

Paper-ID: VGI_198606



Bedeutung der Varianzkomponentenschätzung für die geodätische Praxis

Albert Grimm-Pitzinger ¹, Klaus Hanke ²

¹ Universität Innsbruck, Institut für Geodäsie, Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck

² Universität Innsbruck, Institut für Geodäsie, Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **74** (2), S. 101–112

1986

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Grimm-Pitzinger_VGI_198606,  
  Title = {Bedeutung der Varianzkomponentenschätzung für die geodätische Praxis},  
  Author = {Grimm-Pitzinger, Albert and Hanke, Klaus},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {101--112},  
  Number = {2},  
  Year = {1986},  
  Volume = {74}  
}
```



Bedeutung der Varianzkomponentenschätzung für die geodätische Praxis

Von A. Grimm-Pitzinger und K. Hanke, Innsbruck

Summary

Estimating variance components is an effective method of improving the stochastic model. As an example the adjustment of both the directions and the distances in a geodetic 2D-network is shown. The presented procedure results in an optimal utilization of data by means of unbiased estimation of variances and unknown parameters.

1. Einleitung und Problemstellung

Die klassische Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate stellt aus statistischer Sicht ein Verfahren zur Schätzung von Parametern (Unbekannten, Verbesserungen, etc.) aus vorgegebenen Beobachtungsdaten dar. Voraussetzung für eine erwartungstreue Schätzung ist die a-priori-Kennntnis der Genauigkeitsverhältnisse der eingeführten Messungen.

In der Praxis sind diese häufig Erfahrungswerte oder entstammen Vorausgleichungen von Datenteilen (z. B. Satzausgleichungen). Sie ergeben jedoch fast immer zu optimistische Werte, da nicht alle einfließenden Fehlerursachen erfaßt sind und sie meist nicht den Charakter „äußerer Genauigkeiten“ besitzen.

Bei homogenen (gleichartigen) Beobachtungen wird in der klassischen Ausgleichsrechnung a posteriori die Varianz der Gewichtseinheit geschätzt. Erwartungstreue Schätzungen werden dann erhalten, wenn diese Varianz die Genauigkeit aller Messungen repräsentiert.

Diese Forderung wird bei homogenen und von Ausreißern bereinigten Meßdaten durch Schätzung der Gewichtseinheitsvarianz meist ausreichend erfüllt.

Schwierigkeiten entstehen in der Praxis bei der Gewichtung der Beobachtungen oft dann, wenn es sich dabei um heterogene Meßdaten, also Messungen verschiedenen Ursprungs oder unterschiedlicher Art handelt.

Einige Beispiele für solche Problemstellungen sind:

- kombinierte Richtungs- und Streckennetze [5], [8] (Richtungen, Strecken, evtl. Azimute)
- 3D-Netze (Richtungen, Raumstrecken, Zenitdistanzen, Lotabweichungen, gemessene Höhenunterschiede, u. ä.)
- Distanzmessung auf Eichstrecken [4] (konstanter und streckenabhängiger Anteil der Gewichte)
- photogrammetrische Blockausgleichung mit Selbstkalibrierung (Gewichtung der zusätzlich eingeführten „Beobachtungen“) [2]

Die Bestimmung der Varianzen der Beobachtungsgruppen aus getrennten Ausgleichungen ist an die Voraussetzung der Bestimmbarkeit der Unbekannten in diesen Modellen gebunden und berücksichtigt überdies nicht die gegenseitige Beeinflussung der Messungen in einer gemeinsamen Schätzung.

Soll der Informationsgehalt geodätischer Messungen wirklich voll ausgeschöpft werden, bietet sich die a-posteriori-Schätzung von Varianzkomponenten der einzelnen Beobachtungsgruppen an. Dadurch wird eine Anpassung an ein gemeinsames Varianzniveau aller Messungen und eine erwartungstreue Schätzung von Unbekannten auch aus heterogenen Meßdaten möglich.

Die Voraussetzungen für die Schätzung dieser Varianzkomponenten sind:

- Kenntnis der Varianzverhältnisse innerhalb der Beobachtungsgruppen,

- die Redundanzanteile der Beobachtungen im gemeinsamen Ausgleichsmodell sollen ausreichend groß sein,
- die Koeffizientenmatrix muß die verschiedenen Beobachtungsgruppen gut miteinander verknüpfen, um die gewünschte gegenseitige Beeinflussung zu gewährleisten,
- die Messungen müssen der Normalverteilung genügen, sollen also insbesondere von groben und systematischen Fehlern bereits befreit sein. (Ausnahme: Verwendung der Varianzkomponentenschätzung zur Suche nach groben Fehlern [6]).

Nach dem selben Schema ist eine Schätzung von Kovarianzkomponenten möglich. In den meisten Fällen wird man jedoch annehmen können, daß die Beobachtungen verschiedener Gruppen nicht korreliert sind und auf die Schätzung von Kovarianzkomponenten verzichten. [9]

Bevor die Varianzkomponentenschätzung an Beispielen dargestellt wird, soll ihr mathematisch-statistischer Gehalt kurz zusammengefaßt werden.

2. Mathematische Grundlagen

Grundlage jeder Ausgleichung bildet ein aus einem funktionalen und einem stochastischen Anteil bestehendes lineares Modell.

Der funktionale Anteil

$$l + \varepsilon = A x \tag{1}$$

beschreibt die physikalisch-geometrischen Zusammenhänge zwischen dem (linearisierten) Beobachtungsvektor l und dem Unbekanntenvektor x mit Hilfe der Konfigurations- oder Koeffizientenmatrix A . Der Vektor ε beinhaltet die den Beobachtungen anhaftenden Fehler.

Der stochastische Anteil beschreibt die wahrscheinlichkeitstheoretischen Eigenschaften des Beobachtungsvektors l durch die Kovarianzmatrix K_{ll}

$$K_{ll} = E\{\varepsilon\varepsilon^T\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \dots & \dots & \rho_{1,n} \sigma_1 \sigma_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \rho_{n,1} \sigma_n \sigma_1 & \dots & \dots & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$\sigma_i \dots \dots \dots$ Standardabweichungen der Beobachtungen

$\rho_{i,k} = \frac{\sigma_{i,k}}{\sigma_i \sigma_k} \dots \dots \dots$ Korrelationskoeffizient zwischen L_i und L_k , $i \neq k$.

Weiters wird angenommen, daß die Beobachtungen normal verteilt sind:

$$E \{ \varepsilon \} = 0 \tag{3}$$

Die Kovarianzmatrix K_{ll} läßt sich in

$$K_{ll} = \sigma_o^2 Q_{ll} \tag{4}$$

zerlegen.

- σ_0^2 Varianz der Gewichtseinheit
- Q_{ii} Kofaktorenmatrix von I
- Q_{ii} wird vorgegeben, σ_0^2 ist vorerst unbekannt.

Wenn Q_{ii} positiv definit ist, existiert als Inverse die Gewichtsmatrix

$$P = Q_{ii}^{-1} \tag{5}$$

Eine wesentliche Vereinfachung tritt ein, wenn, in Unkenntnis ihrer tatsächlichen Größe, die Korrelationskoeffizienten und damit die Elemente außerhalb der Hauptdiagonale in K_{ii} bzw. Q_{ii} gleich 0 gesetzt werden. P wird dann zur Diagonalmatrix.

Die Verknüpfung von funktionalem und stochastischem Modell geschieht meist durch Homogenisierung der Verbesserungsgleichungen:

$$P^{1/2} v = P^{1/2} A x - P^{1/2} l \tag{5a}$$

Wird in (4)

$$\sigma_0 = 1$$

gesetzt, dann entspricht die Homogenisierung einer Division durch die Standardabweichung der Beobachtung.

Bei Vorliegen der beiden Modellkomponenten werden Schätzwerte für die Unbekannten, die Verbesserungen und auch für die Varianz der Gewichtseinheit durch

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \tag{6}$$

$$v = A \hat{x} - l \tag{7}$$

$$s_0^2 = \frac{v^T P v}{n - u} \tag{8}$$

ermittelt.

\hat{x} , v und s_0^2 sind nur dann erwartungstreue Schätzungen

$$E\{\hat{x}\} = \hat{x} \tag{9}$$

$$E\{v\} = \varepsilon \tag{10}$$

$$E\{s_0^2\} = \sigma_0^2 \tag{11}$$

von minimaler Varianz, wenn das stochastische Modell die tatsächlichen Genauigkeitsverhältnisse ausreichend genau beschreibt. Dies gelingt im allgemeinen innerhalb gleichartiger Messungen, nicht jedoch, wenn in einem Ausgleich verschieden geartete Beobachtungen gemeinsam verarbeitet werden. Faßt man die Beobachtungen zu m Gruppen gleicher Art zusammen, so geht das funktionale Modell (1) über in:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} x \tag{12}$$

Da man in der Praxis meist davon ausgehen kann, daß die Beobachtungsgruppen nicht korreliert sind, wird das stochastische Modell analog (12) zu

$$\underline{K}_{II} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \underline{K}_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{o1}^2 \underline{Q}_{11} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \sigma_{om}^2 \underline{Q}_{mm} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Das stochastische Modell entspricht, wenn das Varianzniveau der einzelnen Gruppen gleich hoch ist, d. h.:

$$\sigma_{o1}^2 = \sigma_{o2}^2 = \dots = \sigma_{om}^2 = \sigma_o^2 \quad (14)$$

Die Varianzkomponentenschätzung ermöglicht die Berechnung dieser gruppenweise gemeinsamen Faktoren (Varianzkomponenten)

$$\sigma_{oi}^2 \quad (i = 1 \dots m).$$

Die Idee, Varianzkomponenten zu schätzen, geht auf Helmert [7] zurück. Sie fand jedoch, wohl hauptsächlich wegen des großen Rechenaufwandes, keinen Eingang in die Praxis. Erst Anfang der siebziger Jahre wurde sie wieder aufgegriffen und für die geodätische Praxis aufbereitet. Von den verschiedenen seither entwickelten Schätzern seien im folgenden zwei angegeben, wovon der erste aus einem m-dimensionalen Gleichungssystem besteht (es werden homogenisierte Verbesserungsgleichungen vorausgesetzt) [8].

$$\bar{v}^T \bar{v}_i = s_{oi}^2 \text{spur} \{ \bar{A}_i \underline{Q}_{xx} \bar{A}_i^T - \underline{E} \} (\bar{A}_i \underline{Q}_{xx} \bar{A}_i^T - \underline{E})^T + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 s_{oj} \text{spur} \{ \bar{A}_j \underline{Q}_{xx} \bar{A}_j^T \bar{A}_i \underline{Q}_{xx} \bar{A}_i^T \} \quad (15)$$

Die Beobachtungsgruppen beeinflussen sich dabei gegenseitig, da jede Varianzkomponente auch von den Verbesserungen der anderen Gruppen bestimmt wird. Dies bedeutet einen prinzipiellen Unterschied zur getrennten Ausgleichung.

Die aus (15) errechneten Schätzer erfüllen folgende statistische Postulate (siehe [9]):

- sie haben minimale Varianz (BEST)
- sie sind invariant, z. B. gegenüber einer zulässigen Änderung der eingeführten Näherungswerte (INVARIANT)
- sie sind quadratisch (QUADRATIC), da sie, wie der Schätzer für die Varianz der Gewichtseinheit, auf quadratischen Formen der Verbesserungen beruhen.
- Sie sind erwartungstreu, das heißt, sie liefern unverzerrte Schätzungen (UNBIASED ESTIMATOR)

Man bezeichnet die Schätzer (15), diese statistischen Eigenschaften zusammenfassend, als BIQUE.

Die Schätzung gelangt nur iterativ zur Lösung. Dabei werden jeweils die a-posteriori-Schätzungen der Genauigkeiten der einzelnen Gruppen im nächsten Ausgleichsvorgang als a-priori-Werte angenommen. Als Konvergenzkriterium gilt

$$s_{oi}^2 = s_o^2 = 1 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (16)$$

Die Iteration wird abgebrochen, wenn (16) erfüllt ist bzw. wenn sich die Varianzkomponenten nicht mehr signifikant von 1 unterscheiden.

Die Schätzer sind anfangs σ -lokal, d. h. sie hängen von den a-priori-Werten ab, bei Konvergenz jedoch werden sie unabhängig von den Startwerten. Das Formelsystem (15) kann problemlos durch

$$\bar{v}_i^T \bar{v}_i = s_{oi}^2 \text{spur} \{ \underline{E}_i - \bar{A}_i \underline{Q}_{xx} \bar{A}_i^T \} \quad (17)$$

ersetzt werden. Die daraus errechneten Schätzer sind erst im Konvergenzfall erwartungstreu. (17) ist rechentechnisch leicht realisierbar, da der Klammerausdruck in modernen Netzausgleichsprogrammen bereits vorliegt [1]:

$$\text{spur} (E_i - \bar{A}_i Q_{xx} \bar{A}_i^T) = \text{spur} (P_i Q_{ww}^i) = \sum_{j=1}^{n_i} r_j \tag{18}$$

r_i stellt den Anteil am Freiheitsgrad (Redundanzanteil) der jeweiligen Beobachtung innerhalb des Gesamtausgleichs dar und die Summe dieser Anteile über die n_i Beobachtungen der i -ten Gruppe demnach den Anteil dieser Beobachtungsgruppe am Freiheitsgrad. Die Bedeutung der Redundanzanteile für die Kontrollierbarkeit (Zuverlässigkeit) der jeweiligen Messung soll hier nicht näher behandelt werden [5].

Ergänzend sei auf zwei Sonderfälle der Varianzkomponentenschätzung hingewiesen [3]:

- liegt nur eine Gruppe von Messungen vor, geht in (18) der Anteil am Freiheitsgrad in den Gesamtfreiheitsgrad des Modells und damit der Schätzer (17) in die Schätzung der Varianz für die Gewichtseinheit (8) über;
- besteht eine Gruppe nur aus einer Beobachtung, wird der Schätzer (17) unter Berücksichtigung von (18) zu

$$s_{oi}^2 = \frac{\bar{v}_i^T \bar{v}_i}{r_i} \tag{19}$$

Um zu prüfen, ob diese Beobachtung der gleichen Grundgesamtheit entspringt (Ausreißertest), wird das Varianzniveau dieser Beobachtung gegen das Varianzniveau der übrigen Messungen getestet [5].

Der Quotient

$$F_i = \frac{s_{oi}^2}{s_o^2} \tag{20}$$

wird mit dem Quantil der F-Verteilung mit den Freiheitsgraden 1 und $r-1$ einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit verglichen (t-Test). Übersteigt die Testgröße F_i den kritischen Wert, so wird die zugehörige Messung als grob fehlerhaft erkannt.

In beiden angeführten Sonderfällen wird keine Iteration durchgeführt. Im Falle der Schätzung der Gewichtseinheitsvarianz ist die Konvergenzbedingung (16) nach dem ersten Schritt erfüllt, im zweiten Fall wird eben dieser Unterschied des Varianzniveaus als Testgröße verwendet, weshalb eine Angleichung durch Iteration sinnlos ist.

3. Ein Beispiel aus der Praxis

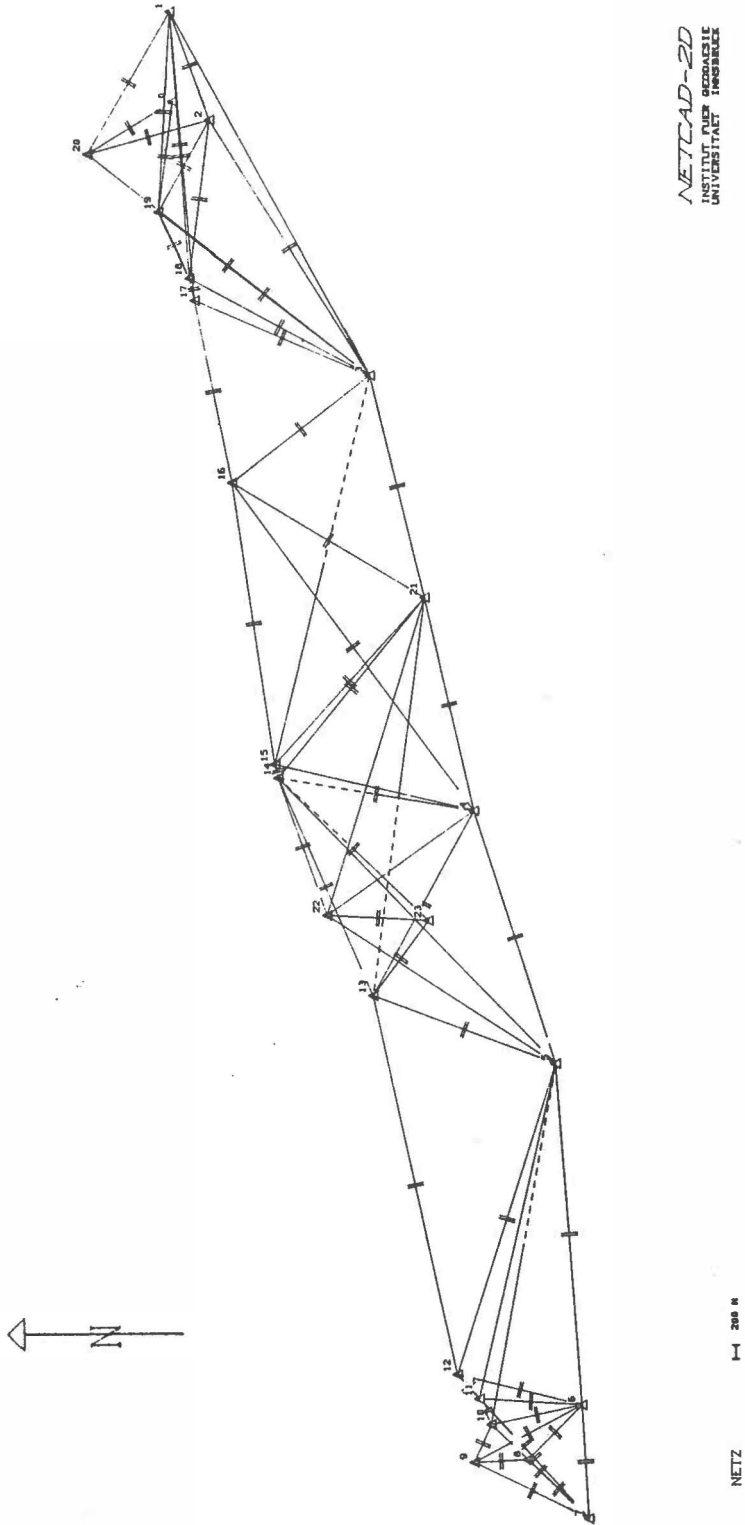
Ein häufiges Problem in der Ingenieurgeodäsie ist die Bestimmung der Gewichtsrelation zwischen Richtungs- und Streckenbeobachtungen bei der Ausgleichung von Lagenetzen. Am Beispiel des oberirdischen Teils des Stollenabsteckungsnetzes Strassen – Amlach (Drautal) soll die Anwendung der Varianzkomponenten-Schätzung veranschaulicht werden. Abbildung 1 zeigt das hochredundante Netz (121 Richtungen, 54 Strecken, 24 Orientierungsunbekannte, 48 Koordinatenunbekannte, 3 Datumparameter, Gesamtfreiheitsgrad 106).

Als Schätzung auf Grund von Erfahrungswerten und Firmenangaben wurden a priori in eine freie Netzausgleichung eingeführt:

$$s_R = 3^{\text{cc}}, \quad s_s = 5 \text{ mm } (1 + 1/\text{km})$$

Die a posteriori berechneten Varianzkomponenten zeigen, daß das verwendete stochastische Modell (Gewichtung) das Genauigkeitsverhältnis der beiden Beobachtungsgruppen ungenügend widerspiegelt. Die in der Folge durchgeführte Iteration wird in Tabelle 1 dargestellt.

STOLLENNETZ· DRAUTAL



NETCAD-2D
INSTITUT FÜR GEODÄSIE
UNIVERSITÄT TRIESTE

Abbildung 1

NETZ 1:1 200 M

Iteration	S_R (cc)	S_S^* (mm)	S_{OR}^2	S_{OS}^2	$S_{OR}^2 : S_{OS}^2$	S_O^2	S_K^\wedge (mm)
1	3,0	5,0	2,86	0,66	4,35	2,07	18,9
2	5,1	4,0	1,06	0,44	2,44	0,86	14,9
3	5,2	2,6	1,04	0,66	1,59	0,96	13,2
4	5,3	2,1	1,04	0,81	1,28	0,98	12,2
5	5,4	1,9	1,02	0,88	1,15	1,00	11,7

Tabelle 1

Es bedeuten:

- S_R, S_S A-priori-Genauigkeiten der Beobachtungen für den i-ten Iterationsschritt
- S_{OR}^2, S_{OS}^2 Varianzkomponenten
- S_O^2 Gewichtseinheitsvarianz
- S_K durchschnittliche Standardabweichung einer Koordinate

$$s_s = s_s^* (1 + 1/km)$$

Die Gewichtseinheitsvarianz ergibt sich als gewichtetes Mittel der Varianzkomponenten mit den entsprechenden Redundanzanteilen als Gewichte.

Die a-priori-Genauigkeiten der Beobachtungen für den (i+1)-ten Iterationsschritt berechnen sich aus

$$S_R^{2(i+1)} = S_R^{2(i)} \cdot S_{OR}^{2(i)}$$

$$S_S^{2(i+1)} = S_S^{2(i)} \cdot S_{OS}^{2(i)}$$

Abbildung 2 veranschaulicht das Konvergenzverhalten der Iteration. Diese kann abgebrochen werden, wenn sich die Varianzniveaus nicht mehr signifikant unterscheiden.

Die durchschnittliche Standardabweichung einer Koordinate durch die Gewichtsiteration sinkt auf 62% des ursprünglichen Wertes.

Das Ergebnis der Iteration ist unabhängig von den Startwerten. Auch ein stark verzerrtes Genauigkeitsverhältnis der Ausgangswerte führt zum selben Konvergenzziel (vergleiche Tabelle 2).

Daß eine falsche Gewichtung auch zu optimistische Ergebnisse liefern kann, sei in Tabelle 3 veranschaulicht. Hier wurde das Gewichtsverhältnis zugunsten der Strecken, die einen höheren Beitrag zur Genauigkeit leisten, verfälscht.

Das Meßsystem: Geodimeter[®] 136 + Geodat 126



Entscheidungskriterien für ein Meßsystem:

Eine Totalstation mit Spitzenleistungen ...

- Die Teilkreisorientierung bleibt mit Sicherheit immer erhalten.
- Automatische Kompensation aller Instrumentenfehler, einschließlich Kippachsenfehler.
- Vollelektronischer Stehachsenkompensator, 2-achsig.
- Datenausgang im feststehenden Unterbau.
- Datenübertragung zum Feldbuch Geodat 126 und umgekehrt.
- Horizontalwinkel-Schnellauf für zeitsparende Winkel-Einstellung.
- Integriertes Soll-minus-Ist-Absteckprogramm.
- Höhenberechnungs-Programm ROE.
- 0,4 sek.-Tracking mit Speichermöglichkeit der Werte, also für Aufnahme und Absteckung.
- Ein integriertes Meßsystem, das auf alle Zwangszentrierungen paßt.
- Mit zeitsparenden Absteckhilfen: Unicom und Tracklight.
- 12 Volt-Batterie-Betriebsspannung, daher direkter Anschluß an die Autobatterie möglich.

... und ein Feldbuch mit Computerleistungen.

- Berechnungs- und Speicherprogramme stehen gleichzeitig zur Verfügung (Im Geodat 126 z. Zt. 9 Rechen- und 20 Speicherprogramme).
- Kein versehentliches Löschen der Programme möglich.
- Frei programmierbar über die Tastatur.
- Zugriff auf sämtliche bereits bestehenden Programme über die Geo-Language.
- Alle Programme auch manuell einsetzbar.
- Geodat 126 ist als Nivellements-Feldbuch geeignet.
- Übersichtliche, zeitsparende, einzeilige, alphanumerische Benutzerführung im Dialog.
- Projektweise Abspeicherung der Daten möglich (z.B. nach Geschäftsbuchnummern).
- Getrennter Meßdaten- bzw. Koordinatenspeicher, der vom Anwender flexibel gestaltet werden kann.
- Versehentliches Löschen der Meßdaten unmöglich.
- 2.000 Stunden garantierte Datensicherheit.
- Einfaches Einfügen, Verändern und Suchen im Speicher.
- Gleichzeitige Speicherung von 9 Protokollen und 9 Formaten möglich.
- Definition der eigenen Benutzerführung.
- Handliche, ergonomische Form und Größe.
- Übersichtliche, leicht zu bedienende Tastatur.
- Frei programmierbare V.24 (RS232C)-Schnittstelle für Zweiweg-Datenübertragung.
- Serielle-HP-IL-Schnittstelle.
- Übertragungsprogramme zu fast allen Rechnern im Preis enthalten.

**Weltweit
bewährte
Vermessungstechnik aus Schweden.**



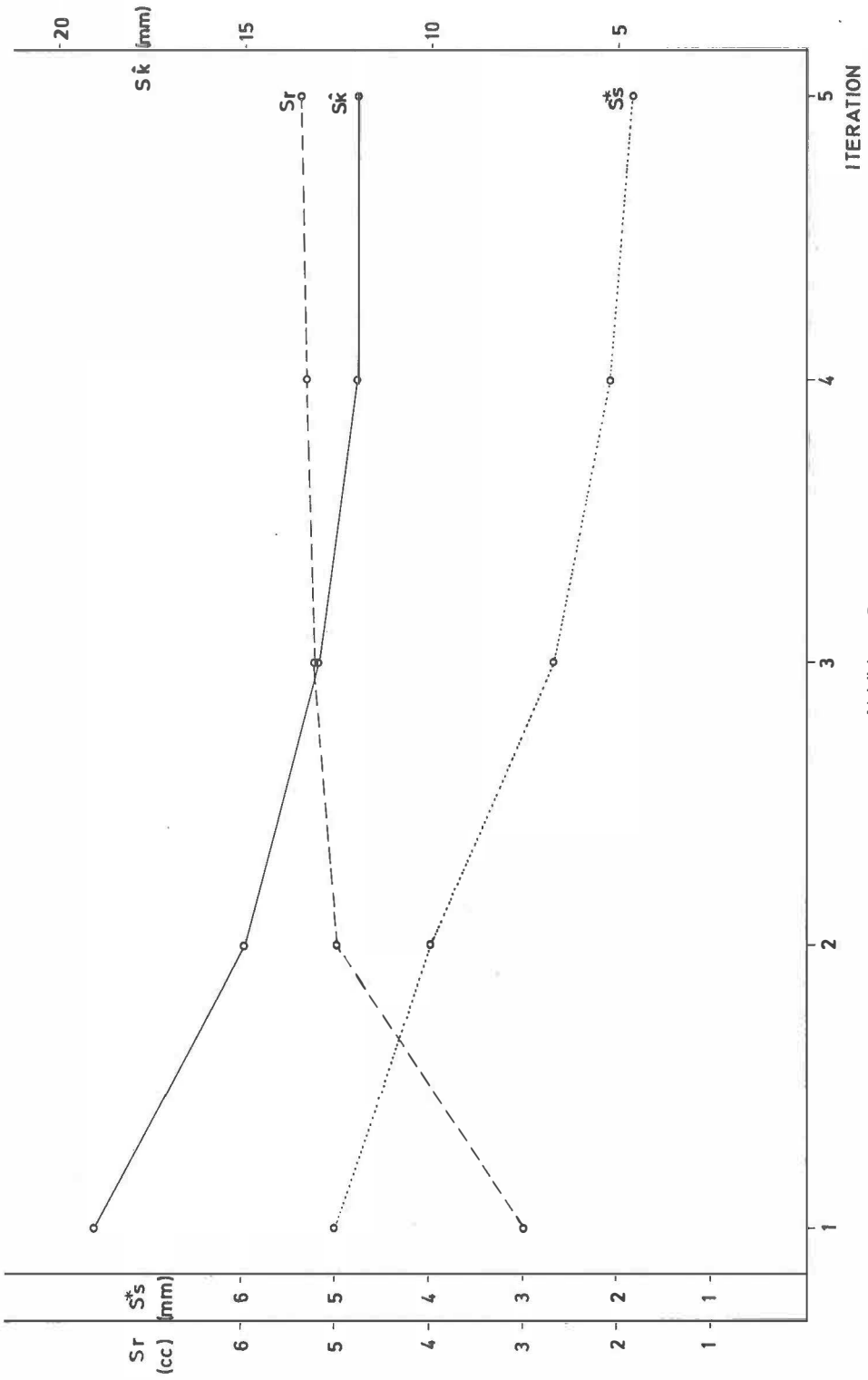


Abbildung 2

Iteration	S_R (cc)	S_S^* (mm)	S_{OR}^2	S_{OS}^2	$S_{OR}^2 : S_{OS}^2$	S_O^2	S_K^A (mm)
1	1,0	10,0	27,35	0,69	39,71	14,75	54,9
2	5,2	8,3	0,94	0,22	4,26	0,69	18,5
3	5,1	3,9	1,06	0,45	2,37	0,88	14,8
4	5,2	2,6	1,04	0,67	1,57	0,96	13,1
5	5,3	2,1	1,04	0,81	1,27	0,98	12,2
6	5,4	1,9	1,02	0,88	1,15	1,00	11,7

Tabelle 2

S_R (cc)	S_S^* (mm)	S_{OR}^2	S_{OS}^2	$S_{OR}^2 : S_{OS}^2$	S_O^2	S_K^A (mm)
5,4	1,0	1,20	1,86	0,65	1,30	8,6

Tabelle 3

4. Zusammenfassung

Mit der Methode der Varianzkomponentenschätzung steht dem Praktiker ein bisher zu Unrecht wenig genütztes Instrument zur Verfügung. Ihre Anwendung wird an Beispielen der Gewichtsabstimmung zwischen Richtungen und Strecken in einem kombinierten Netzausgleich gezeigt. Erst durch die Schätzung von Varianzkomponenten wird gewährleistet, daß die hohe Genauigkeit der Messungen zu entsprechenden Ergebnissen führt.

Dank

Die in dieser Arbeit verwendeten Meßdaten wurden den Autoren freundlicherweise von der Vermessungsabteilung der Tiroler Wasserkraftwerke (TIWAG) zur Verfügung gestellt.

Literatur

- [1] *Bill, R.*: Die Leistungsfähigkeit moderner Programme zur Ausgleichung ebener geodätischer Netze. ZfV Nr. 11/1985, S. 483–495.
- [2] *Ebner, H.*: A-posteriori-Gewichtsschätzung bei der verallgemeinerten kleinste Quadrate Ausgleichung. Geowissenschaftliche Mitteilungen der TU Wien, Heft 13, S. 73–84, 1978.
- [3] *Förstner, W.*: Konvergenzbeschleunigung bei der a-posteriori-Varianzschätzung. ZfV Nr. 4/1979, S. 149–156.
- [4] *Fröhlich, H.*: Varianzkomponentenschätzung für elektrooptische Distanzmessung auf Eichlinien. AVN Nr. 10/1982, S. 411–417.
- [5] *Grimm-Pitzinger, A. und Hanke, K.*: Parameterschätzung in Lagenetzen mit dem Programmsystem NETCAD-2D. Universität Innsbruck, Mitteilungen des Institutes für Geodäsie, Nr. 10/1985.
- [6] *Gruss, J.*: A-posteriori-Gewichtsbestimmung zur Fehlersuche. AVN Nr. 10/1982, S. 405–411.
- [7] *Helmert, F.*: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Teubner Verlag, Leipzig – Berlin, 1907.
- [8] *Welsch, W.*: A-posteriori-Varianzschätzung im erweiterten Ausgleichsmodell nach der Methode der kleinsten Quadrate. In: Pelzer (Herausgeber): „Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung“. Wittwer Verlag, Stuttgart, 1980.
- [9] *Welsch, W.*: Grundlagen, Gebrauchformeln und Anwendungsbeispiele zur Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten. Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik Nr. 9/1984, S. 296–301.

Manuskript eingelangt im Feber 1986.

Flächen- und Liniencomputer

neuartiges Modell zur Verwendung als:

neu



● gleichzeit. Messung von Fläche und Linienlänge

● Zusatzberechnungen zur Messung

● Vorwahl von Maßstäben

Aufladbare Batterie, kein Kabel nötig

X-PLAN 360

PLANIMETER, KURVIMETER, MESS-SYSTEM (Digitizer und Rechner). Möglichkeit des Nachfahrens auch nicht geradliniger Polygone und des Messens gekrümmter Konturen sowie sehr kleiner Flächen.

● punktweises Digitalisieren

● Funktionen für: Mittelwertbildung, Summierung von Werten, Zählen

Anfragen bei:



A-1161 WIEN · MÄRZSTR. 7 · TEL. 92 32 31