Paper-ID: VGI_198614

Das Höhenproblem der Geodäsie

Kurt Bretterbauer [1]

[1] *Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **74** (4), S. 205–215

1986

BibTeX:

```
@ARTICLE{Bretterbauer_VGI_198614,
Title = {Das H{\"o}henproblem der Geod{\"a}sie},
Author = {Bretterbauer, Kurt},
Journal = {{\"O}sterreichische Zeitschrift f{\"u}r Vermessungswesen und
   Photogrammetrie},
Pages = {205--215},
Number = {4},
Year = {1986},
Volume = {74}
}
```

Das Höhenproblem der Geodäsie

Von *K. Bretterbauer,* Wien

Abstract

The forthcoming introduction of a new height system in Austria is the motive for elaborating once more the height problem of geodesy in detail. The aim is to provide the practical man of surveying with a complete background of related problems in order to help him with sound arguments in discussions with users of heights from other disciplines, e. g. geography, hydrography or constructions.

1. Vorbemerkung

Die bevorstehende Änderung des österreichischen staatlichen Höhensystems gibt Anlaß, das Höhenproblem der Geodäsie den praktisch tätigen Vermessungsfachleuten nochmals in aller Breite in Erinnerung zu rufen. Die folgenden Ausführungen sind auch als Argumentationshilfe in eventuellen Diskussionen mit Nutzern von Höhen aus anderen Fachrichtungen gedacht, also mit Geographen, Hydrologen, Baufachleuten u. a.

Der Begriff „Höhe" läßt mehrere Deutungen zu, und nicht einmal unter Theoretikern herrscht Übereinstimmung, welche Höhe die beste ist. Die damit zusammenhängenden Fragen sind für Flachländer wie Holland mehr von akademischem Interesse, für unser Gebirgsland aber haben sie Auswirkungen auf die Praxis. Das Problem erscheint fachfremden Personen trivial, meint doch jedermann zu wissen, was Höhe ist. In den meisten Fällen aber, in denen von Höhe gesprochen wird, sind Höhendifferenzen gemeint: Die Höhe einer Kirchturmspitze über dem Straßenniveau, einer Baumkrone über dem natürlichen Boden. Man könnte durchaus die Frage stellen, warum nicht der tiefstgelegene Punkt eines Landes zum Nullpunkt seines Höhensystems erklärt wird. Die Frage ist keineswegs unsinnig, denn genau das wurde für den Bereich der Stadt Wien durch Einführung des Wiener Horizonts gemacht. Zumindest die Bergsteiger und Flugzeugführer würden protestieren, denn für sie ist neben der Höhe des Berges über der Talsohle bzw. der Höhe des Flugzeugs über Grund auch die „absolute Höhe" notwendig, hängen doch davon so lebenswichtige Parameter wie Luftdruck und Temperatur ab. Auch der Nichtfachmann nennt diese absolute Höhe „Meereshöhe", weil er intuitiv geneigt ist, der (ruhend gedachten) Meeresoberfläche als tiefste Stelle der Erdoberfläche, in der er ohne Hilfsmittel verweilen kann, die Höhe Null zuzuordnen (tatsächlich gibt es mehrere Festlandstellen, die unter dem Meeresniveau liegen).

Wir leben in dem dreidimensionalen Raum unserer Anschauungswelt. Für die allermeisten technischen Anwendungen wird dieser Raum ausreichend genau durch die Euklidische Geometrie und die Newtonsche Mechanik beschrieben. Der Ort eines Punktes in diesem Raum wird durch Angabe dreier geometrischer Größen charakterisiert, die wir seine Koordinaten nennen. Das kann auf verschiedene Weise geschehen, prinzipiell aber ist dabei keine Koordinate vor den anderen ausgezeichnet. Und dennoch nehmen wir im täglichen Leben eine Trennung in Lage und Höhe vor. Denn um eine Masse einen Meter hoch zu heben, muß bedeutend mehr Kraft aufgewendet werden, als um sie einen Meter horizontal zu verschieben. Auch die klassische Geodäsie hat bis in die Gegenwart Lage und Höhe getrennt behandelt, und im praktischen Vermessungswesen muß dies auch weiterhin so sein. Der Grund für diese Trennung ist: Die Lage ist geometrisch definiert, die Höhe aber ist physikalischer Natur, nämlich ein der Potentialdifferenz proportionales Maß, von dem allein die Dynamik aller natürlichen und künstlichen Vorgänge auf der Erde, wie das Fließen von Wasser und das Rollen von Fahrzeugen, bestimmt wird.

Natürlich kann auch die Höhe geometrisch definiert werden. Die Landesvermessung beschreibt die Lage von Fixpunkten durch zwei Parameter (Länge und Breite) auf dem Referenzellipsoid und gewinnt diese durch Orthogonalprojektion der Oberflächenpunkte auf das Ellipsoid. Die systemkonforme dritte Koordinate ist der vertikale Abstand vom Ellipsoid, die ellipsoidische Höhe H. Der Vollständigkeit halber sei gesagt, daß auch die in der Praxis benützten Gauß-Krüger-Koordinaten ebenfalls ellipsoidische, sogenannte thermische, Parameter sind, die aber aufgrund ihrer besonderen Eigenschaften auch als ebene Koordinaten aufgefaßt werden können. Die gemeinsame und gleichwertige Bestimmung der drei geozentrischen kartesischen Raumkoordinaten (**X**, **Y**, **Z**) und daraus der ellipsoidischen Koordinaten (L, B, H) ist erst in jüngster Zeit unter sehr großem materiellen und intellektuellen Aufwand, nämlich mit Hilfe neuer Satellitensysteme (GPS) gelungen (*Rinner, Zeger, Hofmann-Wellenhof, Erker*, 1986).

Die vorhin erwähnte Höhenmaßzahl für dynamische Vorgänge ist offenbar entlang der ruhenden Oberfläche eines Sees konstant. Tatsächlich stellt diese Fläche eine Fläche gleichen Potentials, eine Niveaufläche dar. Die ellipsoidischen Höhen sind zur Beschreibung einer solchen Fläche, und damit für alle technischen Projekte, völlig ungeeignet, denn Flächen gleicher ellipsoidischer Höhe weichen von Niveauflächen global um durchschnittlich $\pm$ 30 m, im Extremfall um $\pm$ 100 m ab. Im Gebirge kann diese Abweichung auf nur 10 km Entfernung den Betrag von 1 m erreichen.

Es ist die Aufgabe einer Landesvermessung, ein Höhensystem festzulegen, das folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Punkthöhen sollen eindeutig und unabhängig vom Wege bestimmbar sein.
2. Die Höhen sollen möglichst frei von hypothetischen Annahmen sein.
3. Die Korrektionen der gemessenen Höhenunterschiede auf das angenommene Höhensystem sollen hinreichend klein sein, sodaß sie bei Bearbeitung von Nivellements niederer Ordnung vernachlässigt werden können.

2. Potential und Potentialdifferenz

In jedem Punkt des Schwerefeldes der Erde greift ein Kraftvektor an, der senkrecht auf die Niveaufläche durch diesen Punkt steht. In der Geodäsie arbeitet man aber nicht mit der Kraft, sondern mit der Beschleunigung **g** (genannt Schwerevektor), die diese Kraft der Einheitsmasse (1 kg) erteilt. Diesem Schwerevektor ist eine skalare Ortsfunktion W (x, y, z) derart zugeordnet, daß

$$\mathbf{g} = -\operatorname{grad} W, \quad \text{oder} \quad \mathbf{g} = -\frac{dW}{dh}. \tag{2.1}$$

h ist in Richtung der äußeren Normalen auf die Niveaufläche zu zählen, die durch W (x, y, z) = const definiert ist. Das negative Vorzeichen zeigt, daß g abnimmt, wenn h zunimmt. W (x, y, z) heißt die „Kräftefunktion" der Erde und stellt physikalisch ein Potential von der Dimension $|m^2s^{-2}|$ dar. Zwischen zwei Niveauflächen mit den konstanten Potentialen W_1 und W_2 herrscht die ebenfalls konstante Potentialdifferenz $(W_2 - W_1)$. Mit der Einheitsmasse 1 kg multipliziert, ist das die Arbeit, die man gegen die Schwerkraft verrichten muß, um die Einheitsmasse von der einen Niveaufläche in die andere zu heben. Diese Arbeit ist vom Wege unabhängig, was einsichtig ist, denn im gegensätzlichen Fall könnte man durch Transport einer Masse im Schwerefeld Arbeit gewinnen.

Der Betrag g des Schwerevektors kann heute mittels Gravimeter einfach und schnell mit hoher Genauigkeit gemessen werden (siehe dazu auch den Artikel von *N. Höggerl* in diesem Heft). In der Geodäsie wird die Schwere in der Einheit „Gal" = 1 cm . s^{-2} ausgedrückt. Diese Einheit ist keine Größe des Internationalen Maßsystems und darf nur innerhalb der Geodäsie verwendet werden. Die Schwere in unseren Breiten beträgt rund 980 Gal = 9,80 m . s^{-2}.

Zwei differentiell benachbarte Niveauflächen haben die Potentialdifferenz dW = const und den Abstand dh. Auf einer Niveaufläche ist die Schwere g infolge der Massenunregelmäßigkeiten variabel. Schreibt man (2.1) in der Form

$$dW = -g \,.\, dh = \text{const} \tag{2.2}$$

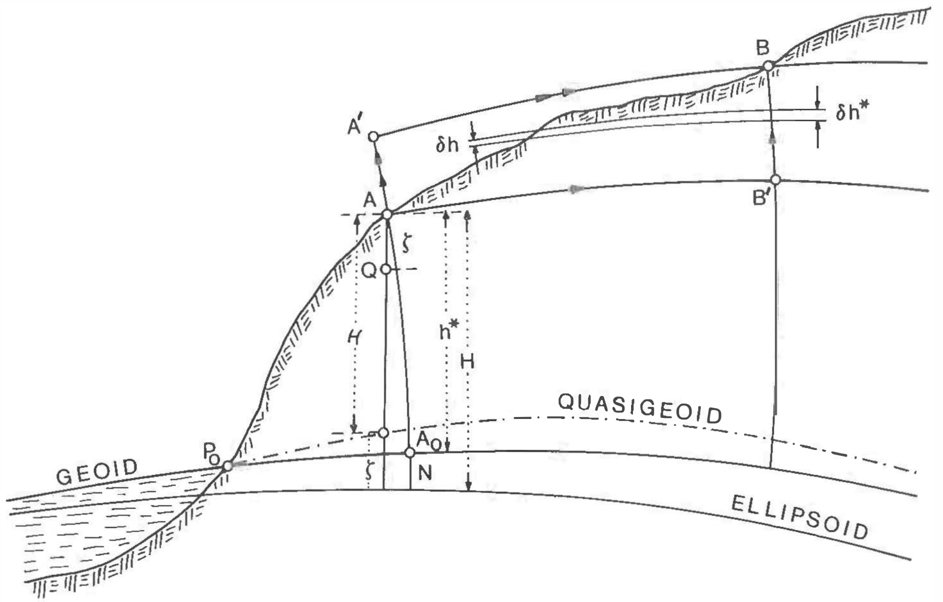
so sieht man, daß benachbarte Niveauflächen nicht parallel sind; wo g größer ist, rücken die Niveauflächen näher zusammen. In jedem Punkt herrscht ein und nur ein bestimmtes Potential, d. h. die Niveauflächen umschließen einander schalenförmig. Die natürlichen Lotlinien schneiden sie überall senkrecht und sind daher schwach gekrümmte Raumkurven.

Bezeichnet man mit δh den aus „Rückblick minus Vorblick" gebildeten Höhenunterschied zweier Lattenstandpunkte des geometrischen Nivellements, so ist

$$\sum_{A}^{B} \delta h$$

das reine Nivellementergebnis von A nach B. Dieses ist vom Wege abhängig, wie man leicht der Figur 1 entnimmt: Je nachdem ob man (gedanklich) von A über B' nach B, oder von A über A' nach B nivelliert, erhält man unterschiedliche Ergebnisse, da ja die Nivellements entlang der Niveauflächen AB' bzw. A'B jeweils null ergeben. Vom Wege unabhängig ist nur die Potentialdifferenz ($W_B - W_A$). Diese folgt aus dem Integral von (2.2), das in der Praxis durch eine Summe ersetzt wird:

$$W_B - W_A = -\int_{A}^{B} g \,.\, dh \simeq -\sum_{A}^{B} g \,.\, \delta h. \tag{2.3}$$



Figur 1

Diese Art von Nivellement könnte man „geopotentielles Nivellement" nennen. Es verbindet geometrisches Nivellement mit Schweremessungen. Zur notwendigen Genauigkeit der Schweremessung siehe *Höggerl*. Das erste Nivellement dieser Art wurde von dem Oberst des Militär-Geographischen Institutes *R. v. Sterneck* mit dem von ihm erdachten Pendelapparat in Südtirol ausgeführt.

Für den Aufbau eines Landeshöhennetzes werden die Potentialdifferenzen auf jene Niveaufläche bezogen, die in der mittleren Höhe der ruhend gedachten Weltmeere verläuft; sie trägt den Namen „Geoid“. Das Geoid läßt sich gedanklich unter den Kontinenten fortsetzen und eignet sich hervorragend als Bezugsfläche für Potential- und Höhendifferenzen. Leider ist es keine analytische Fläche, scheidet daher als Rechenfläche für Lagebeziehungen aus. Die auf das Geoid bezogene Potentialdifferenz erhielt durch den französischen Geodäten *P. Tardi* den Namen „geopotentielle Kote“ C. Somit gilt z. B. für den Punkt A in der Figur 1:

$$C_A = W_o - W_A = \int_o^A g \, . \, dh \simeq \sum_o^A g \, . \, \delta h. \tag{2.4}$$

Als Einheit der geopotentiellen Koten wurde 1kGal = 10 m^2s^{-2} gewählt, weil dann der Zahlenwert nur um rund 2% von der zugehörigen Meereshöhe abweicht.

Die Bestimmung von C erfordert also den Anschluß an einen Meerespegel. Beim noch bestehenden alten Höhensystem war das der Mareograph am Molo Sartorio in Triest. Das neue System bezieht sich auf das Mittelwasser der Nordsee, repräsentiert durch den Amsterdamer Pegel NAP (Normaal Amsterdam Peil). Der Anschluß an ihn ist im Zuge der Messung des Einheitlichen Europäischen Nivellementnetzes REUN (Réseau Européen Unifié de Nivellement) erfolgt *(Höggerl)*. Mit Mittelwasser ist gemeint, daß die Wirkungen von Wind, Wellen, Temperatur, vor allem aber der Gezeiten eliminiert sind. Da die Gezeiten zu zwei Drittel vom Mond, zu einem Drittel von der Sonne verursacht werden, müssen die Registrierungen der Mareographen über 18,6 Jahre gemittelt werden, d. i. die Periode eines Umlaufs des Mondknotens. Der NAP ist als das Mittel der Beobachtungen der Periode 1940—1958 definiert. Streng genommen ist die Niveaufläche W_o durch das Mittelwasser nur eine Annäherung an das Geoid. Durch weiträumige, nahezu konstante meteorologische und ozeanographische Effekte bedingt, ist die mittlere ruhende Meeresoberfläche keine Niveaufläche, sondern kann über einen Ozean hinweg um 1—3 m von einer solchen abweichen, wie durch die Satellitenaltimetrie nachgewiesen wurde.

In einer geschlossenen Nivellementschleife gilt:

$$\oint g \, . \, dh \simeq \sum_A^A g \, . \, \delta h = 0. \tag{2.5}$$

Deshalb sind die geopotentiellen Koten jene Größen, in denen die Bearbeitung und Ausgleichung von Nivellementnetzen erfolgt *(Höggerl)*. Um jedoch Aufschluß über das reine Nivellementergebnis über eine Schleife und damit über die Meßfehler zu erhalten, ersetzt man in (2.5) die Schwere durch die Identität $g \equiv g_A + (g - g_A)$ und erhält den „theoretischen Schleifenschluß“ ε:

$$\varepsilon = \sum_A^A \delta h = - \sum_A^A \frac{g - g_A}{g_A} \, . \, \delta h \neq 0. \tag{2.6}$$

3. Dynamische Höhen

Die geopotentiellen Koten haben die Dimension $|m^2s^{-2}|$, das praktische Vermessungswesen jedoch verlangt Höhen in Metern. Man kann C sofort in eine metrische Höhe verwandeln, indem man durch einen an sich beliebigen Schwerewert dividiert. Man nimmt dazu meist den theoretischen Schwerewert am Niveauellipsoid in 45° Breite γ_{45}. Nach der Schwereformel des Geodätischen Referenzsystems 1980 (*Moritz,* 1984) kann dieser Wert aus folgender Formel berechnet werden:

$$\gamma = 9{,}780\,326\,772 \, . \, (1 + 0{,}005\,279\,041 \, . \, \sin^2 \phi + \\ + 0{,}000\,023\,272 \, . \, \sin^4 \phi + \ldots) \, m \, . \, s^{-2}. \tag{3.1}$$

Daraus erhält man: $\gamma_{45} = 9{,}806\,199\,203 \, m \, . \, s^{-2} \simeq 0{,}980\,62$ kGal. (3.2)

Die dynamische Höhe des Punktes A z. B. ist dann:

$$h_A = C_A/\gamma_{45}, \tag{3.3}$$

und der dynamische Höhenunterschied zweier Punkte:

$$h_B - h_A = \frac{W_A - W_B}{\gamma_{45}} \simeq \frac{1}{\gamma_{45}} \sum_A^B g \,.\, \delta h. \tag{3.4}$$

Um für die Praxis ein reines Nivellementergebnis in eine dynamische Höhendifferenz umrechnen zu können, zerlegt man (3.4) in:

$$h_B - h_A = \sum_A^B \delta h + \sum_A^B \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \,.\, \delta h. \tag{3.5}$$

Das Zusatzglied zum reinen Nivellementergebnis heißt „dynamische Korrektion". Die dynamischen Höhen weisen große Vorzüge auf: Sie sind theoretisch einwandfrei und können vollkommen hypothesenfrei mit hoher Genauigkeit bestimmt werden. Sie erfüllen mithin die Bedingungen 1) und 2). Für *Heitz* (1986) kommen deshalb ausschließlich dynamische Höhen für ein Landeshöhensystem in Frage. Bedingung 3) allerdings ist nicht erfüllt, die dynamische Korrektion kann unangenehm groß werden. Außerdem haben dynamische Höhen keine geometrische Bedeutung, obwohl sie von der Dimension | m | sind; sie können daher auch nicht in Beziehung zu ellipsoidischen Höhen gebracht werden. Die verantwortlichen Fachleute in Österreich haben sich deshalb entschlossen, die dynamischen Höhen nicht zu den offiziellen Höhen des staatlichen Systems zu erklären. Wegen ihrer großen Bedeutung für hydrologische Projekte (zwischen Punkten gleicher dynamischer Höhe kann kein Wasser fließen!) wird die Höhendatenbank aber auch dynamische Höhen enthalten.

4. Orthometrische Höhen

Die zwanglose Deutung des Begriffes „Höhe" ist der vertikale Abstand von einer Bezugsfläche. Ist diese das Geoid, so hat man echte Meereshöhen gewonnen. In Strenge versteht man darunter die Länge der schwach gekrümmten Lotlinien A_oA bzw. B_oB in der Figur 1. Der Einfluß der Krümmung kann vernachlässigt werden. Diese Höhen heißen „orthometrische Höhen" und sind die offiziellen Höhen des neuen österreichischen Systems. Man erhält sie, indem man entlang der Lotlinie vom Geoid zum Oberflächenpunkt ein geopotentielles Nivellement mißt. Probleme ergeben sich aus der Tatsache, daß man in der Erdkruste nicht messen kann. Im folgenden werden die in der Erdkruste zu messenden Größen mit einem Stern versehen (siehe Figur 1). Völlig analog zu (2.4) gilt:

$$C_A = W_o - W_A = \int_{A_o}^{A} g^* dh^* = h_A^* \,.\, \underbrace{\frac{1}{h_A^*} \int_{A_o}^{A} g^* dh^*}_{\overline{g}_A^*}, \text{ und damit } C_A = \overline{g}_A^* h_A^*, \text{ oder: } h_A^* = \frac{C_A}{\overline{g}_A^*}. \tag{4.1}$$

$\overline{g}^*$ stellt den integralen Mittelwert der Schwere in der Lotlinie dar. Über seine Bestimmung hat *Sünkel* (1986) ausführlich in dieser Zeitschrift berichtet.

Da die Bestimmung von C_A unabhängig vom Wege ist, wird sie entlang der Erdoberfläche ausgeführt. (4.1) stimmt formal mit (3.3), der Formel zur Gewinnung dynamischer Höhen, überein.

Auch die orthometrischen Höhen haben Vor- und Nachteile. Bedingung 1) ist erfüllt, Bedingung 3) wesentlich besser erfüllt als durch die dynamischen Höhen, Bedingung 2) ist nicht erfüllt. Die Berechnung des Mittelwertes der Schwere in der Lotlinie ist nur mit hypothetischen Annahmen über den Dichteverlauf in der Erdkruste möglich. Die orthometrischen Höhen können also nie exakt berechnet werden, auch wenn einmal ein räumliches Dichtemodell für Österreich vorliegen sollte. Ein weiterer Mangel ist, daß Punkte mit gleicher orthometrischer Höhe nicht auf einer Niveaufläche liegen, zwischen ihnen also Wasser fließen kann! Außerdem ist die Berechnung der orthometrischen Höhen sehr aufwendig und in wirtschaftlich vertretbarer Weise überhaupt erst durch das digitale Geländemodell und mittels EDV möglich geworden. Diese Mängel haben *Molodenskij* (siehe *Vaniček, Krakiwsky,* 1986) veranlaßt, 1954 seine „Normalhöhen" einzuführen.

Diese Nachteile der orthometrischen Höhen werden jedoch durch die Vorteile aufgewogen. Die orthometrischen Höhen als die Abstände vom Geoid sind geometrisch eindeutig und der korrekte Übergang auf ellipsoidische Höhen ist möglich. Sie stellen auch einen wichtigen Beitrag zur Erforschung der geometrischen Struktur des inneren Schwerefeldes der Erde dar. Mag sein, daß das, wie *Heitz* betont, primär nicht Aufgabe einer Landesvermessung ist. Mit den modernen Methoden ist für die Zwecke der Landesvermessung das Geoid tatsächlich entbehrlich geworden.

Es bleibt noch zu zeigen, wie aus einem reinen Nivellementergebnis $\Sigma\delta h$ die Differenz der orthometrischen Höhen folgt. Zunächst bildet man die Identität

$$h_B^* - h_A^* = (h_B - h_A) + (h_B^* - h_B) - (h_A^* - h_A). \tag{4.2}$$

In der ersten Klammer steht die Differenz der dynamischen Höhen nach (3.5). In der zweiten und dritten Klammer steht jeweils die Differenz von orthometrischer und dynamischer Höhe desselben Punktes. Die orthometrischen Höhen als Längen der Lotlinien können zweifellos in der Form ausgedrückt werden:

$$h_A^* = \sum_{A_0}^{A} \delta h^*, \quad h_B^* = \sum_{B_0}^{B} \delta h^*. \tag{4.3}$$

Andererseits kann man auch entlang der Lotlinien eine dynamische Höhe messen, indem man (3.5) auf die Wege A_0A bzw. B_0B anwendet:

$$h_A = \sum_{A_0}^{A} \delta h^* + \sum_{A_0}^{A} \frac{g^* - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \,.\, \delta h^*, \quad h_B = \sum_{B_0}^{B} \delta h^* + \sum_{B_0}^{B} \frac{g^* - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \,.\, \delta h^*. \tag{4.4}$$

(3.5), (4.3) und (4.4) in (4.2) eingesetzt, gibt:

$$h_B^* - h_A^* = \sum_{A}^{B} \delta h + \sum_{A}^{B} \frac{g - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \,.\, \delta h + \sum_{A_0}^{A} \frac{g^* - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \,.\, \delta h^* - \sum_{B_0}^{B} \frac{g^* - \gamma_{45}}{\gamma_{45}} \,.\, \delta h^*. \tag{4.5}$$

Faßt man die drei letzten Summen der Gleichung (4.5) unter „orthometrische Korrektion" OK zusammen, so hat man eine Formel zur Überführung eines reinen Nivellementergebnisses in eine Differenz von orthometrischen Höhen, oder zur Übertragung der orthometrischen Höhe von A nach B gewonnen:

$$h_B^* = h_A^* + \sum_{A}^{B} \delta h + OK. \tag{4.6}$$

Diese von *Ledersteger* (1969) entdeckte Beziehung ist deshalb so bemerkenswert, weil die OK als Summe dreier dynamischer Korrektionen erscheint: Jener entlang der Lotlinie von A_0 nach A, entlang der Erdoberfläche von A nach B und schließlich wieder entlang der Lotlinie von B nach B_0.

Die topographischen Verhältnisse in Gebirgstälern können zu starken Änderungen der orthometrischen Korrektion von Punkt zu Punkt führen. Da der Praktiker im allgemeinen weder Schweremessungen noch Berechnungen der OK durchführt, kann sein reines Nivellementergebnis merklich von der Differenz orthometrischer Höhen von Nivellementfixpunkten abweichen. Der bekannten Studie von *Mader* (1954) über die Tauernschleife entnimmt man z. B. eine Änderung der OK im Gasteinertal zwischen Patschgen und Streitberg von 8 mm pro km Horizontalentfernung, zwischen Streitberg und Hofgastein von 3 mm/km und zwischen Hofgastein und Dorfgastein von immerhin 2 mm/km.

5. Normalhöhen nach Molodenskij

Im Zusammenhang mit einer umfassenden Theorie des Schwerefeldes der Erde hat *Molodenskij* (1960) ein Höhensystem vorgeschlagen, das endlich alle drei Bedingungen für ein Landeshöhennetz erfüllt, vor allem die Hypothesenfreiheit. Er geht dabei von einem Erdellipsoid aus, das mit einem künstlichen Potential U ausgestattet ist. Das Ellipsoid ist Niveaufläche (Niveauellipsoid) dieses theoretischen Feldes, und sein Potentialwert ist gleich dem des Geoides, also $U_0 = W_0 = \text{const.}$ Nach *Molodenskij* wird nun in der Ellipsoidnormalen eines Oberflächenpunktes (z. B. A) ein Punkt Q derart gesucht, daß seine Potentialdifferenz zu U_0 im theoretischen Feld gleich ist der Potentialdifferenz des Oberflächenpunktes zu W_0 im realen Feld. Mit (2.4) gilt also:

$$U_0 - U_Q = W_0 - W_A = \int_0^A g \,.\, dh = C_A. \qquad (6.1)$$

Die Normalhöhe *H* ist definiert durch

$$H_A = \frac{C_A}{\bar{\gamma}_Q}. \qquad (6.2)$$

$\bar{\gamma}$ ist ein Mittelwert der theoretischen Schwere zwischen Q_0 und Q und wäre in Strenge wieder aus einem Integral zu bestimmen. Es genügt aber, als Mittelwert den Schwerewert in der Höhe *H*/2 zu nehmen. Dieser errechnet sich also aus:

$$\gamma_Q = \gamma_{Q_0} - \frac{d\gamma}{dH} \cdot \frac{H}{2}. \qquad (6.3)$$

Darin ist $\frac{d\gamma}{dH}$ der theoretische Schweregradient (*Vanicek, Krakiwsky,* 1986):

$$\frac{d\gamma}{dH} = -\,0{,}30875 \,.\, (1 - 0{,}001415 \,.\, \sin^2\phi) \,|\, \text{mGal/m} \,|. \qquad (6.4)$$

Somit läßt sich $\bar{\gamma}_Q$ streng, wenn auch nur iterativ berechnen. Da C_A durch geopotentielles Nivellement gemessen werden kann, ist die Normalhöhe hypothesenfrei bestimmbar.

Sucht man in derselben Weise für viele Oberflächenpunkte ihre zugehörigen Punkte Q, so bildet die Gesamtheit dieser Punkte eine Fläche, die *Hirvonen* das „Telluroid" genannt hat. Den Abstand zwischen Telluroid und Erdoberfläche hat *Molodenskij* als „Höhenanomalie ζ" bezeichnet. Man beachte: Die Normalhöhen folgen aus der Potentialdifferenz zwischen Niveauellipsoid und Telluroid im theoretischen Feld in derselben Weise, wie die orthometrischen Höhen aus der Potentialdifferenz zwischen Geoid und Oberflächenpunkt im realen Feld.

Es ist allerdings nicht sehr befriedigend, die Höhe eines Punktes durch eine Länge zu charakterisieren, die nicht in diesem Punkt endet. *Molodenskij* hat deshalb die Normalhöhen von den Oberflächenpunkten weg nach unten abgetragen und erhält eine neue Fläche nahe dem Geoid, das „Quasigeoid". Damit wird das Quasigeoid zur Bezugsfläche für die Normalhöhen, so wie das Geoid für die orthometrischen Höhen. Die Höhenanomalien sind nun die Abstände des Quasigeoides vom Ellipsoid (siehe Figur 1). Es ist festzuhalten, daß weder Telluroid noch Quasigeoid Niveauflächen sind!

Nur erwähnt werden sollen zwei weitere Höhensysteme, die noch manchmal in der Literatur genannt werden, die *Vignal*-Höhen und die „sphäroidischen Höhen". *Vignal*-Höhen unterscheiden sich von Normalhöhen nur insofern, als anstelle von (6.4) ein konstanter Vertikalgradient

$$\frac{d\gamma}{dh} = -\,0{,}3086 \text{ mGal/m}$$

benützt wird. In unseren Breiten stimmen sie völlig mit den Normalhöhen überein.

Sphäroidische Höhen hat man benützt, als Schweremessungen noch langwierig und kompliziert waren. Man hat deshalb anstelle von gemessenen Schwerewerten berechnete Werte eingeführt. Der Name besagt auch, daß diese Schwerewerte aus einer sphäroidischen Schwereformel stammen. Wegen der leichten Meßbarkeit von Schwerewerten sind sphäroidische Höhen heute überholt. Sie werden nur genannt, weil die österreichischen Gebrauchshöhen noch teilweise sphäroidisch bestimmt waren.

7. Ellipsoidhöhen

Wie schon eingangs erläutert, ist die dritte system-immanente Koordinate der Landesvermessung die Ellipsoidhöhe H. Der Figur 1 entnimmt man die einfache Beziehung (unter Vernachlässigung der schwachen Krümmung der Lotlinie):

$$\mathrm{H} = h^* + N = H + \zeta. \tag{7.1}$$

N, die „Geoidundulation“, mißt die Abstände des Geoides vom Ellipsoid. Die Werte können absolute sein, wenn sie sich auf das GRS 80 (Geodetic Reference System 1980) beziehen, oder relative, wenn sie auf dem Bezugsellipsoid der Landesvermessung (*Bessel*-Ellipsoid) basieren. Beide Werte werden Mitte 1987 für ganz Österreich vorliegen. Teillösungen wurden schon 1983 gegeben (*Sünkel,* 1983, *Erker,* 1984). Geoidundulationen können auf verschiedenem Wege bestimmt werden. Direkt aus Schwerefeldanalysen oder indirekt aus geozentrischen Koordinatenbestimmungen über Satelliten (*Rinner, Zeger, Hofmann-Wellenhof, Erker,* 1986). Aus den geozentrischen Koordinaten bzw. Koordinatendifferenzen sind Ellipsoidhöhen (-differenzen) berechenbar. Mit der orthometrischen Höhe folgt aus (7.1) unmittelbar die Undulation N. Es ist denkbar, daß künftig bei Vorliegen einer detaillierten, noch genaueren Karte der Geoidundulationen Differenzen von orthometrischen Höhen auch ohne langwieriges Nivellement bestimmt werden könnten, nämlich mittels der neuen Satellitenverfahren (GPS).

Gleichung (7.1) zeigt auch die enge Verknüpfung der klassischen Betrachtungsweise des Schwerefeldes und der modernen Sicht nach *Molodenskij*.

Mit der Kenntnis der Geoidundulationen (und der damit verbundenen Lotabweichungen) und der Ellipsoidhöhen sind erstmals alle Voraussetzungen für die korrekte Reduktion aller geodätischen Messungen auf die Rechenfläche gegeben.

8. Ausblick

Zur Ergänzung der theoretischen Ausführungen durch ein anschauliches Beispiel werden für einige ausgewählte Knotenpunkte des Nivellements 1. Ordnung aus der Liste von *Höggerl* (dieses Heft) die verschiedenen Höhen ausgewiesen (Tabelle 1). Die Berechnungen erfolgten nach den im Text angegebenen Formeln. Die Geoidundulationen (soweit in der Teillösung vorhanden) wurden der Karte von *Erker* (1984) entnommen.

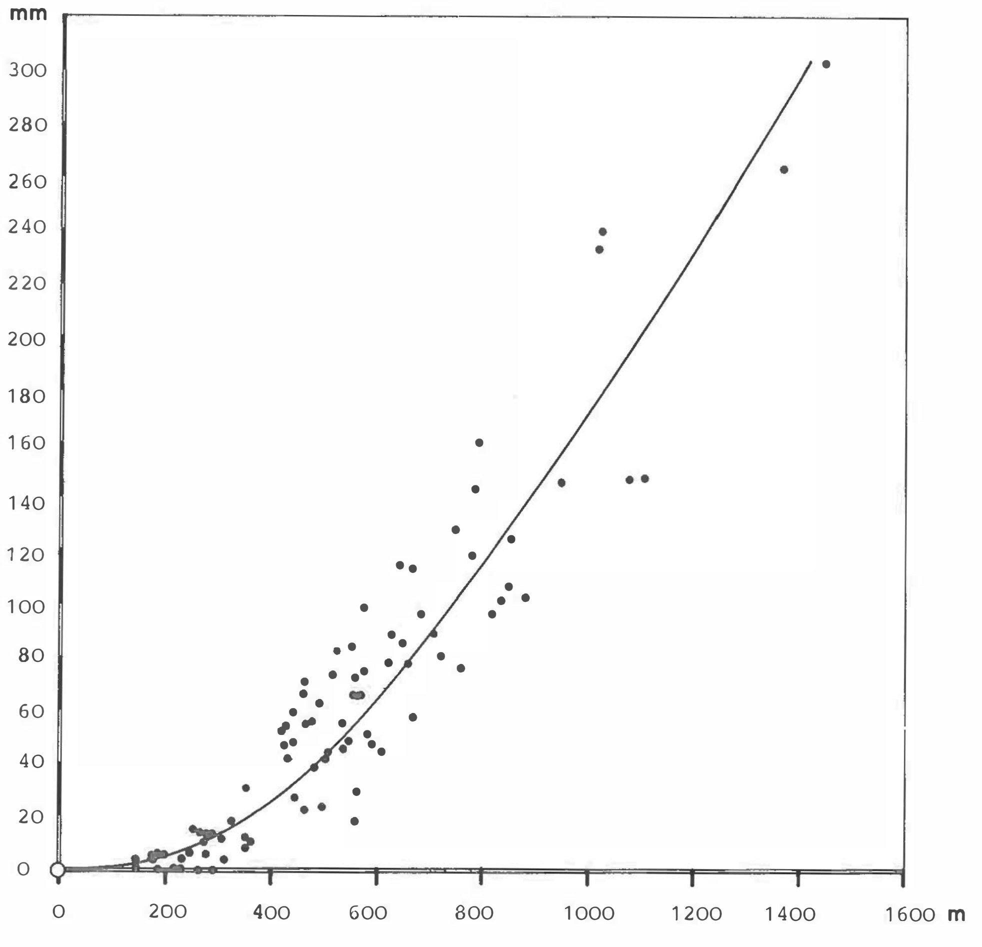
Von besonderem Interesse für Theoretiker sind die Differenzen „orthometrische Höhe minus Normalhöhe“. Nach (7.1) gilt:

$$h^* - H = \zeta - N, \tag{8.1}$$

somit stellen diese Differenzen den Abstand des Quasigeoides vom Geoid dar. Wie es sein muß, sind diese Differenzen überall (auf dem Festland) positiv, und zwar umso größer, je höher das Gelände. Um diesen Zusammenhang zu demonstrieren, wurde die Differenz (ζ—N) für alle 88 Knoten der Liste von *Höggerl* berechnet und in der Figur 2 graphisch dargestellt. Die Punkte scheinen auf einer parabelähnlichen Kurve zu liegen, die durch den Ursprung geht, denn die Differenz (ζ—N) muß per definitionem im Meeresniveau (C = 0) verschwinden. Diese Höhen-

Knoten Nr.	geop. Kote C | kGal.m |	dynam. Höhe h | m |	orthom. Höhe h* | m |	Normal-Höhe *H* | m |	(ζ−N) | m |	Geoid-undul. N | m |	Ellips. Höhe H | m |
101	300,7459	306,690	306,603	306,601	+ 0,002	+ 1,34	307,94
104	140,0704	142,839	142,801	142,800	+ 0,001	+ 0,60	143,40
115	694,0876	707,805	707,810	707,721	+ 0,089	+ 1,18	708,99
139	1003,1353	1022,960	1023,183	1022,941	+ 0,242	−	−
140	450,5607	459,465	459,471	459,404	+ 0,067	−	−
217	1090,1256	1111,670	1111,797	1111,645	+ 0,152	+ 2,35	1114,15
229	836,0175	852,540	852,564	852,458	+ 0,106	−	−
515	1342,3104	1368,838	1369,145	1368,880	+ 0,265	−	−
516	1420,8730	1448,954	1449,340	1449,037	+ 0,303	−	−

Tab. 1: Demonstration verschiedener Höhen an ausgewählten Knoten der Liste von *Höggerl* (dieses Heft) mit Darstellung des Abstandes Quasigeoid−Geoid durch die Differenz (ζ−N).



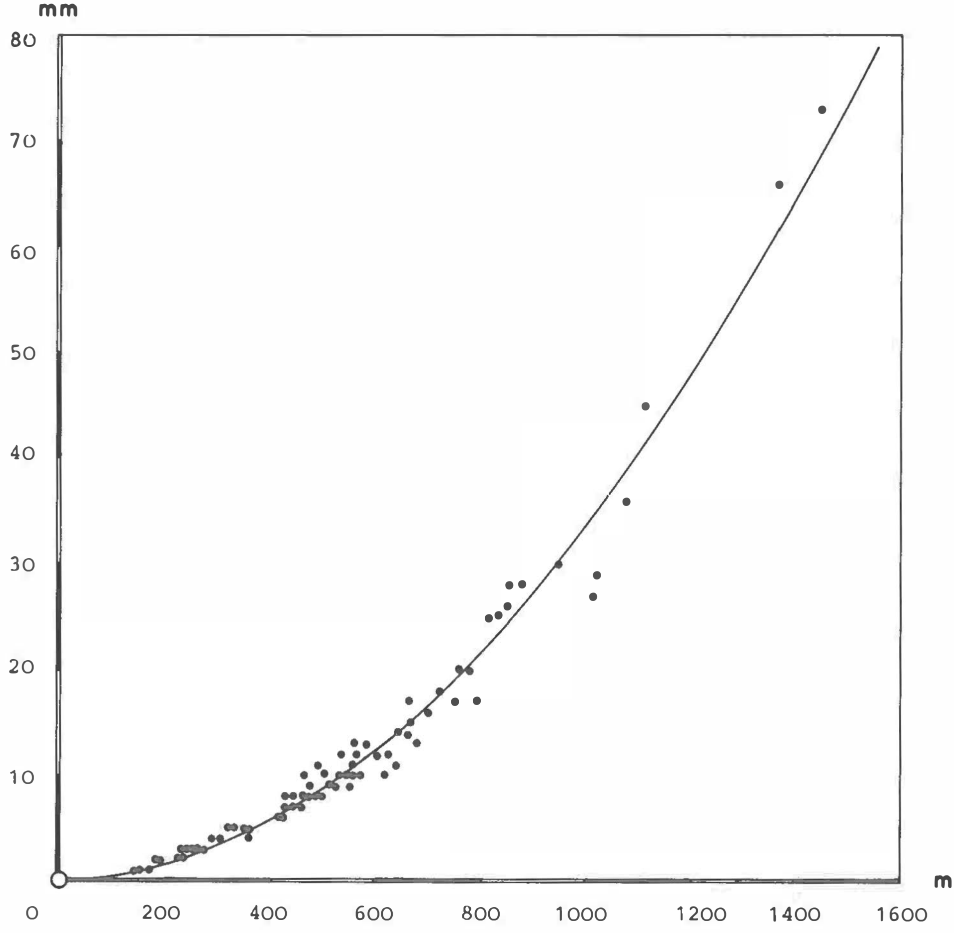
Figur 2: Abhängigkeit der Differenzen (ζ−N) von der Höhe.

abhängigkeit ist allerdings nicht erstaunlich, kennt man sie doch schon von den *Bouguer*-Schwereanomalien, mit denen (ζ—N) eng verknüpft ist. Trotz des eindeutigen Zusammenhangs ist die Streuung um die ausgleichende Kurve beachtlich. Die Ursache könnte in einer mangelhaften Erfassung der Topographie, der Isostasie oder der Dichte liegen.

Ein weiterer interessanter Zusammenhang ergibt sich aus folgender Überlegung. Dividiert man die geopotentielle Kote eines Punktes durch seinen Oberflächenschwerewert, erhält man ebenfalls eine metrische Höhe, die mangels eines besseren Namens „Naturhöhe h_n" genannt sei. Diese Naturhöhen wurden ebenfalls für alle 88 Knoten der Liste von *Höggerl* berechnet und seinen orthometrischen Höhen gegenübergestellt. Die Differenz „Naturhöhe minus orthometrische Höhe", also

$$\Delta h = h_n - h^*, \tag{8.2}$$

ist immer positiv und schmiegt sich in der Höhenabhängigkeit eng an eine ausgleichende Kurve an (siehe Figur 3). Die Streuung um diese Kurve beträgt nur wenige Millimeter.



Figur 3: Höhenabhängigkeit der Δh.

Die Höhenabhängigkeit von Δh läßt sich sehr gut durch folgende Formel beschreiben:

$$\Delta h_{(\text{in mm})} = 33 \,.\, h^2_{(\text{in km})}.$$

Mit dieser Formel ließe sich die orthometrische Höhe ohne jeden Aufwand auf $\pm$ 5 mm genau aus der Beziehung berechnen (g = Oberflächenschwere):

$$h^* = \frac{C}{g} - \Delta h. \qquad (8.3)$$

Bedenkt man den hypothetischen Charakter der orthometrischen Höhen, erscheint der angegebene Fehler tolerierbar.

Vergleicht man die Diagramme von Figur 2 und 3, gibt ein Umstand dem Theoretiker zu denken. In beiden Fällen wurde eine hypothesenfrei bestimmte Höhe (Normalhöhe bzw. Naturhöhe) der hypothesenbehafteten orthometrischen Höhe gegenübergestellt. Man sollte also in beiden Differenzen eine ähnlich starke Streuung erwarten. Die Tatsache, daß die Streuung in Figur 2 zehnmal geringer ist, erfordert besondere Überlegungen, die einer späteren Arbeit mit größerem Datenmaterial vorbehalten bleiben sollen.

Der Leser wird bemerkt haben, daß man im Prinzip beliebig viele Höhensysteme definieren kann. Die für das österreichische Vermessungswesen verantwortlichen Fachleute glauben, die richtige Entscheidung getroffen zu haben. Mit einiger Berechtigung kann behauptet werden, daß die Vermessungssysteme 1. Ordnung unseres Landes einen Standard erreicht haben, der modernsten Erkenntnissen entspricht und höchsten Ansprüchen genügt. Damit hat unsere Generation die große Tradition der Geodäsie in Österreich würdig fortgesetzt.

Literatur

Rinner, K., Zeger, J., Hofmann-Wellenhof, B., Erker, E.: Über die GPS-Macrometer-Kampagne 1985 in Österreich. ÖZ, 74. Jg., 1986, Heft 1.

Moritz, H.: Geodetic Reference System 1980. The Geodesist's Handbook, Bureau Central de l'Association Internationale de Géodésie, 1984.

Vaniček, P., Krakiwsky, E.: Geodesy. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2nd Ed., 1986.

Heitz, S.: Grundlagen kinematischer und dynamischer Modelle der Geodäsie. Mitt. aus den Geod. Inst. der Univ. Bonn, Nr. 63, 1986.

Sünkel, H.: Konventionelle und moderne Verfahren zur Ableitung orthometrischer Höhen. ÖZ, 74. Jg., 1986, Heft 2.

Ledersteger, K.: Astronomische und physikalische Geodäsie. Handbuch der Vermessungskunde, Bd. V, Jordan-Eggert-Kneissl, Stuttgart, 1969.

Mader, K.: Die orthometrische Schwerekorrektion des Präzisions-Nivellements in den Hohen Tauern. Sonderheft 15 der ÖZfV., Wien, 1954.

Sünkel, H.: Geoidbestimmung. In: Das Geoid in Österreich. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Bd. III, Graz, 1983.

Erker, E.: Lokale Geoidbestimmung und Lotabweichungsfeld in Österreich. ÖZ, 72. Jg., 1984, Heft 1.

Manuskript eingelangt im Dezember 1986.