

Paper-ID: VGI_198408



Numerische Auswertung zweier nicht orientierter photogrammetrischer Bilder eines ebenen Vierecks

Karl Killian ¹

¹ *Hadikgasse 40, 1140 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **72** (3), S.
95–100

1984

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_198408,  
  Title = {Numerische Auswertung zweier nicht orientierter photogrammetrischer  
    Bilder eines ebenen Vierecks},  
  Author = {Killian, Karl},  
  Journal = {{\u0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {95--100},  
  Number = {3},  
  Year = {1984},  
  Volume = {72}  
}
```



Numerische Auswertung zweier nicht orientierter photogrammetrischer Bilder eines ebenen Vierecks

Von K. Killian, Wien

Sind in zwei photogrammetrischen Bildern die Eckpunkte eines ebenen, im übrigen unbekanntes Vierecks identifizierbar und ist ferner die innere Orientierung beider Bilder bekannt, so kann man zunächst daran denken, die gegenseitige Orientierung der beiden Bilder zu bestimmen. Vorausgesetzt wird ein echtes Viereck, d. h. drei der das Viereck bildende Punkte dürfen nicht in einer Geraden liegen. Bekanntlich bleibt diese Aufgabe unverändert, wenn nicht vier sondern beliebig viele einander entsprechende Bildpunkte in beiden Bildern herangezogen werden, vorausgesetzt, daß die Bildpunkte von Objektpunkten stammen, die in der Vierecksebene liegen.

Diese Bestimmung der gegenseitigen Orientierung ist ein klassisches Problem der projektiven Geometrie: Gegeben sind zwei kollineare Strahlenbündel, man bringe sie in perspektive Lage. Bemerkenswert sei, daß ein anderes Orientierungsproblem entstehen würde, wenn außerhalb der Vierecksebene mindestens zwei von dieser weit entfernte Objektpunkte vorhanden wären. Dies wird jedoch nicht vorausgesetzt. Die theoretischen Grundlagen dazu findet man schon bei J. Steiner (11) und H. Schröter (10). S. Finsterwalder (1) (2), H. v. Sanden (8) und E. Kruppa (6) haben auf die Bedeutung des Problems für die Photogrammetrie hingewiesen. Jedoch die damaligen Rechenhilfsmittel waren für eine praktische Lösung des Problems nicht ausreichend. Th. Schmid (9) veröffentlichte eine weitgehende Kenntnis der projektiven Geometrie voraussetzende, theoretisch bedeutungsvolle graphische Lösung, die für die Praxis jedoch ungeeignet ist. F. Weidemann (12) behandelte ein vorwiegend graphisches, im Prinzip ähnliches Verfahren. G. Labussiere (7) und B. Hofmann-Wellenhof (3) sowie W. Wunderlich (13) haben numerische Lösungen veröffentlicht. Die letztgenannte schöne Arbeit ist computerfreundlich und praktisch gut verwendbar. Es wird ein ebenes Objekt numerisch rekonstruiert.

Nur um zu zeigen, daß unsere Aufgabe — zum Unterschied von allen bekannten Lösungsgedanken — auf einem neuen und außerdem ganz elementaren Weg behandelt werden kann, wird darüber nochmals geschrieben. Die Gestalt des genannten Vierecks wird berechnet ohne die gegenseitige Orientierung der Bilder zu bestimmen.

Es liegt in der Natur des Problems, daß alle genannten Arbeiten sowie meine Arbeit auf eine Gleichung 3. Grades führen. Ferner wird die numerische Auswertung von Punkten, die in der Ebene des Vierecks liegen und von Punkten, die außerhalb dieser Ebene liegen, beschrieben. Die gefährlichen Orte und das überbestimmte Problem werden behandelt.

In Fig. 1 ist 1, 2, 3, 4 das unbekanntes ebene Viereck. O und \bar{O} sind die Projektionszentren des ersten und zweiten Bildes. $1', 2', 3', 4'$ sowie $\bar{1}', \bar{2}', \bar{3}', \bar{4}'$ sind die Bilder des Vierecks. Analoge Bezeichnungen sind für alle eingezeichneten Strecken und Winkel ersichtlich. Aus den Bildkoordinaten und der Kammerkonstanten des ersten Bildes können die Größen $r', \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \phi', \psi'$ berechnet werden. Dasselbe gilt für die analogen Größen des zweiten Bildes. Gesucht sind $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \phi, \psi, r, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \bar{r}$. Das sind 11 Unbekannte. Da unser Orientierungsproblem immer eine Ähnlichkeitstransformation erlaubt, wird $r = 1$ gesetzt. Somit bleiben noch 10 Unbekannte.

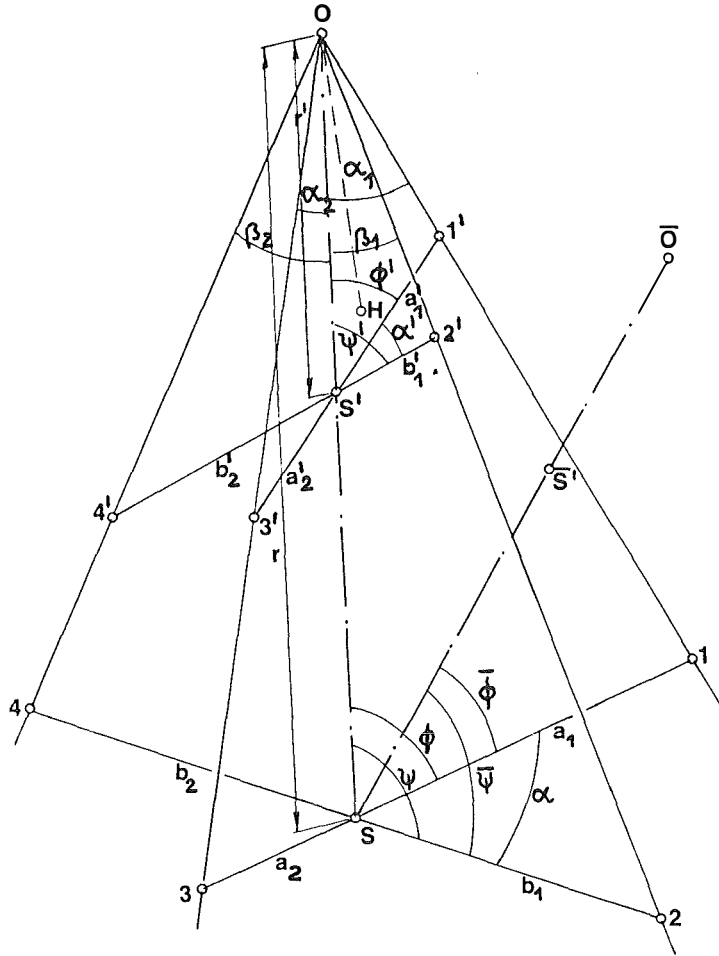


Fig. 1

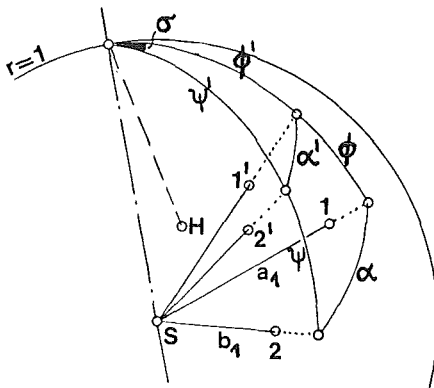


Fig. 2

Acht Gleichungen gibt der Sinus-Satz:

$$\begin{aligned} r \sin \alpha_1 &= a_1 \sin(\phi + \alpha_1) \dots 1) & \bar{r} \sin \bar{\alpha}_1 &= a_1 \sin(\bar{\phi} + \bar{\alpha}_1) \dots \bar{1}) \\ r \sin \alpha_2 &= a_2 \sin(\phi - \alpha_2) \dots 2) & \bar{r} \sin \bar{\alpha}_2 &= a_2 \sin(\bar{\phi} - \bar{\alpha}_2) \dots \bar{2}) \\ r \sin \beta_1 &= b_1 \sin(\psi + \beta_1) \dots 3) & \bar{r} \sin \bar{\beta}_1 &= b_1 \sin(\bar{\psi} + \bar{\beta}_1) \dots \bar{3}) \\ r \sin \beta_2 &= b_2 \sin(\psi - \beta_2) \dots 4) & \bar{r} \sin \bar{\beta}_2 &= b_2 \sin(\bar{\psi} - \bar{\beta}_2) \dots \bar{4}) \end{aligned}$$

Die Ebenen OS' 1' und OS' 2' schließen den Winkel σ miteinander ein (Fig. 2). σ kann aus α' , ϕ' , ψ' nach dem sphärischen Cosinus-Satz berechnet werden:

$$\cos \alpha' = \cos \phi' \cos \psi' + \sin \phi' \sin \psi' \cos \sigma$$

Daraus kann $\cos \sigma$ berechnet werden. Analog ergibt sich $\cos \bar{\sigma}$. Wir nennen $\cos \sigma = k$ und $\cos \bar{\sigma} = \bar{k}$.

Aus Fig. 2 ersieht man:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi k \dots 5) \\ \cos \bar{\alpha} &= \cos \bar{\phi} \cos \bar{\psi} + \sin \bar{\phi} \sin \bar{\psi} \bar{k} \dots \bar{5}) \end{aligned}$$

Das sind die zwei fehlenden Gleichungen.

Die Auflösung der 10 Gleichungen kann folgendermaßen geschehen: 1) mit 2) kreuzweise multipliziert:

$$\sin \alpha_1 a_2 \sin(\phi - \alpha_2) = \sin \alpha_2 a_1 \sin(\phi + \alpha_1)$$

entwickelt und durch $\sin \phi \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$ dividiert ergibt:

$$a_2 (\cot \alpha_2 - \cot \phi) = a_1 (\cot \alpha_1 + \cot \phi)$$

Analog folgt aus $\bar{1})$ und $\bar{2})$

$$a_2 (\cot \bar{\alpha}_2 - \cot \bar{\phi}) = a_1 (\cot \bar{\alpha}_1 + \cot \bar{\phi})$$

Beide Gleichungen kreuzweise multipliziert und zusammengezogen zeigen, daß eine lineare Beziehung zwischen $\cot \phi$ und $\cot \bar{\phi}$ besteht:

$$\cot \bar{\phi} = C_1 \cot \phi + K_1 \dots 1'a)$$

Analog folgt:

$$\cot \bar{\psi} = C_2 \cot \psi + K_2 \dots 1'b)$$

wobei

$$C_1 = \frac{(\bar{\alpha}_1) + (\bar{\alpha}_2)}{(\alpha_1) + (\alpha_2)} \quad K_1 = \frac{(\alpha_1) (\bar{\alpha}_2) - (\bar{\alpha}_1) (\alpha_2)}{(\alpha_1) + (\alpha_2)} \dots 1'a)$$

$$C_2 = \frac{(\bar{\beta}_1) + (\bar{\beta}_2)}{(\beta_1) + (\beta_2)} \quad K_2 = \frac{(\beta_1) (\bar{\beta}_2) - (\bar{\beta}_1) (\beta_2)}{(\beta_1) + (\beta_2)} \dots 1'b)$$

Wegen Vereinfachung der Schreibweise ist in obigen Gleichungen und ebenso wird gelegentlich in der Folge „cot“ durch eine Einklammerung des Winkels ersetzt.

1) mit $\bar{1})$ kreuzweise multipliziert, ergibt nach einfacher Rechnung:

$$\bar{r} \sin \phi \cot \alpha_1 + \bar{r} \cos \phi = \sin \bar{\phi} \cot \bar{\alpha}_1 + \cos \bar{\phi}$$

Infolge 2) und $\bar{2})$ folgt:

$$\bar{r} \sin \phi \cot \alpha_2 - \bar{r} \cos \phi = \sin \bar{\phi} \cot \bar{\alpha}_2 - \cos \bar{\phi}$$

Addiert man beide Gleichungen, so folgt:

$$\bar{r} \sin \phi (\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2) = \sin \bar{\phi} (\cot \bar{\alpha}_1 + \cot \bar{\alpha}_2)$$

Nach Vergleich mit C_1 aus 1a) folgt:

$$\sin \bar{\phi} = \frac{\bar{r}}{C_1} \sin \phi \dots 2a)$$

Analog ist:

$$\sin \bar{\psi} = \frac{\bar{r}}{C_2} \sin \psi \dots 2b)$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn für $\bar{r}^2 = \rho$ gesetzt wird:

$$\sin \bar{\phi} \sin \bar{\psi} = \frac{\rho}{C_1 C_2} \sin \phi \sin \psi \dots 6)$$

Subtrahiert man $\bar{5}$) von 5), so folgt nach Verwendung von 6)

$$\cot \phi \cot \psi + k - \frac{\rho}{C_1 C_2} (\cot \bar{\phi} \cot \bar{\psi} + \bar{k}) = 0 \dots 7)$$

Der weitere Weg besteht darin, die cot-Funktionen durch ρ auszudrücken.

Zunächst wird in 2a) sin durch cot ausgedrückt:

$$1 + (\phi)^2 = \frac{\rho}{C_1^2} (1 + (\bar{\phi})^2) \dots 3a)$$

Läßt man in 1a) und 3a) die cot die Werte 0, 1, 2, 3, ... annehmen, so ergibt 1a) eine Gerade und 3a) eine Parabel. Setzt man aus 1a) (ϕ) in 3a), so erhält man $(\bar{\phi})$ als Funktion von ρ . Anders gesagt: die Gerade wird mit der Parabel zum Schnitt gebracht.

Aus 1a) folgt:

$$(\phi) = \frac{1}{C_1} ((\bar{\phi}) - K_1)$$

Eingesetzt in 3a) ergibt, wenn man $C_1^2 + K_1^2 = G_1$ nennt:

$$(1 - \rho) (\bar{\phi})^2 - 2K_1 (\bar{\phi}) + G_1 - \rho = 0$$

$$\text{somit: } \cot \bar{\phi} = \frac{1}{1 - \rho} (K_1 \pm \sqrt{K_1^2 - (1 - \rho)(G_1 - \rho)}) \dots 8a)$$

$$\text{Analog } \cot \bar{\psi} = \frac{1}{1 - \rho} (K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - (1 - \rho)(G_2 - \rho)}) \dots 8b)$$

Zunächst drücken wir in 7) die Größen ϕ durch $\bar{\phi}$ sowie ψ durch $\bar{\psi}$ aus. Siehe 1a) und 1b)

$$\frac{1}{C_1} ((\bar{\phi}) - K_1) \frac{1}{C_2} ((\bar{\psi}) - K_2) + k - \frac{\rho}{C_1 C_2} ((\bar{\phi}) (\bar{\psi}) + \bar{k}) = 0$$

Daraus folgt:

$$(1 - \rho) (\bar{\phi}) (\bar{\psi}) - K_1 (\bar{\psi}) - K_2 (\bar{\phi}) + K_1 K_2 + k C_1 C_2 - \rho \bar{k} = 0$$

Nennt man $K_1 K_2 + k C_1 C_2 - \rho \bar{k} = R_0$ und die in 8a) und 8b) unter den Wurzeln stehenden Ausdrücke R_1 bzw. R_2 , so folgt nach Multiplikation mit $(1 - \rho)$:

$$(K_1 \pm \sqrt{R_1}) (K_2 \pm \sqrt{R_2}) - K_1 (K_2 \pm \sqrt{R_2}) - K_2 (K_1 \pm \sqrt{R_1}) + (1 - \rho) R_0 = 0$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{R_1 R_2} = K_1 K_2 - (1 - \rho) R_0$$

Quadriert und nach fallenden Potenzen von ρ geordnet, ergibt die gesuchte Gleichung 3. Grades:

$$(\bar{k}^2 - 1) \rho^3 + [(G_1 + G_2) - (\bar{k}^2 - 1) - 2H\bar{k}] \rho^2 + [(K_1^2 + K_2^2) + 2H\bar{k} - 2K_1 K_2 \bar{k} - (G_1 + G_2) + (G_1 G_2 - H^2)] \rho + 2K_1 K_2 H + (G_1 G_2 - H^2) - (K_1^2 G_2 + K_2^2 G_1) = 0 \dots 9)$$

Rechenvorgang

Aus den Bildkoordinaten und der Kammerkonstanten werden die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \beta_1, \beta_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ (Fig. 1) sowie $\cos \sigma = k, \cos \bar{\sigma} = \bar{k}$ (Fig. 2) berechnet. Ferner werden C_1, K_1 und C_2, K_2 nach den Gleichungen 1'a) 1'b) berechnet. Mit diesen Größen findet man $G_1 = C_1^2 + K_1^2$ sowie $G_2 = C_2^2 + K_2^2$ und $H = K_1 K_2 + k C_1 C_2$. Somit sind die Koeffizienten von 9) berechenbar. Bestimmung von ϱ aus 9). Mit 8a), 8b) wird $\bar{\phi}$ und $\bar{\psi}$, und aus 1a) und 1b) werden ϕ und ψ berechnet. Aus 1), 2), 3) und 4) findet man a_1, a_2, b_1 und b_2 . Der Winkel α folgt aus 5) bzw. $\bar{5}$). Wird eine Strecke, z. B. eine Seite des Vierecks gemessen, so ist auch der Maßstab bestimmt.

Die gesamten Überlegungen erfordern nicht die vorhergehende Bestimmung der gegenseitigen Orientierung, die im allgemeinen damit beginnt, aus den beiden genannten Strahlenbündeln die entsprechenden rechtwinkligen Ecken zu finden.

Die gefährlichen Örtter

Ein gefährlicher Fall ergibt sich, wenn die Punkte $0, \bar{0}$ und S in einer zur Ebene 1, 2, 3, 4 normalen Geraden liegen. Sodann ergibt sich aus 2a) und 2b), daß für jedes \bar{r} gilt: $\bar{r}^2 = C_1 C_2$. Ferner ist $k = \bar{k}$. Somit ist 7) für jedes \bar{r} befriedigt. Liegen 0 und $\bar{0}$ in einer zur genannten Ebene normalen Geraden, die nicht durch S geht, so liegen immer gefährliche Örtter vor. Ihre Ableitung ist umständlich und daher nicht angeführt.

Numerische Auswertung von weiteren Punkten des Objektes

Die auszuwertenden Punkte des Objekts liegen entweder in der Ebene des genannten Vierecks, oder sie liegen außerhalb dieser Ebene. Im ersten Fall kann die kollineare Beziehung zwischen Bild und Objekt verwendet werden. Die Genauigkeit, die mit den bekannten graphischen Verfahren (Möbiusnetz, Papierstreifenverfahren) erreicht wird, reicht im allgemeinen nicht aus. Numerische, praktisch gut brauchbare Methoden sind unter (5) (13) (14) angegeben. Diese Auswertung kann mit jedem der beiden Bilder einzeln erfolgen. Beide Auswertungen miteinander verglichen ergeben ein Kriterium über die Lage der Objektpunkte gegenüber der Vierecksebene. Die in obigen Arbeiten angeführten numerischen Methoden verwenden mit großem Vorteil Dreieckskoordinaten. Jedoch bei dieser Methode wird nur die kollineare Beziehung zwischen Bild und Objekt beachtet. Die gegebene innere Orientierung der Bilder wird dabei negiert und die perspektive Lage von Bild und Objekt bleibt somit unbeachtet. Anders ist es mit den unter 11a) b) in (5) beschriebenen Verfahren. Diese sind zur numerischen Auswertung von Punkten geeignet, die sowohl innerhalb als außerhalb der Vierecksebene liegen. Erst jetzt muß man an die Bestimmung äußerer Orientierungselemente denken.

Ein genügend ebenes Gelände ist im allgemeinen horizontal. Haben die vier abgebildeten Punkte Höhen, die hinreichend genau gleich groß sind, so kann die absolute Orientierung aus r, ϕ, ψ, α und $\bar{r}, \bar{\phi}, \bar{\psi}, \alpha$ einfach berechnet werden: Aus dem sphärischen Dreieck mit den Seiten ϕ, ψ, α wird der Winkel berechnet, welcher der Höhe auf α entspricht. r multipliziert mit dem \sin dieses Winkels ergibt die Flughöhe usw. Man siehe auch [4].

Bemerkt sei, daß Punkte gleicher Höhen gelegentlich in Uferlinien (Seen, Inseln, Meerbuchten) auffindbar sind. Auch unweit von Uferlinien von Flüssen, deren Gefälle bekannt ist, lassen sich Punkte gleicher Höhen einfach bestimmen. In der Architekturphotogrammetrie ergeben sich sicher vier Punkte, die in einer ebenen Wand liegen. Die „absolute Orientierung“ (sie dient zur Auswertung von Punkten die nicht in der Wand liegen) wird in diesem Fall am einfachsten auf diese Wand bezogen.

Das überbestimmte Problem

Das Problem wird überbestimmt, wenn 3 Bilder des ebenen Vierecks vorliegen. Sodann ergibt sich eine zweite Gleichung 3. Grades. Wir haben also:

$$\rho^3 + U_1 \rho^2 + V_1 \rho + W_1 = 0 \dots \dots \dots \text{I)}$$

$$\rho^3 + U_2 \rho^2 + V_2 \rho + W_2 = 0 \dots \dots \dots \text{II)}$$

Subtrahieren wir II) von I), so haben wir eine quadratische Gleichung. Multiplizieren wir I) mit $-\bar{W}_2$ und II) mit \bar{W}_1 und addieren wir beide Gleichungen und dividieren wir diese durch ϱ , so haben wir eine zweite Gleichung 2. Grades. Dividieren wir jede der beiden Gleichungen durch den Koeffizienten des quadratischen Gliedes und subtrahieren wir diese voneinander, so haben wir eine Gleichung ersten Grades in ϱ .

Mit einem dritten Bild des Vierecks wird das Rechenverfahren sicher nicht abgekürzt; denn es sind die Winkel für das 3. Bild usw. zu berechnen. Aber die Sicherheit und Genauigkeit des Ergebnisses ist erheblich größer. Die lineare Gleichung liefert außerdem einen sehr guten Näherungswert für ϱ .

Mit diesen und anderen ganz einfachen Überlegungen lassen sich viele überbestimmte Aufgaben lösen; denn durch die Überbestimmung eines Problems wird dieses oft ein *anderes*, wesentlich einfacheres Problem. In der Ö.Z.f.V. 1955, Nr. 4, S. 103, 1976, Nr. 3/4, 1979, Nr. 1, ist dieses Thema behandelt. Vielleicht wird dies als eine Herausforderung aufgefaßt, eine klare Theorie zur Lösung überbestimmter Probleme zu entwickeln. Die Bezeichnung: „Geometrie der überbestimmten Probleme“ dürfte berechtigt sein.

Literatur

- (1) *Finsterwalder S.*: Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresberichte der Deutschen Mathem. Vereinigung VI, 2, 1899 oder S. Finsterwalder zum 75. Geb. S. 22.
- (2) *Finsterwalder S.*: Abh. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. II. Kl. XXII. Bd. 1906 oder S. Finsterwalder zum 75. Geb. S. 61.
- (3) *Hofmann-Wellenhof B.*: Die gegenseitige Orientierung von zwei Strahlenbündeln bei unbek. Näherungswerten und durch ein nicht iteratives Verfahren. Diss. Techn. Univ. Graz 1978.
- (4) *Killian K.*: Beitrag zur geometr. Bestimmung der Lotrichtung in der Luftbildmessung, Ö.Z.f.V. 1956, Nr. 2 und 3.
- (5) *Killian K.*: Beitrag zur numerischen und graphischen Auswertung von Luftbildern, Ö.Z.f.V. 1957, Nr. 4.
- (6) *Kruppa E.*: Über einige Orientierungsprobleme der Photogrammetrie, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Math.-naturw. Kl. Bd. CXXI, Abt. IIa, 1912.
- (7) *Labussière G.*: Possibilité de restitution a l'échelle près d'un corps..., aus: Vorträge bei der 2. Hauptversammlung der Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie, 1927.
- (8) v. *Sanden H.*: Die Bestimmung der Kernpunkte in der Photogrammetrie. Diss. Univ. Göttingen, 1908.
- (9) *Schmid Th.*: Orientierungsprobleme der Photogrammetrie. Intern. Arch. f. Photogramm. III. Bd. 1911–1913, S. 307.
- (10) *Schröter H.*: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung. Leipzig 1880, S. 377 bis S. 392.
- (11) *Steiner J.*: Synthetische Geometrie, 2. Teil, Theorie der Kegelschnitte 1867, S. 33.
- (12) *Weidemann F.*: Über die gegenseitige Orientierung zweier Luftbilder... B. u. L. 12. Jahrg. 1937, Heft 1.
- (13) *Wunderlich W.*: Rechnerische Rekonstruktion eines ebenen Objektes aus zwei Photographien, Geodæsia Universalis, Festschrift Karl Rinner z. 70. Geb. 1982.
- (14) *Wunderlich W.*: Zur rechnerischen Durchführung des Vierpunktverfahrens. Ö.Z.f.V. 45. Jahrg. 1957