenko* (1978). Wie *Gnedenko* zeigt, ist die Lösung der rechten Seite von Gleichung (3-20) gerade  $\sigma_s^2$ . Damit bekommen wir

$$\sigma_{\Delta g/h}^2 = \sigma_s^2 \quad (3-21)$$

Nun haben wir bewiesen, daß die bedingte Verteilung  $g(\Delta g/h)$  in Formel (3-10) normalverteilt ist.

Die Randverteilung. Eine Definition für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Randverteilung bezüglich der zweidimensionalen Verteilung  $g(\Delta g, h)$  finden wir z. B. in *Kreyszig* (1977), Seite 147:

$$g(\Delta g) = \int_{h=-\infty}^{h=+\infty} g(\Delta g, h) dh \quad (3-22)$$

In der folgenden Herleitung wollen wir zeigen, daß diese Randverteilung  $g(\Delta g)$  eine Normalverteilung darstellt. Dazu setzen wir Gleichung (3-8) in die Definition (3-22) ein:

$$g(\Delta g) = \frac{1}{2\sigma_h\sigma_s\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{h-h_m}{\sigma_h}\right\}^2 - \frac{1}{2}\left\{\frac{\Delta g-a-bh-s_m}{\sigma_s}\right\}^2\right\} dh \quad (3-23)$$

Nun folgt eine Reihe von langwierigen, aber stets elementaren Umformungen, die wir hier nicht im Detail anführen. Es sei nur darauf verwiesen, daß der Endzweck der Umformungen des Integrals eine Form

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy$$

ist. Dieses Integral liefert, wie bereits früher gezeigt wurde (vgl. auch *Kreyszig* [1977], Seite 129), den Wert  $\sqrt{2\pi}$ . Unser Resultat für die Formel (3-23) lautet:

$$g(\Delta g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_h^2 b^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(\Delta g - a - bh_m - s_m)^2}{\sigma_s^2 + \sigma_h^2 b^2}\right\} \quad (3-24)$$

Jetzt bringen wir noch den sehr einfachen Beweis, daß  $g(\Delta g)$  in Gleichung (3-24) eine Normalverteilung darstellt. Dazu müssen wir nur zeigen, daß

$$\sigma_{\Delta g} = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_h^2 b^2} \quad (3-25)$$

und weiters

$$\Delta g_m = a + bh_m + s_m \quad (3-26)$$

gilt. Ausgehend von Gleichung (2-6) bilden wir den Mittelwert von  $\Delta g$ . Wir erhalten

$$\Delta g_m = E\{\Delta g\} = a + bE\{h\} + E\{s\} \quad (3-27)$$

Dies können wir auch in der gesuchten Form (3-26) schreiben, also

$$\Delta g_m = a + bh_m + s_m$$

Die Varianz  $\sigma_{\Delta g}$  schließlich berechnen wir ebenfalls mit Gleichung (2-6). Wir erhalten wegen der Unabhängigkeit von h und s sofort das gesuchte Resultat

$$\sigma_{\Delta g}^2 = b^2 \sigma_h^2 + \sigma_s^2$$

Deshalb können wir die Randverteilung g ( $\Delta g$ ) in folgender Form angeben:

$$g(\Delta g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\Delta g}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(\Delta g - \Delta g_m)^2}{\sigma_{\Delta g}^2}\right\} \quad (3-28)$$

Damit haben wir gezeigt, daß die Randverteilung g ( $\Delta g$ ) eine Normalverteilung ist.

Diese Ergebnisse für die bedingte Verteilung und die Randverteilung waren zu erwarten, da lineare Funktionen von normalverteilten Größen auch wieder normalverteilt sind.

#### 4. Bedingte Verteilung und Randverteilung am Beispiel der Schweranomalien in Österreich

Theoretisch müssen, wie wir in Abschnitt 3 gezeigt haben, die bedingte Verteilung und die Randverteilung unter gewissen Voraussetzungen normalverteilt sein. Wir wollen in diesem Abschnitt prüfen, wie weit die Theorie mit der Praxis übereinstimmt. Wir verwenden alle zugänglichen Schweranomalien Österreichs, vgl. Abb. 1.

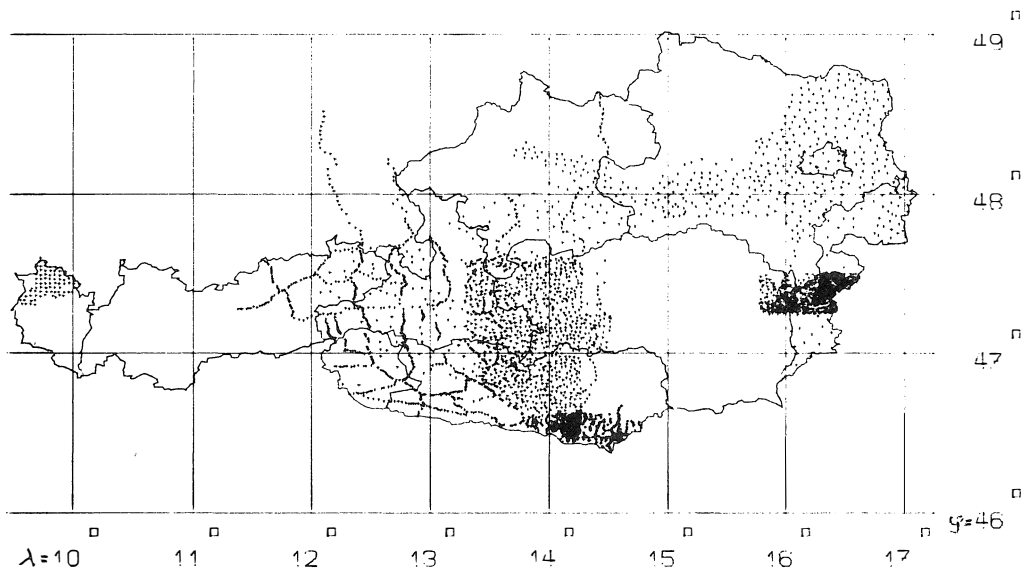


Abb. 1. Verfügbare Schweranomalien in Österreich

Nun stellen wir uns die Aufgabe, mit diesen in Abbildung 1 dargestellten Schweranomalien Histogramme zu erstellen. Und zwar wollen wir mit dem Histogramm graphisch die absolute Häufigkeit der Schweranomalien in einem bestimmten Intervall darstellen, vgl. hierzu *Kreyszig* (1977), Seite 29, und *Moritz* (1980), Seite 298.



Als erstes Beispiel bringen wir eine Randverteilung. Entsprechend dem Ergebnis (3-28) ist die Randverteilung von der Höhe  $h$  unabhängig, d. h., wir betrachten die Schwereanomalien in sämtlichen Punkten, wobei die Höhe theoretisch  $-\infty \leq h \leq +\infty$  sein darf. Die Schwereanomalien staffeln wir nach Intervallen, sodaß jede Schwereanomalie  $\Delta g$  einer Bedingung

$$\Delta g_i \leq \Delta g \leq \Delta g_{i+1} \quad (4-1)$$

genügt, wobei  $\Delta g_i$  und  $\Delta g_{i+1}$  die Intervallgrenzen für ein bestimmtes Intervall sind. Die Differenz  $\Delta g_{i+1} - \Delta g_i$  ergibt die Intervallbreite, in unserem Fall haben wir als Intervallbreite 15 mgal gewählt.

Für die Wahrscheinlichkeit einer Schwereanomalie in einem Schwereintervall können wir schreiben:

$$P(\Delta g_i \leq \Delta g \leq \Delta g_{i+1}) = \int_{\Delta g_i}^{\Delta g_{i+1}} g(\Delta g) d\Delta g \quad (4-2)$$

Die Häufigkeit in einem Intervall können wir mit

$$f_i(\Delta g) = \frac{n_i(\Delta g)}{N} \quad (4-3)$$

angeben, wobei  $n_i(\Delta g)$  die Anzahl der Schwereanomalien im Intervall  $\Delta g_i$  bis  $\Delta g_{i+1}$  ist und mit  $N$  die Gesamtanzahl aller Schwereanomalien bezeichnet wird. Tragen wir für die gesamtösterreichischen Schweredaten die Schwereintervalle mit der zugehörigen Anzahl der Schwereanomalien als Histogramm auf, so erhalten wir Abbildung 2.

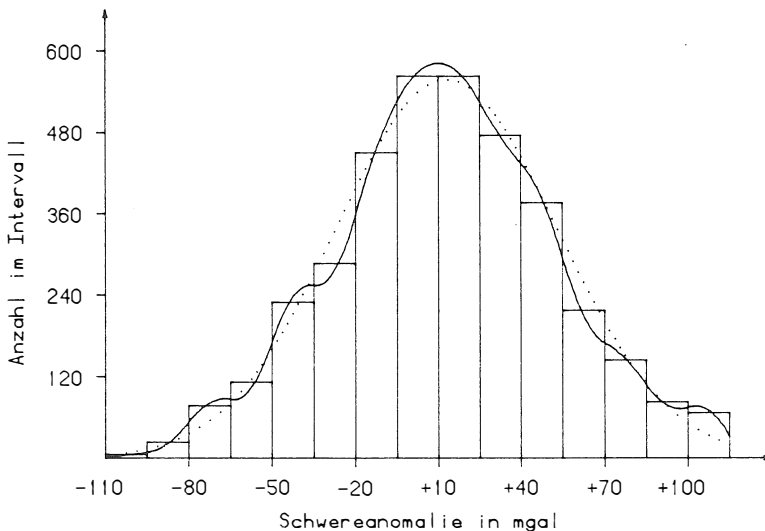


Abb. 2. Schwereanomalien-Histogramm Österreichs unter Zugrundelegung einer Randverteilung  $-\infty \leq h \leq +\infty$ , das heißt, alle 3638 Daten wurden verwendet.

In der Abbildung haben wir die Treppenfunktion des Histogramms durch eine stetige Funktion angenähert (geglättet). In unserem Fall haben wir mit einer Spline-Funktion geglättet, und zwar in einer Art, daß das Integral über die Spline-Funktion in einem Intervall gleich der Fläche der entsprechenden Treppensäule ist, vgl. z. B. *De Boor* (1978), Kapitel 8, und *Späth* (1978). Das Ergebnis der Glättung ist in Abbildung 2 durch die ausgezogene Linie gezeigt. Wir

vergleichen dieses Ergebnis mit dem theoretischen Ergebnis der Normalverteilung, das wir in (3-28) erhalten haben:

$$g(\Delta g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\Delta g}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\Delta g - \Delta g_m}{\sigma_{\Delta g}}\right\}^2\right\} \quad (4-4)$$

Für die N = 3638 in Österreich derzeit verfügbaren Schwereanomalien erhalten wir als Mittelwert und für die Varianz

$$\begin{aligned} \Delta g_m &= 14.515 \text{ mgal} \\ \sigma_{\Delta g} &= \pm 42.36 \text{ mgal} \end{aligned} \quad (4-5)$$

Durch Variation von  $\Delta g$  im Bereich von  $-110$  mgal bis  $+115$  mgal können wir aus (4-4) die Normalverteilung punktweise berechnen. Das Ergebnis ist in Abbildung 2 durch die punktierte Linie dargestellt. Wie man aus Abbildung 2 erkennen kann, stimmt die theoretisch berechnete Normalverteilung mit dem geglätteten Histogramm recht gut überein. Im Abschnitt 5 wird geprüft, ob die Abweichungen ein bestimmtes, vorgegebenes Genauigkeitsmaß (Testkriterium) nicht überschreiten.

Jetzt kommen wir zu einem Beispiel der bedingten Verteilung. Die Wahrscheinlichkeit einer bedingten Verteilung in Abhängigkeit von  $\Delta g$  und  $h$  können wir nach *Papoulis* (1965), Seite 175, folgendermaßen angeben:

$$P\{\Delta g/h\} = \frac{P\{\Delta g_i \leq \Delta g \leq \Delta g_{i+1}; h_j \leq h \leq h_{j+1}\}}{P\{h_j \leq h \leq h_{j+1}\}} \quad (4-6)$$

Die Häufigkeit  $f_{ij}$ , die zur Wahrscheinlichkeit

$$P\{\Delta g_i \leq \Delta g \leq \Delta g_{i+1}; h_j \leq h \leq h_{j+1}\}$$

gehört, bekommen wir mit

$$f_{ij}(\Delta g, h) = \frac{n_{ij}(\Delta g, h)}{N} \quad (4-7)$$

wobei  $N$  wiederum die Gesamtanzahl aller Schwereanomalien ist und  $n_{ij}(\Delta g, h)$  die Anzahl der Schwereanomalien in einem Schwereintervall  $\Delta g_i$  bis  $\Delta g_{i+1}$  und einem Höhenintervall  $h_j$  bis  $h_{j+1}$ . Analog erhalten wir die relative Häufigkeit  $f_j$  für die Höhe  $h$  in einem Höhenintervall:

$$f_j(h) = \frac{n_j(h)}{N} \quad (4-8)$$

Hierbei steht  $n_j(h)$  für die Anzahl der Punkthöhen in einem Höhenintervall. Die Häufigkeit, die zur Wahrscheinlichkeit einer bedingten Verteilung gehört, erhalten wir aus dem Quotienten von (4-7) und (4-8):

$$f_{ij}(\Delta g/h) = \frac{f_{ij}(\Delta g, h)}{f_j(h)} \quad (4-9)$$

Also bekommen wir

$$f_{ij}(\Delta g/h) = \frac{n_{ij}(\Delta g, h)}{n_j(h)} \quad (4-10)$$

Wir wählen nun als Bedingung für die Höhe

$$620 \text{ m} \leq h \leq 1010 \text{ m} \quad (4-11)$$

Die Intervalle für die Schwereanomalien wurden wie in Abbildung 2 gewählt. Das graphische Ergebnis zeigt Abbildung 3.

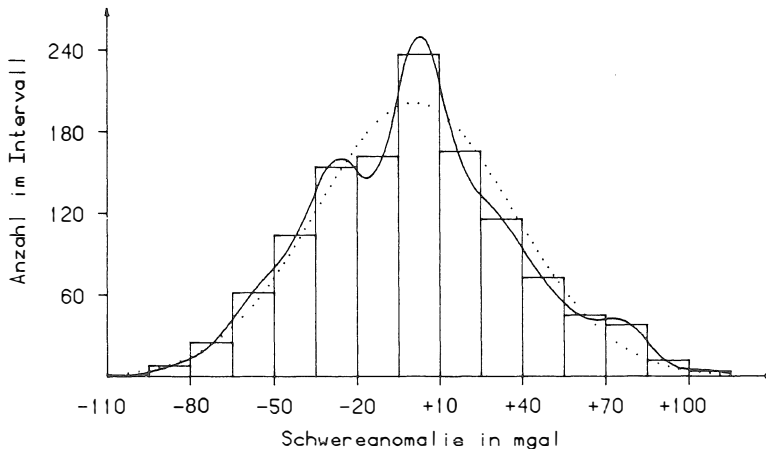


Abb. 3. Schwereanomalien-Histogramm Österreichs unter Zugrundelegung der bedingten Verteilung  $620 \text{ m} \leq h \leq 1010 \text{ m}$ , d. h., es wurden 1207 Schwereanomalien verwendet.

Wie in Abbildung 2 repräsentiert auch jetzt die ausgezogene Kurve die Glättung des Histogramms, und die gepunktete Linie entspricht der bedingten Normalverteilung mit dem Mittelwert

$$\bar{\Delta g}_m = 1.044 \text{ mgal} \quad (4-12)$$

und der Varianz

$$\bar{\sigma}_{\Delta g} = \pm 36.52 \text{ mgal} \quad (4-13)$$

Der Vergleich der beiden Kurven zeigt die gute Annäherung der Spline-Funktion an die aus der Theorie ermittelten Normalverteilung.

## 5. Test auf Normalverteilung

In diesem Abschnitt wollen wir prüfen, ob die in Kapitel 4 in den Abbildungen 2 und 3 dargestellten Histogramme in der geglätteten Form als normalverteilt angesehen werden können, wobei wir die Entscheidung durch ein mathematisches Prüfkriterium fällen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Stichprobenwert  $\Delta g$  einer Verteilungsdichte  $g(\Delta g)$  in einem bestimmten Intervall  $[\Delta g_i, \Delta g_{i+1}]$  liegt, lautet

$$P_i = P(\Delta g_i \leq \Delta g \leq \Delta g_{i+1}) = \int_{\Delta g_i}^{\Delta g_{i+1}} g(\Delta g) d\Delta g \tag{5-1}$$

Im Abschnitt 3 haben wir gezeigt, daß  $g(\Delta g)$  normalverteilt ist, daher können wir Gleichung (5-1) auch in folgender Weise schreiben:

$$P_i = \frac{1}{\sigma_{\Delta g} \sqrt{2\pi}} \int_{\Delta g_i}^{\Delta g_{i+1}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(\Delta g - \Delta g_m)^2}{\sigma_{\Delta g}^2}\right\} d\Delta g \tag{5-2}$$

Wenn ein beliebiger Stichprobenwert  $\Delta g$  in ein bestimmtes Intervall  $[\Delta g_i, \Delta g_{i+1}]$  fällt, sprechen wir von einem Ereignis  $A_i$ . Das Ereignis  $A_i$  bezeichnet also einen Erfolg. Fällt der Stichprobenwert nicht in dieses Intervall  $[\Delta g_i, \Delta g_{i+1}]$ , so liegt ein Mißerfolg vor, und wir bezeichnen dieses Ereignis mit  $\bar{A}_i$ . Wie Formel (5-2) zeigt, bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis  $A_i$  eintritt, mit  $P_i$  und entsprechend die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis  $\bar{A}_i$  mit  $1 - P_i$ . Weiters bezeichnen wir mit  $n_i$  die Anzahl der Erfolge  $A_i$  im Intervall  $[\Delta g_i, \Delta g_{i+1}]$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Gesamtanzahl von  $N$  Stichproben  $n_i$  in das Intervall  $[\Delta g_i, \Delta g_{i+1}]$  fallen, genügt einer *Bernoulli*- oder Binomialverteilung mit dem Mittelwert

$$E\{n_i\} = N \cdot P_i \tag{5-3}$$

und der Varianz

$$\sigma^2\{n_i\} = N \cdot P_i \cdot (1 - P_i) \tag{5-4}$$

Vgl. hierzu *Koch* (1980), Seite 83, und *Kreyszig* (1977), Seite 109. Es kann nun gezeigt werden, daß für große  $N$  die Bernoulli-Verteilung durch eine Normalverteilung mit dem Mittelwert (5-3) und der Varianz (5-4) angenähert werden kann. Dies besagt das Theorem von *de Moivre* und *Laplace*, vgl. *Kreyszig* (1977), Seite 133 ff., und *Papoulis* (1965), Seite 66.

Unter der Hypothese, daß die Schwereanomalien normalverteilt sind und wir die Wahrscheinlichkeit  $P_i$ , die wir für die Formeln (5-3) und (5-4) benötigen, nach Formel (5-2) berechnen, läßt sich der Test für die Verteilungsfunktion auf das Problem zurückführen, ein Konfidenzintervall für die  $n_i$  zu bestimmen. Dazu wählen wir zunächst eine Signifikanzzahl  $\alpha$ , die ein Maß für die Wahrscheinlichkeit des zu bestimmenden Konfidenzintervalls für die  $n_i$  darstellt. Wir bilden nun nach *Kreyszig* (1977), Seite 199, die Zufallsvariable

$$Z_i = \frac{n_i - NP_i}{\sqrt{NP_i(1 - P_i)}} \tag{5-5}$$

die annähernd normalverteilt  $N(0,1)$  ist. Wir definieren die Grenzen der Konfidenzintervalle mit

$$-c_i \leq Z_i \leq c_i \tag{5-6}$$

Durch eine vorgegebene Signifikanzzahl  $\alpha$  können wir aus

$$P^*\{-c \leq Z_i \leq c\} = 1 - \alpha \tag{5-7}$$

die Intervallgrenzen  $c$  bestimmen, vgl. z. B. Tafel 3b in *Kreyszig* (1977), Seite 425. Nun sind die  $c$  bekannt, und wir setzen Gleichung (5-5) in die Gleichung (5-7) ein:

$$P^*\left\{-c \leq \frac{n_i - NP_i}{\sqrt{NP_i(1 - P_i)}} \leq c\right\} = 1 - \alpha \tag{5-8}$$

Daraus ergibt sich das Konfidenzintervall für die Variable  $n_i$  in folgender Form:

$$NP_i - c_i \sqrt{NP_i(1-P_i)} \leq n_i \leq NP_i + c_i \sqrt{NP_i(1-P_i)} \quad (5-9)$$

Offensichtlich erfüllen die durch die N Stichproben erhaltenen  $n_i$  die Formel (5-9), wenn die Schwereanomalien normalverteilt sind, oder, anders ausgedrückt, wenn die Hypothese richtig war.

Wir testen nun mit 99,5% Konfidenzintervallen ( $\alpha = 0,005$ ), ob die  $n_i$ , die unseren Abbildungen 2 und 3 zugrundeliegen, Formel (5-9) erfüllen. Für  $\alpha = 0,005$  erhalten wir  $c = 2,81$ . Jetzt behandeln wir das in Abbildung 2 dargestellte Ergebnis. Dazu müssen wir nun für jedes Schwereanomalienintervall  $[\Delta g_i, \Delta g_{i+1}]$ , also für jede der abgebildeten Säulen, mit Formel (5-2) die Wahrscheinlichkeit  $P_i$  berechnen. Die Gesamtanzahl aller Stichproben ist mit  $N = 3638$  vorgegeben. Schließlich sind noch die  $n_i$ , das sind die Anzahlen der Stichproben in den Schwereanomalienintervallen  $[\Delta g_i, \Delta g_{i+1}]$ , zu bestimmen. Dann kann überprüft werden, ob die  $n_i$  Gleichung (5-9) erfüllen. Für die 14 Intervalle (Säulen) der Abbildung 2 erhalten wir die Testtabelle 1, wobei in Abbildung 2 die Säule ganz links der ersten Zeile entspricht, etc.

Intervall [ $\Delta g_i, \Delta g_{i+1}$ ]	$P_i$	Formel (5-9)	Test positiv?
[-110, -95]	0.0024	1 ≤ 5 ≤ 17	ja
[-95, -80]	0.0066	11 ≤ 25 ≤ 38	ja
[-80, -65]	0.0156	37 ≤ 78 ≤ 79	ja
[-65, -50]	0.0320	89 ≤ 113 ≤ 150	ja
[-50, -35]	0.0574	174 ≤ 229 ≤ 254	ja
[-35, -20]	0.0896	285 ≤ 286 ≤ 384	ja
[-20, -5]	0.1217	398 ≤ 450 ≤ 510	ja
[-5, +10]	0.1438	476 ≤ 563 ≤ 597	ja
[+10, +25]	0.1478	491 ≤ 563 ≤ 613	ja
[+25, +40]	0.1323	436 ≤ 476 ≤ 552	ja
[+40, +55]	0.1030	332 ≤ 376 ≤ 437	ja
[+55, +70]	0.0698	217 ≤ 217 ≤ 304	ja
[+70, +85]	0.0411	120 ≤ 144 ≤ 188	ja
[+85, 100]	0.0211	54 ≤ 83 ≤ 104	ja

Tabelle 1. Test der Schwereanomalien auf Normalverteilung

Wie wir aus Tabelle 1 ersehen können, ist für jedes Schwereanomalienintervall der Test erfüllt. Das heißt, wir können unter Zugrundelegung des beschriebenen Prüfkriteriums sagen, die Schwereanomalien von Österreich sind normalverteilt. Wie wir aber aus dem Ergebnis von Tabelle 1 sehen, fällt für zwei Intervalle, nämlich  $[-35, -20]$  und  $[+55, +70]$  das Testergebnis gerade noch positiv aus. Wenn wir aber statt des 99,5 % Konfidenzintervalls nur 99,0% verwenden, dann erfüllen diese beiden Schwereanomalienintervalle den Test nicht mehr positiv.

Eine gewisse Willkür bieten auch noch die Variation der Intervallbreite der Säulen und die Intervallverschiebung. Dies wollen wir an einem Beispiel zeigen. Wenn wir für die bedingte Verteilung in Abbildung 3 den Test auf Normalverteilung durchführen, so fällt bei einem 99,5% Konfidenzintervall das Ergebnis für die Säule  $[+70, +85]$  negativ aus. Bei einem 99,0% Konfidenzintervall kommt auch noch die Säule  $[-5, +10]$  hinzu. Wenn wir nun aber die Intervallbreite von 15 mgal auf 20 mgal erhöhen, bekommen wir das in Abbildung 4 gezeigte Ergebnis für die bedingte Verteilung.

Führen wir für das Ergebnis von Abbildung 4 den Test auf Normalverteilung durch, so liefert jede Säule ein positives Ergebnis sowohl für ein 99,0% als auch für ein 99,5% Konfidenzintervall.

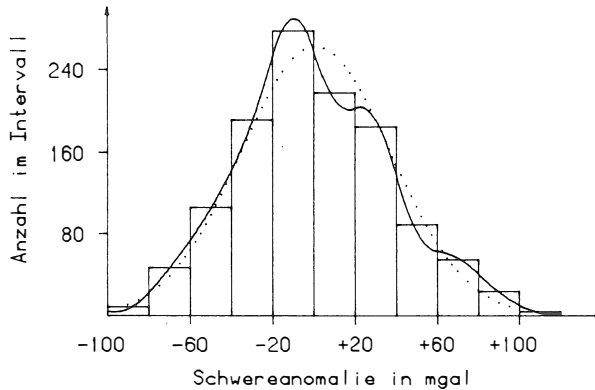


Abb. 4. Schwereanomalien-Histogramm Österreichs, wie in Abb. 3, jedoch mit größerer Intervallbreite

Wir können also abschließend sagen, daß sowohl die Randverteilung als auch die betrachtete bedingte Verteilung für die Schwereanomalien von Österreich nahezu normalverteilt sind, was die Theorie von Kapitel 3 bestätigt. Damit ist auch die Annahme der Normalverteilung für die Höhen indirekt gerechtfertigt.

#### Literatur

- Boor, C. de* (1978): A practical guide to splines. Applied Mathematical Sciences 27. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- Gnedenko, B. W.* (1978): Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Verlag H. Deutsch, Thun, Frankfurt am Main. XV + 399 Seiten.
- Koch, K. R.* (1980): Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. Dümmler Verlag, Bonn. XII + 296 Seiten.
- Kreyszig, E.* (1977): Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen. 452 Seiten.
- Moritz, H.* (1980): Advanced physical geodesy. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe. XIII + 500 Seiten.
- Papoulis, A.* (1965): Probability, random variables, and stochastic processes. McGraw-Hill Book Company, New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney. XI + 583 Seiten.
- Späth, H.* (1978): Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien. 134 Seiten.
- Sünkel, H.; Kraiger G.* (1983): The prediction of free-air anomalies. Manuscripta geodaetica, Vol. 8, Seiten 229–248.

Manuskript eingelangt im Mai 1984.