

Paper-ID: VGI_198604



Konventionelle und moderne Verfahren zur Ableitung orthometrischer Höhen

Hans Sünkel ¹

¹ *Technische Universität Graz, Abteilung für Mathematische und Datenverarbeitende Geodäsie, Rechbauerstraße 12, A-8010 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **74** (2), S. 77–93

1986

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Suenkel_VGI_198604,  
Title = {Konventionelle und moderne Verfahren zur Ableitung orthometrischer H  
        {"o}hen},  
Author = {S{"u}nkel, Hans},  
Journal = {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
          Photogrammetrie},  
Pages = {77--93},  
Number = {2},  
Year = {1986},  
Volume = {74}  
}
```



Konventionelle und moderne Verfahren zur Ableitung orthometrischer Höhen

Von H. Sünkel, Graz

Abstract

In view of the planned transition from the presently used Austrian height system(s) to orthometric heights, the current very accurate gravity field determination for Austria, and the unflinching advance of the GPS technology, an investigation of standard techniques for the estimation of orthometric heights from geopotential numbers was timely.

Identified problem areas of commonly applied techniques are: ignorance of the density variation within the Earth's crust, virtually arbitrary selection of the isostatic compensation model, ignorance of other gravity field data but the gravity measured at the computation point, and the ignorance of the deviation of the regularized Earth gravity field from the gravity field of the reference ellipsoid.

A poor model can hardly provide good results. Therefore, after analyzing the well-established techniques, a modern procedure is presented which takes full advantage of both all available topographic, density, and gravity field data, and the most advanced techniques for an optimal processing of this data. It goes as far beyond existing methods, represents the present state of the art, and is designed to provide the most accurate orthometric heights for Austria ever envisioned before.

1. Einleitung

Geodätische Messungen beinhalten sowohl geometrische als auch physikalische Information. Die Bestimmung der Geometrie erfordert jedoch die Kenntnis der Physik, wobei hier der Kenntnis des Erdschwerefeldes die mit Abstand größte Bedeutung zukommt. Ohne Annahmen über die Dichteverteilung im Erdinneren ist zwar theoretisch das Schwerfeld im Außenraum aus Oberflächen-Schwerefelddaten schätzbar, nicht jedoch das Schwerfeld im Innenraum. Die Bestimmung des Geoides, aber auch die Bestimmung von orthometrischen Höhen erfordern die Kenntnis des Schwerfeldes im Innenraum zwischen Geoid und Erdoberfläche. Da naturgemäß das Schwerfeld von der Massenverteilung lebt, spielt das Dichtemodell, insbesondere außerhalb des Geoides, bei der Bestimmung von Geoidhöhen und orthometrischen Höhen eine wichtige Rolle.

1.1 Höhenmodell, Dichtemodell

Wäre für jeden Punkt des Innenraumes die Dichte bekannt, so würden sich physikalisch-geodätische Messungen an der Erdoberfläche wegen der unmittelbaren Bestimmbarkeit des zugehörigen Schwerfeldes erübrigen. Umgekehrt, wäre für jeden Punkt der (bekannten) Erdoberfläche das Schwerepotential bekannt, so würden sich Annahmen bezüglich einer Dichteverteilung im Erdinneren für die Bestimmung des äußeren Schwerfeldes erübrigen. In der Praxis trifft natürlich weder der eine noch der andere Fall zu.

Dichte-Information ist Ursacheninformation, physikalisch-geodätische Information Wirkungsinformation. Puristen unter den Geodäten glauben bei der Bestimmung des Schwerfeldes im Außenraum auf Ursacheninformation gänzlich verzichten zu können, Praktiker (wie der Autor dieses Beitrages) haben die Bedeutung von Dichte-Daten sehr wohl zu schätzen gelernt: für die Zwecke der Erdschwerefeldbestimmung im Außenraum brauchen wir Dichte-Information zur Signalglättung (Filterung), um mit geringerem Fehler präzisieren zu können; für die Zwecke der Erdschwerefeldbestimmung im Innenraum ist die Kenntnis und Verwendung von Dichte-Information ohnehin unverzichtbar.

Es ist daher nicht verwunderlich, daß der Erstellung eines (digitalen) Dichtemodelles zumindest für den Bereich der Erdkruste in jüngster Zeit viel Aufmerksamkeit geschenkt wurde.

Als einfachstes Dichtemodell findet allgemein ein Modell konstanter Dichte (2.67 g/cm^3) zwischen Moho (Mohorovičić-Diskontinuität) und Erdoberfläche Verwendung, wobei die Moho meist über ein einfaches 1:1 isostatisches Kompensationsmodell nach Airy/Heiskanen in Verbindung mit einem digitalen Höhenmodell (DHM) definiert ist. Ein derartiges Modell lag u. a. auch der Geoidbestimmung für Österreich 1983 zugrunde (Grasegger/Wotruba, 1983; Sünkel, 1983).

Seit etwa einem Jahr steht uns nun ein wesentlich besseres Dichtemodell zur Verfügung, welches einerseits die Geometrie der Erdoberfläche in Form einer Treppenfunktion von 350 m \times 350 m-Mittelwerten besser beschreibt, als auch die konstante Dichte durch eine ortsabhängige Oberflächendichte ersetzt. Daneben werden derzeit optimale isostatische Kompensationsmodelle entwickelt (Sünkel, 1985).

1.2 Schwerefeld

Die Bestimmung des Erdschwerefeldes aus Erdschwerefelddaten wie Freiluftanomalien, Oberflächenlotabweichungen, Differenzen von Höhenanomalien etc. ist im Prinzip gelöst: die konzeptionell klare, mathematisch anspruchsvolle und in der Realisierung komplexe Methode der Kollokation nach kleinsten Quadraten mit Parametern erlaubt die Verarbeitung sämtlicher Schwerefelddaten (in Form von linearen Funktionalen bezüglich eines Störpotentials) und die Prädiktion beliebiger linearer Funktionaler des Störpotentials samt Fehlerschätzung. Praktische Voraussetzung ist jedoch eine statistische Homogenität und Isotropie dieses Störpotentials, welche insbesondere in Gebieten mit alpinem Charakter kaum jemals gegeben ist. Die Qualität der Schätzergebnisse hängt zudem sehr wesentlich von der Dichte und Homogenität der Datenverteilung ab; größere Datenlöcher werden von der Kollokation gewissermaßen als Mülldeponie betrachtet. Es ist daher anzustreben, durch Verwendung von Ursacheninformation in Form eines Dichtemodelles

- a) die Wirkungsinformation (gemessene Schwerefelddaten) so zu filtern (glätten), daß Homogenität und Isotropie des zugehörigen Restfeldes weitgehend erzielt wird,
- b) Datenlöcher für das glatte Restfeld leichter überbrückbar werden.

Für die Grazer Lösung der Geoidbestimmung für Österreich 1983 fand zu diesem Zweck ein lokales Dichtemodell Verwendung, welches konstante Dichte zwischen Moho und der Erdoberfläche vorsah, wobei die Erdoberfläche durch ein DHM mit einem Gitterabstand von $20''$ in Breite und Länge und die Moho durch ein 1:1 Airy/Heiskanen isostatisches Kompensationsmodell mit einer Standard-Kompensationstiefe von 30 km repräsentiert waren. (Daneben wurde globale Information in Form eines Satzes von Kugelfunktionskoeffizienten bis zum Grad 180 sowie die aus globalen $1^\circ \times 1^\circ$ Höhen-Mittelwerten abgeleitete topographisch-isostatische Schwerefeldinformation verwendet.)

Das ermittelte Rest-Störpotential war durch besonders starke Affinität zu der aus geologischen Karten entnommenen Dichte gekennzeichnet. Es war daher naheliegend, den Einfluß dieser Dichtestörungen auf Schwerefeldgrößen wie Schwerepotential, Schwerestörung und Lotabweichung zu untersuchen. Zu diesem Zweck wurde aus Gründen der Vergleichbarkeit dasselbe Höhenmodell wie 1983, jedoch anstelle konstanter Dichte das von Steinhauser/Walach zur Verfügung gestellte digitale Dichtemodell (DDM) herangezogen. Da, wie bereits erwähnt, dieses DDM eigentlich nur für die Erdoberfläche gilt, die Berechnung der Wirkung jedoch eine dreidimensionale Dichteverteilung verlangt, waren wir gezwungen, eine Annahme bezüglich der „Fortsetzung der Dichte nach unten“ zu treffen. Aus Gründen der Einfachheit entschieden wir uns für eine 1:1-Fortsetzung bis ins Nullniveau (Massensäulen konstanter Dichte), ergänzt durch ein ebenfalls 1:1 gewähltes Airy/Heiskanen-Modell. Diese Annahme erscheint natürlich in hohem Maße anfechtbar; daher wurde dieses DDM zunächst nur als verbessertes Testmodell betrachtet.

Die Ergebnisse unserer Berechnungen mit diesem eben beschriebenen Testmodell zeigen, daß etwa 70% des unter Zugrundelegung konstanter Dichte ermittelten Rest-Störpotentials auf das Konto bekannter Dichtestörungen gehen; anders ausgedrückt heißt dies, daß allein mit Hilfe globaler Schwerefeldinformation und lokaler Dichteinformation Differenzen von Höhenanomalien (abzüglich eines stark ausgeprägten linearen Trends) mit einer Genauigkeit von wenigen Dezimetern bestimmt werden können; dies ist ein glänzendes Beispiel dafür, daß geophysikalisch-geologische Daten als Ursacheninformation ebenso wertvoll sind für die Zwecke der Erdschwerefeldbestimmung wie Wirkungsinformation aus geodätischen Quellen.

Die folgende Tabelle enthält eine Übersicht der minimalen und maximalen Wirkung des DDM auf Erdschwerefeldgrößen (vgl. Fig. 1, 2, 3).

	min	max	Dimension
Potential	-2	3	m ² s ⁻²
Schwere	-5	9	mgal
Lotabweichung	-3	3	Bogensek.

1.3 Orthometrische Höhen

Die orthometrische Höhe ist bekanntlich der Quotient von geopotentieller Kote und Mittelwert der Schwere entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Erdoberfläche

$$H = \frac{C}{\bar{g}} \tag{1-1}$$

mit H ... orthometrische Höhe,
 C ... geopotentielle Kote,
 \bar{g} ... Schweremittelwert entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Erdoberfläche,

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g \, dH . \tag{1-2}$$

Um die hypothesenfrei bestimmbare geopotentielle Kote in eine orthometrische Höhe überzuführen, benötigen wir also die Schwere zwischen Geoid und Erdoberfläche, d. h. für kontinentale Bereiche innerhalb des obersten Bereiches der Erdkruste. Da aber die Schwere im Erdinneren nicht direkt meßbar ist (wenn man von den wenigen Bohrlöchern absieht), benötigen wir Hypothesen über deren Verlauf in diesem Bereich. Da die Schwere als Wirkungsgröße aber die Dichte als Ursache hat, lassen sich die Schwerehypothesen auf Dichtehypothesen zurückführen.

2. Standardverfahren zur Schätzung der Schwere zwischen Geoid und Erdoberfläche

Sämtliche derzeit verwendeten diesbezüglichen Verfahren gehen von der Annahme aus, daß genau auf jenem Punkt der Erdoberfläche, für den die orthometrische Höhe bestimmt werden soll, die Schwere gemessen wurde. Sämtliche herkömmlichen Modelle unterscheiden sich in der Art der Behandlung der (sichtbaren) topographischen Massen und der Fortsetzung der Schwere nach unten.

2.1 Das Modell von Poincaré und Prey

Bezeichnet man einen Punkt auf der Erdoberfläche mit P und einen zugehörigen Punkt entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Erdoberfläche mit Q, so ist die Schwere in Q formal durch

$$g_Q = g_P - \int_Q^P \frac{\partial g}{\partial H} \, dH \tag{2-1}$$

gegeben (Heiskanen/Moritz (HM), 1967, S. 164), wobei der Vertikalgradient der Schwere der folgenden Gleichung genügt (HM, 1967, S. 164):

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2 \quad (2-2)$$

mit J . . . mittlere Krümmung der Niveaulächen,
 G . . . Gravitationskonstante,
 ρ . . . (Massen)dichte,
 ω . . . Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation.

Da weder gJ noch ρ der Messung direkt zugänglich sind, bedient man sich der Approximation

$$gJ \doteq \gamma J_0 \quad (2-3)$$

mit γ . . . Normalschwere des Bezugsellipsoids,
 J_0 . . . mittlere Krümmung der Niveaulächen des Bezugsellipsoids,

sowie der Annahme, daß die lokale Dichte dem globalen Krusten-Mittelwert entspricht,

$$\rho = \rho_0 = 2.67 \text{ g/cm}^3. \quad (2-4)$$

Diese beiden Annahmen führen zu einem Vertikalgradient der Schwere von (HM, 1967, S. 164)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial h} &\doteq \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 4\pi G\rho, \\ \frac{\partial g}{\partial h} &\doteq -0.3086 + 0.2238 = -0.0848 \text{ mgal/m} \end{aligned} \quad (2-5)$$

und durch Integration entsprechend (2-1) somit zur Schwere entlang der Lotlinie von

$$g_Q \doteq g_P + 0.0848 (H_P - H_Q). \quad (2-6)$$

Da der Term $4\pi G\rho$ in linearer Approximation ($(H/R)^2$ vernachlässigt), den Einfluß einer sphärischen Bouguerplatte (SBP) auf den Vertikalgradienten der Schwere darstellt, ist die Approximation (2-3) gleichbedeutend mit der Annahme, daß das um die Wirkung der Bouguerplatte reduzierte tatsächliche Schwerefeld mit dem Schwerefeld des Bezugsellipsoids identifiziert werden kann. Dies würde aber weiters bedeuten, daß etwa das Feld der Bougueranomalien identisch Null oder daß das Bouguer-Cogeoid identisch dem Bezugsellipsoid wäre. Wir wissen natürlich, daß dies keineswegs der Fall ist und folglich die Verwendung von (2-6) nicht unbedenklich ist.

2.2 Die sphärischen Platten-„remove-restore“-Verfahren

1. Das konzeptionell einfachste Verfahren der Bestimmung der Schwere im Erdinneren besteht darin, daß man

- a) vom gemessenen Oberflächen-Schwerewert g_P den Einfluß jener partiellen sphärischen Bouguerplatte (PSBP) abzieht („remove“), welche zwischen Q und P liegt,
- b) das so reduzierte Schwerefeld mit dem des Bezugsellipsoids identifiziert und somit die Fortsetzung nach unten von P bis zum Punkt Q modellspezifisch erfolgen kann („normale Freiluftreduktion“),

c) in Q die Wirkung der unter (a) entfernten PSBP wieder anbringt („restore“); dabei ist zu beachten, daß der Einfluß einer homogenen Kugelschale auf die Schwere (und all ihre Ableitungen) für Punkte im Inneren der Kugelschale identisch Null ist und folglich die PSBP zwischen Q und P bezüglich des Punktes Q eine Nullwirkung auf die Schwere hat.

Da die Wirkung einer SBP auf die Schwere an einem (beliebigen) Punkt ihrer äußeren Oberfläche bei einer Normaldichte ρ_0 in linearer Approximation gleich $0.2238 H_P$ mgal (bei H_P in Meter) und der normale Freiluftgradient 0.3086 mgal/m beträgt, läßt sich das oben beschriebene Verfahren so darstellen:

gemessene Oberflächenschwere	g_P
Entfernung der PSBP	$- 0.2238 (H_P - H_Q)$
normale Freiluftreduktion	$+ 0.3086 (H_P - H_Q)$
<hr/>	
Schwere in Q	$g_Q = g_P + 0.0848 (H_P - H_Q)$

Wir erhalten demnach eine zu (2-6) identische Schätzung von g_Q .

2. Es ist zwar nicht ganz einzusehen, mehr Massen als unbedingt notwendig rechnerisch zu entfernen, aber denkbar und möglich wäre es dennoch, eine PSBP zwischen einem Punkt Q' mit $H_{Q'} \leq H_Q$ wegzureduzieren. In diesem Fall erfolgt die Bestimmung von g_Q in folgenden Schritten:

gemessene Oberflächenschwere	g_P
Entfernung der PSBP	$- 0.2238 (H_P - H_{Q'})$
normale Freiluftreduktion	$+ 0.3086 (H_P - H_Q)$
Wiederherstellung der PSBP	$+ 0.2238 (H_Q - H_{Q'})$
<hr/>	
Schwere in Q	$g_Q = g_P + 0.0848 (H_P - H_Q)$

Auch mit dieser Methode erhalten wir Gleichung (2-6).

3. Gewissermaßen ein Sonderfall von (2) besteht darin, daß $H_{Q'} = 0$ ist. In diesem Fall entartet die PSBP zwischen Q' und P in die SBP der Höhe H_P und wir erhalten als Berechnungsschema

gemessene Oberflächenschwere	g_P
Entfernung der SBP	$- 0.2238 H_P$
normale Freiluftreduktion	$+ 0.3086 (H_P - H_Q)$
Wiederherstellung der SBP	$+ 0.2238 H_Q$
<hr/>	
Schwere in Q	$g_Q = g_P + 0.0848 (H_P - H_Q)$

Wiederum finden wir Gleichung (2-6) wieder. (Im übrigen wird der Schritt „Entfernung der SBP + normale Freiluftreduktion“ als (unvollständige) Bouguerrreduktion bezeichnet, falls $H_Q = 0$ ist.)

4. Offenbar ist das Ergebnis aller oben angeführten Methoden (1) bis (3) unabhängig von der Wahl von Q', solange $H_{Q'} \leq H_Q$ ist, also auch unabhängig vom „restore-remove“-Zwischenschritt. Da im Zuge der Geoidbestimmung die topographisch-isostatische Datenreduktion unumgänglich ist, ist es naheliegend, das Konzept der isostatischen Kompensation auch bei der Ermittlung von g_Q aus Konsistenzgründen anzuwenden. Dieses Verfahren ist also gleichsam eine Erweiterung von (3) insofern, als die Masse der SBP nicht beseitigt, sondern lediglich unter das isostatische Kompensationsniveau verlagert wird. Da aber zwei konzentrische homogene Kugelschalen gleicher Masse im Außenraum ein und dasselbe Schwerefeld erzeugen, hat der isostatische Massentransport der SBP eine Nullwirkung. Somit erhalten wir folgende Schritte:

gemessene Oberflächenschwere	g_P
normale Freiluftreduktion	+ 0.3086 ($H_P - H_Q$)
Wiederherstellung des isost. Massendefizits	- 0.2238 H_P
Wiederherstellung der SBP	+ 0.2238 H_Q
<hr/>	
Schwere in Q	$g_Q = g_P + 0.0848 (H_P - H_Q)$

Wir finden also wiederum Gleichung (2-6). Man beachte, daß Methode (4) der Methode (1) diametral gegenüberliegt: In (4) hat „remove“, in (1) „restore“ einen Nulleffekt. Ferner ist das Ergebnis bei Methode (4) unabhängig von der Wahl des Kompensationsniveaus.

5. Schließlich sei noch eine Methode genannt, welche anstelle der partiellen sphärischen Bouguerplatte (PSBP) eine (unendliche) partielle ebene Bouguerplatte (PEBP) verwendet. Hierbei ist zu beachten, daß die Wirkung einer PEBP die Hälfte der Wirkung einer PSBP (in linearer Approximation) beträgt, wobei im Gegensatz zur PSBP aus Symmetriegründen kein Unterschied besteht zwischen der Lage des Punktes Q auf der Ober- oder Unterseite der Platte. (Im übrigen ist die Schwerewirkung im Außenraum einer ebenen Bouguerplatte sogar unabhängig vom Abstand von der Platte!) Das ebene „remove-restore“-Verfahren läuft daher wie folgt ab (HM, S. 165):

gemessene Oberflächenschwere	g_P
Entfernung der PEBP	- 0,1119 ($H_P - H_Q$)
normale Freiluftreduktion	+ 0.3086 ($H_P - H_Q$)
Wiederherstellung der PEBP	- 0.1119 ($H_P - H_Q$)
<hr/>	
Schwere in Q	$g_Q = g_P + 0.0848 (H_P - H_Q)$

Obwohl wir auch in diesem ebenen Fall formal dasselbe Ergebnis erhalten wie in den vorangegangenen sphärischen Fällen (1) bis (4), lehne ich persönlich diese „ebene-Bouguerplatten-Interpretation“ ab: unendliche ebene Bouguerplatten sind extrem realitätsfern, können formal lediglich für die Zwecke der Schwerereduktion verwendet werden und stiften eigentlich nur unnötige Verwirrung. Eine Interpretation der Gleichung (2-6) im Sinne einer der Methoden (1) bis (4) erscheint mir ungleich realistischer; insbesondere ist (4) konsistent mit den üblichen Verfahren der Geoidbestimmung.

Sämtliche Ergebnisse (1) bis (4) stellen lineare Approximationen dar (Glieder in der Größenordnung von $(h/R)^2$, $R \dots$ Erdradius, wurden vernachlässigt). Daher erhielten wir auch g_Q in linearer Abhängigkeit von H_Q . Für den Übergang von geopotentiellen Knoten zu orthometrischen Höhen benötigen wir insbesondere den Mittelwert der Schwere \bar{g} entlang der Lotlinie zwischen Geoid ($H=0$) und Erdoberfläche ($H=H_P$). Wegen dieser linearen Beziehung ist aber der Mittelwert der Schwere gleich dem Schwerewert in mittlerer Höhe $H_Q = H_P/2$,

$$\begin{aligned}\bar{g} &= g_P + 0.0848 (H_P - H_P/2), \\ \bar{g} &= g_P + 0.0424 H_P.\end{aligned}\tag{2-7}$$

Die damit berechneten orthometrischen Höhen

$$H_P = \frac{C_P}{g_P + 0.0424 H_P}\tag{2-8}$$

werden allgemein als „Helmert-Höhen“ bezeichnet (HM, S. 167).

2.3 Die topographische Korrektur

Die im vorhergehenden Abschnitt unter (1) bis (5) behandelten Verfahren setzen voraus, daß die Erdoberfläche eine Fläche konstanter orthometrischer Höhe ist. Nachdem dies

bekanntlich nicht der Fall ist, basieren die bisher angegebenen Methoden auf Vereinfachungen, welche zwar im Flachland akzeptabel erscheinen, in Gebieten mit Gebirgscharakter jedoch zu wesentlichen Verfälschungen der mittleren Schwere und somit der orthometrischen Höhe führen.

Unter topographischer Korrektur (TK) versteht man stets den rechnerischen Übergang von der tatsächlichen Erdoberfläche zu einer Fläche konstanter orthometrischer Höhe $H = H_p$ und die Berücksichtigung der Wirkung dieses Überganges auf Schwerefeldgrößen wie etwa die Schwere. Im Zusammenhang mit der Modellvorstellung des isostatischen Massenausgleichs begegnen wir noch einer weiteren TK, nämlich dem rechnerischen Übergang von der modellbedingten Gebirgswurzel zu einer Fläche konstanter Gebirgswurzeltiefe, welche eine Funktion von H_p ist, und der Berücksichtigung der Wirkung dieses Überganges auf Schwerefeldgrößen.

Alle Verfahren (1) bis (5) müssen daher streng genommen um die beiden Schritte

a) topographische Oberflächen- (und bei (4) Gebirgswurzel-)Korrektur in P,

b) topographische Oberflächen- (und bei (4) Gebirgswurzel-)Korrektur in Q

erweitert werden. Wegen der hohen Rechenintensität vermied man bisher in vielen Fällen die Berechnung dieser TK, was bisweilen zu einer Verfälschung der orthometrischen Höhe im Betrag von mehreren Zentimetern führte. Da wir primär den Mittelwert der TK entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Erdoberfläche benötigen, müßte die TK für sehr viele Punkte Q entlang der Lotlinie berechnet werden; da sich aber die TK fast linear mit der Höhe des Punktes Q ändert, genügt es in vielen Fällen, die TK lediglich für zwei Punkte zu berechnen, wobei der eine Punkt verständlicherweise P ist (Erdoberfläche) und der andere entweder der zugehörige Punkt am Geoid ($H_Q = 0$) oder der in mittlerer Höhe ($H_Q = H_p/2$) (Niethammer, 1932; Mader, 1954). Diese lineare Approximation verursacht Fehler im Mittelwert der Schwere bis zu einigen Milligal und verfälscht damit die orthometrische Höhe bis zu einigen Millimetern pro Kilometer Meereshöhe.

3. Ein modernes Verfahren zur Bestimmung der Schwere im Erdinneren

Die in Kapitel 2 beschriebenen herkömmlichen Verfahren leiden unter vier Schwachstellen:

1. Annahme konstanter Dichte der Erdkruste,
2. Annahme eines an sich beliebigen isostatischen Modelles,
3. Ausschluß aller vorhandenen Schwerefelddaten mit Ausnahme von g_p ,
4. Verwendung des normalen Schwerefeldes des Bezugsellipsoides anstelle des tatsächlichen zum Zwecke der Fortsetzung nach unten.

Folge dieser Annahmen bzw. Einschränkungen ist ein fehlerhafter Mittelwert der Schwere entlang der Lotlinie und damit wegen (1-1) eine fehlerhafte orthometrische Höhe.

Bis vor wenigen Jahren war weder ein besonderer Bedarf nach genaueren orthometrischen Höhen gegeben noch waren geeignete Daten und Rechenverfahren vorhanden, um diese Schwachstellen zu beseitigen. Mit dem geplanten Übergang auf das System der orthometrischen Höhen innerhalb des österreichischen Bundesgebietes, der derzeit laufenden hochpräzisen Erdschwerefeldbestimmung für Österreich und der schrittweisen Integration des GPS-Verfahrens ist jetzt aber der Bedarf nach besonders genauen und möglichst wenig hypothesenbehafteten orthometrischen Höhen sehr wohl gegeben. Im Hinblick auf die Erdschwerefeldbestimmung wurde und wird intensiv an der Bereitstellung eines hochauflösenden digitalen Höhenmodelles, eines digitalen Dichtemodelles, eines optimalen isostatischen Modelles und der notwendigen homogenen wie dichten Bedeckung unseres Bundesgebietes mit Erdschwerefelddaten wie Schwereanomalien und Lotabweichungen gearbeitet. Daneben ist die Entwicklung mathematisch-numerischer Verfahren zur konsistenten Verarbeitung all dieser Daten weitgehend abgeschlossen; als fertige Werkzeuge liegen sie in Form von optimierten Computerprogrammen vor. Diese Algorithmen erlauben die optimale Schätzung aller

wichtigen Erdschwerefeldgrößen, darunter natürlich auch der Schwere. Somit fällt der Mittelwert der Schwere entlang der Lotlinie gewissermaßen als Abfallprodukt der Erdschwerefeldbestimmung an. Im folgenden soll auf die zuvor verwiesenen vier Punkte näher eingegangen und erste vorliegende Teilergebnisse präsentiert werden.

3.1 Das digitale Dichtemodell (DDM) für Österreich

Herkömmliche Verfahren zur Bestimmung der Schwere innerhalb der Erdkruste beschränken sich auf die Verwendung eines Modelles konstanter Dichte ρ_0 , wobei im allgemeinen der Standardwert 2.67 g/cm^3 verwendet wird. Die größeren Verfahren ignorieren dabei sogar die topographisch reizvollen Strukturen unserer Erdoberfläche, welche nun in Form eines digitalen Höhenmodelles (DHM) vorliegen; verfeinerte Methoden wie jene von Niethammer (1932) und Mader (1954) machen von der Form der Topographie bei Annahme konstanter Krustendichte bereits Gebrauch.

Da die Form der Topographie einen sehr wesentlichen Einfluß auf die lokalen Eigenschaften des Schwerfeldes hat, war es naheliegend, der Erstellung eines DHM vorrangige Bedeutung beizumessen. In der Tat stellt die Information DHM, vereinigt mit einem angenommenen konstanten Dichtewert $\rho = \rho_0$, bereits eine erste Stufe eines DDM dar. Für die Geoidbestimmung in Österreich 1983 wurde ein solches DDM verwendet (Grasegger und Wotruba, 1983; Sünkel, 1983).

Eine wesentliche Verbesserung dieser ersten Stufe eines DDM besteht, neben der Vorgabe des DHM in Form von $11.25'' \times 18.75''$ -Höhen-Mittelwerten, in einem Oberflächen-DDM ($\rho = \rho(\phi, \lambda)$, $\phi, \lambda \dots$ geodätische Breite, Länge) mit einer Vorschrift, auf welche Art die Oberflächendichte nach unten (etwa bis ins Nullniveau) fortzusetzen ist. Für Österreich und seine weitere Umgebung steht derzeit ein solches DDM mit einer Auflösung von $1.5' (\phi) \times 2.5' (\lambda)$ in Form von Mittelwerten zur Verfügung (Steinhauser/Walach, private Kommunikation); als einfachste Art der Fortsetzung nach unten wurde die der vertikalen Massensäulen bis ins Nullniveau gewählt.

Ziel ist es, ein dreidimensionales DDM ($\rho = \rho(r, \phi, \lambda)$) bereitzustellen, welches nicht bloß durch mehr oder weniger willkürliche Fortsetzung eines Oberflächen-DDM nach unten entsteht, sondern neben der Information Oberflächendichte aus seismischer Information und aus Bohrlochmessungen abgeleitet werden sollte.

3.2 Ein optimales isostatisches Modell

Wenn bisher von Isostasie die Rede war, so verstand man meist einen isostatischen Ausgleich der topographischen kontinentalen wie ozeanischen Massen nach dem Modell Airy/Heiskanen (AH), wobei die Krusten/Mantel-Grenze (Moho) ein unverzerrtes Abbild der darüberliegenden topographischen Struktur darstellt. Ein derart lokales 1:1-Verhalten entlang von vertikalen Massensäulen ist jedoch undenkbar, da dies eine freie Beweglichkeit vertikaler Massensäulen erfordern würde. Wenn überhaupt regional Isostasie gegeben ist, so stellt die Form der Moho viel eher ein verschwommenes Abbild der topographischen Massen dar. Dieses von Vening Meinesz (VM) vorgeschlagene Modell entspricht im wesentlichen einem geglätteten AH-Modell.

Das VM-Modell wird durch ein Minimum von zwei Parametern beschrieben: das Kompensationsniveau und einen Glättungsparameter, welcher das Verhalten des Glättungsoperators festlegt. Eine bestmögliche Schätzung dieser beiden Parameter für einen regionalen Bereich aus topographisch reduzierten Erdschwerefelddaten wäre iterativ möglich, falls als bestes Modell jenes identifiziert würde, welches ein möglichst schwaches topographisch-isostatisch reduziertes Restschwerefeld liefert.

Eine derartige Studie auf globaler Basis hatte zum Ziel, die bestmöglichen Parameter eines globalen isostatischen Kompensationsmodelles auf Grund beobachteter Geopotentialdaten in Form eines vollständigen Satzes von Kugelfunktionskoeffizienten bis Grad und Ord-

nung 180 zu schätzen (Sünkel, 1985). Die Schätzung der beiden Kompensationsparameter erfolgte mittels Kollokation nach kleinsten Quadraten mit Parametern und lieferte unter der Bedingung der Minimierung des Restpotentials (beobachtetes Potential minus topographisch-isostatisches Potential) einen globalen Wert für die Kompensationstiefe von etwa 24 km und ein Glättungsmodell vom Gauß'schen Typ mit einer Halbwertsbreite von etwa 100 km. Bei der Kollokationslösung wurde der niedrigfrequente Spektralbereich vom Grad kleiner als 15 nicht berücksichtigt, da das beobachtete Geopotential in diesem Spektralbereich fast ausschließlich nicht-isostatisch bedingt ist.

Im Bereich jenseits Grad 30 wurde eine Übereinstimmung der beiden Spektren erzielt, welche als phänomenal gut bezeichnet werden kann.

Die Kompensationsglättung nach VM liefert nicht nur eine bessere Übereinstimmung mit der beobachteten Realität, sie entzieht sich auch des oft vorgebrachten Argumentes gegen ein 1:1-AH-Modell, das im Extremfall Spitzen von Antiwurzeln oberhalb des Ozeanbodens lieferte. Ein Argument, das für eine geringe Kompensationstiefe spricht, ist die beobachtete Dicke der Kruste unterhalb der Ozeane, welche von der Größenordnung 6–8 km ist. Unser Modell stimmt auch mit diesem Wert gut überein. Ein optimales VM-Modell wie das oben beschriebene ist sicher einem primitiven AH-Modell mit willkürlicher Wahl der Kompensationstiefe überlegen. Erstrebenswert wäre dennoch, die gesamte Krustenstruktur aus seismischen Daten, unterstützt durch Schwerefelddaten, abzuleiten. Es sei an dieser Stelle auch bemerkt, daß die räumliche Verteilung der isostatischen Massen auf die Schätzung des Mittelwertes der Schwere entlang der Lotlinie, \bar{g} , von untergeordneter Bedeutung ist; wesentlicher ist die Wahl des isostatischen Modells etwa für die Geoidbestimmung. Da jedoch die Bestimmung von \bar{g} als Teil der Erdschwerefeldbestimmung angesehen werden kann, sollte aus Konsistenzgründen dasselbe Modell verwendet werden.

3.3 Verarbeitung aller Erdschwerefelddaten und Fortsetzung nach unten

Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, machen die konventionellen Methoden zur Bestimmung der Schwere in der Erdkruste lediglich von g_p , der im zugehörigen Oberflächenpunkt gemessenen Schwere, Gebrauch; alle anderen Daten werden glattweg ignoriert. Diese freiwillige Einschränkung auf nur einen Schwerewert ist natürlich weitgehend historisch bedingt: bis vor etwa einem Jahrzehnt war weder die Datendichte hinreichend noch waren Verarbeitungsmethoden allgemein bekannt, welche homogene oder gar heterogene Datensätze in größerem Umfang mit vertretbarem Aufwand zu bearbeiten erlaubt und eine Unterscheidung zwischen dem topographisch-isostatisch reduzierten Restschwerefeld und dem Schwerefeld des Bezugsellipsoides ermöglicht hätten. So wurde aus der Not eine Tugend gemacht und die Schwerefortsetzung nach unten einfach über das Bezugsellipsoid gerechnet.

Schwerefortsetzung über Integralformel

Der tatsächliche Vertikalgradient (VG) der Schwere kann getrennt werden in den VG des Bezugsellipsoides und den VG der Schwereanomalie (HM, 1967, S. 115),

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial \gamma}{\partial H} + \frac{\partial \Delta g}{\partial H}, \tag{3-1}$$

(Δg . . . Schwereanomalie), welcher bei den in Kapitel 2 beschriebenen Standardverfahren vernachlässigt wird.

Unter Einschränkung der vorhandenen Erdschwerefelddaten auf Schweredaten läßt sich der VG der Schwereanomalie durch die Integralformel

$$\frac{\partial \Delta g_p}{\partial H} = \frac{R^2}{2\pi \sigma} \iint \frac{\Delta g - \Delta g_p}{l_0^3} d\sigma \tag{3-2}$$

mit $l_0 = 2R \sin(\psi/2)$ und ψ . . . sphärische Distanz zwischen Integrations- und Berechnungspunkt; Δg ist hier die Freiluftanomalie.

In dieser Gleichung wurden Glieder in der Größenordnung von H/R vernachlässigt, was sich letztendlich in der mittleren Schwere entlang der Lotlinie lediglich als Fehler von Bruchteilen eines Milligal auswirkt. Wegen der starken Singularität des Integralkerns in Gleichung (3-2) ist eine sehr hohe Dichte von Schwereanomalien, insbesondere in der unmittelbaren Umgebung des Berechnungspunktes P und die Darstellung des Integranden durch eine glatte Interpolationsfunktion (etwa in Form eines bikubischen Splines) erforderlich, um diese starke Singularität kompensieren zu können. Die Fortsetzung nach unten erfolgt mit Hilfe der Integralformel (3-2) über

$$\frac{\partial g}{\partial H} (H_P - H_Q) = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H} + \frac{\partial \Delta g}{\partial H} \right) (H_P - H_Q). \quad (3-3)$$

Unter der Annahme eines konstanten Vertikalgradienten der Schwereanomalie entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Erdoberfläche (was im Falle des topographisch-isostatisch reduzierten Restschwerefeldes eine für unsere Zwecke völlig hinreichende Approximation darstellt), läßt sich der Einfluß des Restschwerefeldes auf den Mittelwert der Schwere entlang der Lotlinie, \bar{g} , sehr einfach darstellen:

$$\delta \bar{g} = \frac{\partial \Delta g}{\partial H} \frac{H_P}{2} \quad (3-4)$$

Schwerefortsetzung mittels Kollokation

Die Schwerefortsetzung über die Integralformel (3-2) hat den Nachteil, daß lediglich Schweredaten verarbeitet werden können und diese für Zwecke der analytischen Integration nach Möglichkeit auf einem regelmäßigen Gitter vorliegen sollen. Mit Hilfe der Methode der Kollokation nach kleinsten Quadraten werden nun auch diese letzten Nachteile beseitigt.

Sei T das topographisch-isostatisch reduzierte Reststörpotential, welches außerhalb des Geoids (nahezu) harmonisch ist, und sei $K(P, Q)$ seine räumliche Kovarianzfunktion. Als topographisch-isostatisch reduzierte Erdschwerefelddaten seien beliebige lineare Funktionale von T zugelassen (z. B.: Restschwereanomalien, Restlotabweichungen, etc.); L_i sei das jeweils zugehörige Funktional. Dann läßt die Kollokation nach kleinsten Quadraten eine direkte beste Schätzung von $\delta \bar{g}$ zu (Moritz, 1980, S. 80).

$$\delta \bar{g}_p = C_p^T (C + D)^{-1} I \quad (3-5)$$

mit $\delta \bar{g}$... Mittelwert der Restschwereanomalie entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Erdoberfläche,

I ... Vektor der Restschwerefelddaten ($I_i = L_i T$)

C ... Kovarianzmatrix von I

$$C = \{c_{ij}\} = \{L_i L_j K(P_i, Q_j)\},$$

D ... Fehlerkovarianzmatrix von I (meist diagonal),

C_p ... Kreuzkovarianzvektor zwischen $\delta \bar{g}$ und I ,

$$C_p^T = \{L_p L_i K(P_p, Q_i)\}.$$

Daneben erlaubt die Kollokationslösung auch noch den Schätzfehler von $\delta \bar{g}$ zu ermitteln

$$m_{\delta \bar{g}_p}^2 = C_o - C_p^T (C + D)^{-1} C_p \quad (3-6)$$

und m^2 ... mittlerer quadratischer Fehler,

C_o ... Varianz von $\delta \bar{g}_p$.

Sämtliche Varianzen und Kovarianzen, welche in C , C_p und C_o vorkommen, können direkt von der Potential-Kovarianzfunktion K abgeleitet werden. Diese wiederum wird durch Analyse der statistischen Eigenschaften des Restschwerefeldes, repräsentiert durch die Restschwerefelddaten, erhalten.

Somit bietet die Kollokationslösung die Möglichkeit der Verarbeitung aller vorhandenen Schwerefelddaten (sie ist damit nicht datenselektiv wie die anderen hier behandelten Methoden), die optimale Filterung von Meßfehlern, die Fortsetzung nach unten, die direkte Schätzung von $\delta\bar{g}$ und die Schätzung des Fehlers von $\delta\bar{g}$ in konsistenter Weise und in kompakter Form. Sie liefert überdies die auf Grund der vorliegenden Daten bestmögliche Schätzung und ist somit allen anderen Methoden überlegen. Der dafür zu zahlende Preis ist allerdings recht hoch: die Schätzung erfordert die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit vollbesetzter Koeffizientenmatrix und einer Dimension, welche gleich der Anzahl der verwendeten Daten ist. Da allerdings das Restschwerefeld und damit $\delta\bar{g}$ zum überwiegenden Teil von den lokalen und durch das verwendete DDM nicht aufgelösten Dichtestörungen beeinflusst wird, genügt es, sich für die Kollokationslösung auf einen kleinen lokalen Datensatz zu beschränken.

3.4 Arbeitsablauf, erste Ergebnisse

Im folgenden soll der sequentielle Ablauf all jener Schritte skizziert werden, welche unter bestmöglicher Ausnützung aller vorhandenen Daten (DHM, DDM, optimiertes VM-Modell, Erdschwerefelddaten) schließlich zu einem möglichst hypothesenfreien, hochpräzisen Wert der mittleren Schwere entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Erdoberfläche, \bar{g} , und damit zur orthometrischen Höhe führen.

1. Reduktion aller Oberflächen — Schwerefelddaten wegen Referenzfeld und wegen des Einflusses der topographischen Massen, repräsentiert durch das vorgegebene DDM in Verbindung mit dem DHM; für alle Reduktionen ist ein und dasselbe DDM (DHM) zu verwenden. Wegen der regelmäßigen Struktur des DDM (DHM) bieten sich zur Berechnung dieser Einflüsse Spektralmethoden (schnelle Fourier-Transformation) in Verbindung mit einer geeigneten Interpolation an („remove 1“).

2. Schätzung der Parameter (Ausgleichstiefe, Glättungsfaktor) eines optimalen isostatischen Modells nach Vening/Meinesz, so daß das topographisch-isostatisch reduzierte Restfeld möglichst schwach ist; integraler Bestandteil dieses Iterationsprozesses ist die Reduzierung der aus (1) erhaltenen Restdaten zufolge der isostatischen Kompensationsmassen. Auch hier bieten sich wie in (1) Spektralmethoden an. Das Ergebnis nach diesem Schritt sind optimal topographisch-isostatisch reduzierte Restschwerefelddaten („remove 2“).

3. Kollokationslösung — Verarbeitung dieser Restschwerefelddaten zu Mittelwerten der Restschwereanomalie $\delta\bar{g}$ und eventuell Fehlerschätzung.

4. Berechnung des Einflusses der topographischen und isostatischen Massen auf die Schwere entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Erdoberfläche und geeignete Mittelwertbildung; auch hier bieten sich wie in (1) Spektralmethoden an. Berechnung des Einflusses des Referenzfeldes (analytisch, trivial) („restore 1,2“).

5. Addition der Ergebnisse aus (3) und (4) liefert \bar{g} ; orthometrische Höhe = geopotentielle Kote \bar{g} .

Als Alternative zur indirekten Bestimmung des Einflusses des Restschwerefeldes auf die orthometrische Höhe über den „Umweg“ \bar{g} bietet sich die Beziehung zwischen orthometrischer Höhe H , Normalhöhe H^* , Geoidhöhe N und Höhenanomalie ζ an (HM, 1967, S. 327),

$$H + N = H^* + \zeta . \quad (3-7)$$

Auf der Grundlage des zuvor beschriebenen DDM und des $20'' \times 20''$ -DHM, welches für die Geoidbestimmung für Österreich 1983 Verwendung fand, wurde bisher der Einfluß der im

DDM repräsentierten Dichtestörungen auf die orthometrischen Höhen für das gesamte Bundesgebiet flächenhaft bestimmt, wobei nach wie vor ein AH-Modell mit einer Ausgleichstiefe von 30 km zugrunde gelegt wurde (Fig. 5). Das Ergebnis der Berechnungen, welche an unserem Institut von M. Hanafy durchgeführt wurden, zeigte, daß dieser Einfluß zwischen -3 mm und $+5$ mm liegt und daher in Anbetracht der unvermeidbaren Nivellementfehler praktisch vernachlässigbar ist. Damit fand eine Entscheidung der ÖKIE, für die Berechnung des Mittelwertes der Schwere ein DDM mit konstanter Dichte zu verwenden, nachträglich eine Rechtfertigung.

In Anbetracht der Tatsache, daß die Dichtestörungen in Österreich Absolutbeträge bis zu $0,7 \text{ g/cm}^3$ erreichen (SO-Steiermark), mag dieses Ergebnis zunächst verwundern. Wegen der Annahme vollständiger isostatischer Kompensation wird jedoch der überwiegende Teil des Einflusses der topographischen Dichtestörung durch den Einfluß der isostatischen Kompensationsmassen regional wettgemacht, sodaß eigentlich nur lokale Dichtestörungen für o. g. Einfluß auf \bar{g} und damit die orthometrischen Höhen verantwortlich sind (Fig. 4, 5).

Ergebnis der derzeit laufenden Erdschwerefeldbestimmung für Österreich soll zwar in erster Linie das Geoid bzw. das Feld der Höhenanomalien sowie das Schwere-Vektorfeld an der Erdoberfläche sein; daneben aber wird sicher auch das Feld der Schweremittelwerte entlang der Lotlinie zwischen Geoid und Erdoberfläche berechnet werden, welches benötigt wird, um geopotentielle Knoten in orthometrische Höhen überzuführen. Durch den Einsatz dieser gekonnt aufeinander abgestimmten leistungsfähigsten Verfahren und die konsistente Verarbeitung aller uns zur Verfügung stehenden Daten ist eine Genauigkeit der Geoidhöhe wie Höhenanomalie im Bereich weniger Zentimeter, der beiden Lotabweichungskomponenten von etwa $\pm 0.8''$, und der Schwere sowie des Schweremittelwertes entlang der Lotlinie von wenigen Milligal durchaus in den Bereich der Möglichkeit gerückt. Mit Abschluß der Erdschwerefeldbestimmung Anfang 1987 wird die Geodäsie in Österreich einmal mehr ein weithin sichtbares Zeichen gesetzt haben, das anderen Nationen in Zukunft zur Orientierung dienen wird.

Literatur

Grasegger, J. und M. Wotruba (1983): Geoidbestimmung, Berechnungen an der TU Graz, 1. Teil; In: Das Geoid in Österreich. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band III, Graz, S. 117–124.

Heiskanen, W. und H. Moritz (1967): Physical Geodesy, Freeman, San Francisco.

Mader, K. (1954): Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft 15.

Moritz, H. (1980): Advanced Physical Geodesy. Wichmann, Karlsruhe.

Niethammer, T. (1932): Nivellement und Schwere als Mittel zur Berechnung wahrer Meereshöhen. Schweizerische Geodätische Kommission.

Sünkel, H. (1980): A general surface representation module designed for geodesy. Report No. 292, Dept. of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Sünkel, H. (1983): Geoidbestimmung, Berechnungen an der TU Graz, 2. Teil; In: Das Geoid in Österreich. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band III, Graz, S. 125–143.

Sünkel, H. (1986): An Isostatic Earth Model. Report No. 367, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

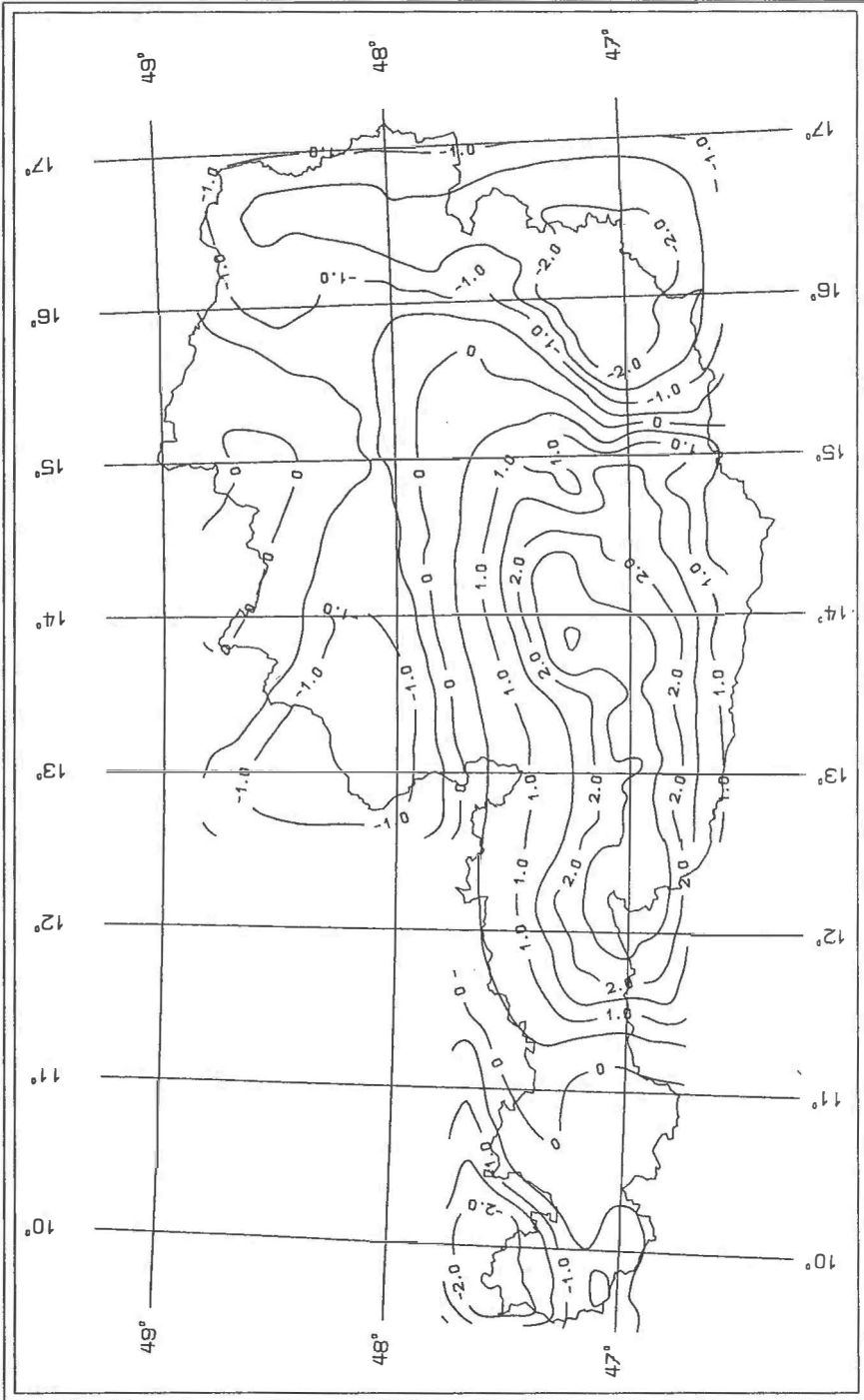


Fig. 1. Störpotential zufolge topographischer Dichtestörung und deren isostatischer Kompensation (m^2/s^2)

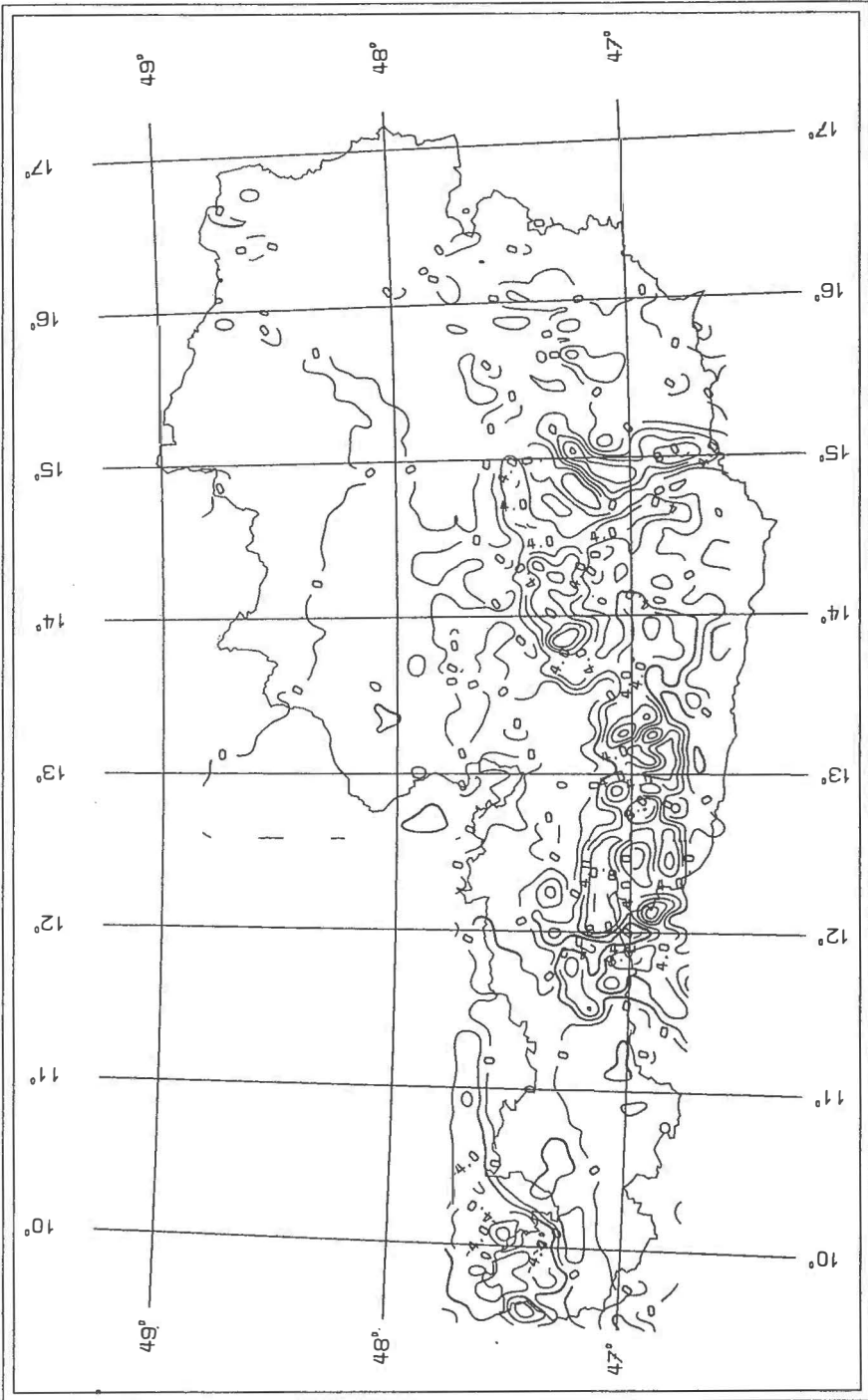


Fig. 2. Schwerestörung zufolge topographischer Dichtestörung und deren isostatischer Kompensation (mgal)

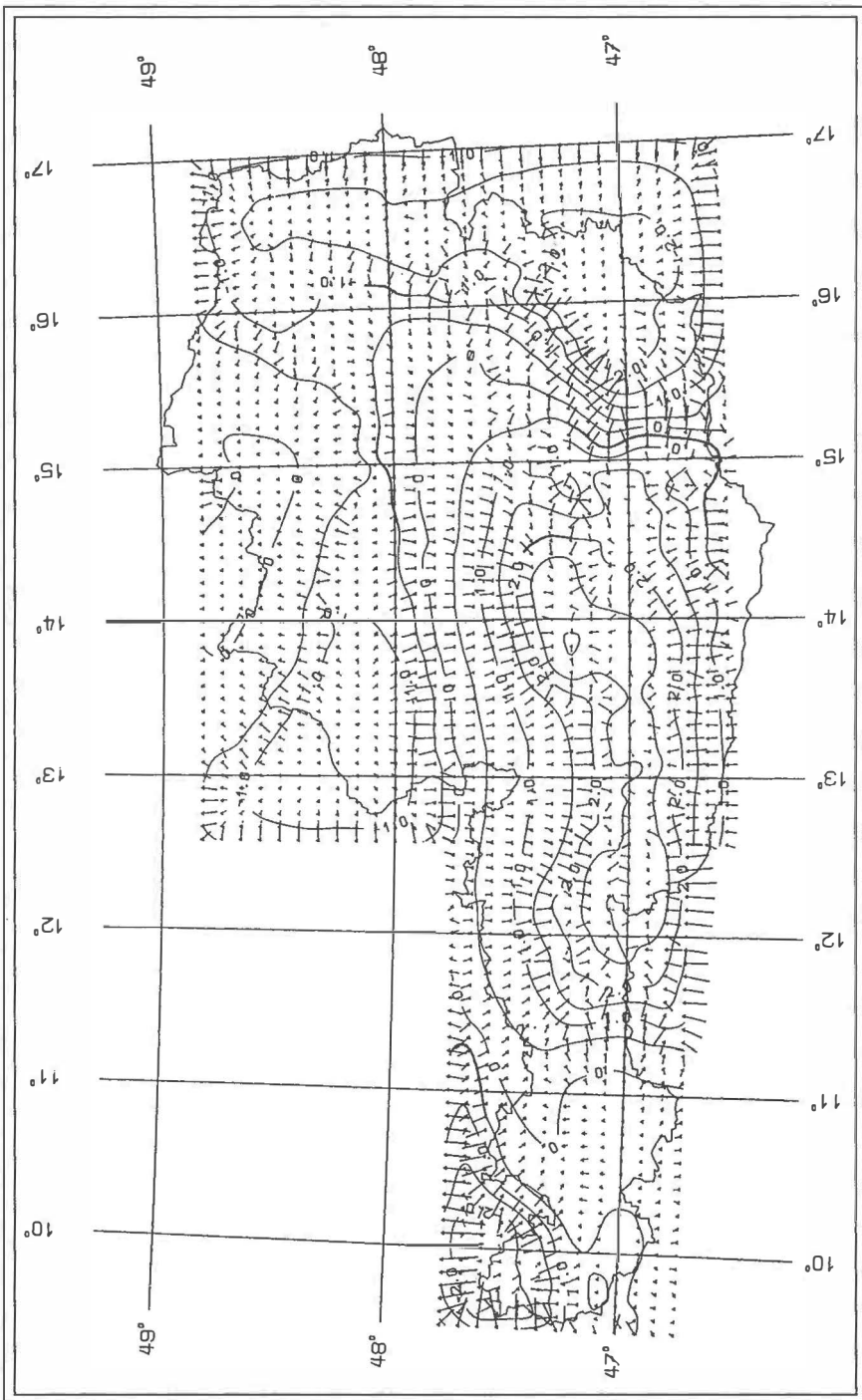


Fig. 3. Lotabweichung zufolge topographischer Dichtestörung und deren isostatischer Kompensation (— . . . 1 Bogensek.)

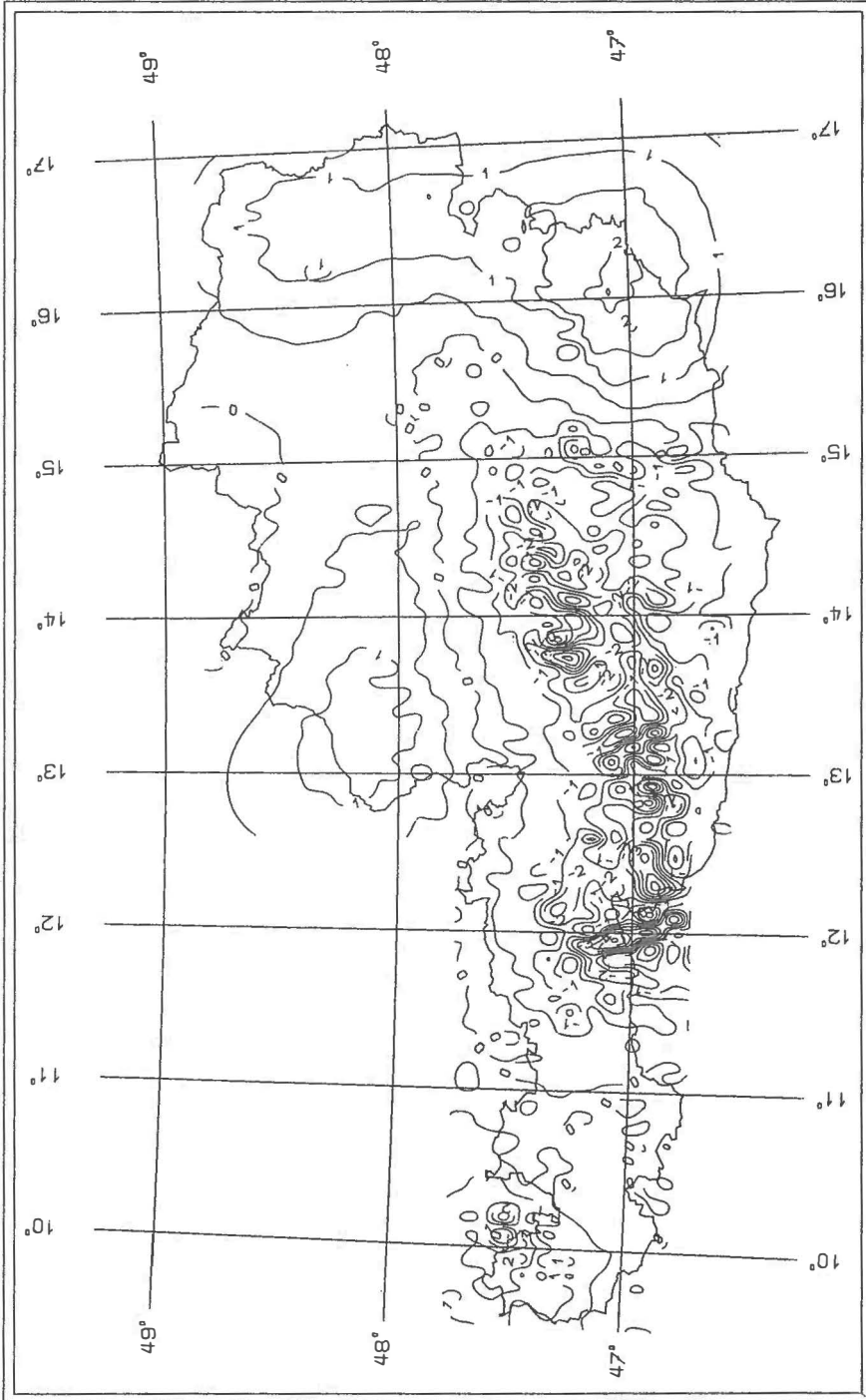


Fig. 4. Schweremittelwertanteil zwischen Geoid und Erdoberfläche zufolge topographischer Dichtestörung und deren isostatischer Kompensation (mgal)

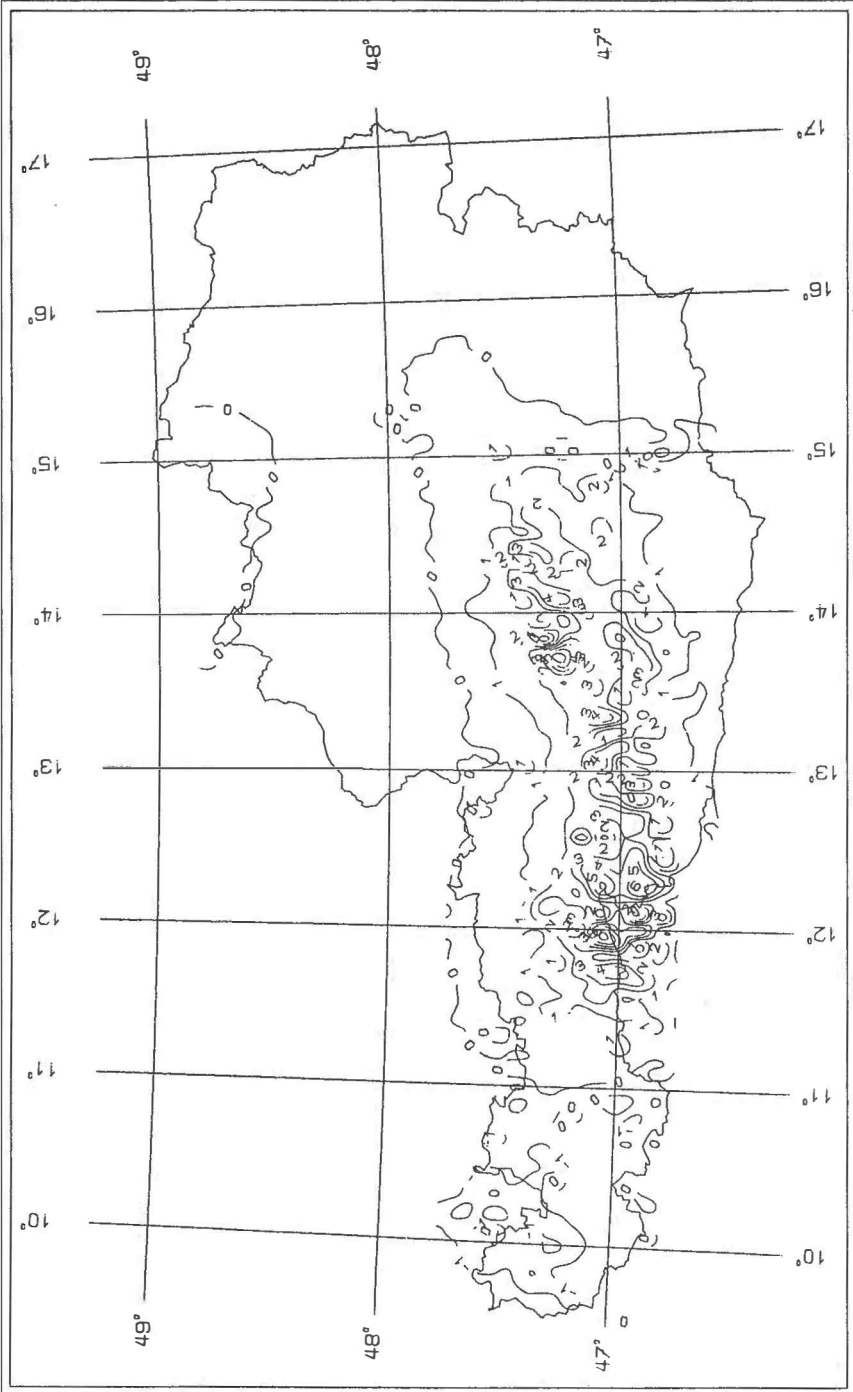


Fig. 5. Einfluß der topographischen Dichtestörung und deren isostatischer Kompensation auf die orthometrische Höhe (mm)