

Paper-ID: VGI_198702



Approximative Meereshöhen

Kurt Bretterbauer ¹

¹ *Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **75** (1), S. 10–13

1987

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Bretterbauer_VGI_198702,  
Title = {Approximative Meeresh{"o}hen},  
Author = {Bretterbauer, Kurt},  
Journal = {{{"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {10--13},  
Number = {1},  
Year = {1987},  
Volume = {75}  
}
```



Approximative Meereshöhen

Von K. Bretterbauer, Wien

Abstract

A simple formula for the approximate computation of orthometric heights from geopotential numbers is given. The standard deviation of heights thus derived as compared to rigorously computed orthometric heights is only ± 2 mm.

1. Einführung

In Heft 4, 1986, dieser Zeitschrift, in Kapitel 8 des Übersichtsartikels „Das Höhenproblem der Geodäsie“ [1], habe ich eine empirische Formel zur genäherten Berechnung von orthometrischen Höhen (Meereshöhen) gegeben und deren Untersuchung und Begründung in einer weiteren Arbeit angekündigt. Diese Analyse wird hiermit vorgelegt. Entgegen der Ankündigung in [1] stützt sich diese Untersuchung auf dieselben Ausgangsdaten. Dies deshalb, weil umfangreiches Material noch nicht vorliegt und sich außerdem die Beziehungen als völlig einleuchtend und elementar erwiesen haben. Das schließt aber nicht aus, daß die spätere Untersuchung einer großen Datenmenge nützlich und aufschlußreich sein könnte.

2. Rekapitulation

Die Definition jedes Höhensystems geht von den geopotentiellen Knoten C aus, also von den Potentialdifferenzen gegenüber dem Geoid. Um daraus metrische Höhen zu gewinnen, wird durch einen an sich beliebigen Schwerewert dividiert. Die Wahl dieses Schwerewertes bestimmt das Höhensystem. Nimmt man den Mittelwert der Schwere entlang der jeweiligen Lotlinie, so erhält man die orthometrischen Höhen h^* :

$$h^* = C/\bar{g}^*, \quad (2.1)$$

\bar{g}^* = Mittelwert der Schwere in $\text{kGal} = 10 \text{ m s}^{-2}$.

In [1] habe ich eine andere Art von Höhen definiert, durch Division der geopotentiellen Knoten durch die jeweilige Oberflächenschwere, und sie „natürliche Höhen“ h_n genannt:

$$h_n = C/g. \quad (2.2)$$

Bildet man die Differenz

$$\Delta h = h_n - h^* \quad (2.3)$$

für alle von Höggerl [2] ausgewiesenen Knoten des österreichischen Nivellements 1. Ordnung und untersucht diese Differenz auf ihre Höhenabhängigkeit, so zeigt sich, daß diese Δh auf einer Parabel liegen (Figur 3 in [1]). Die Parabel habe ich nach dem Augenmaß eingezeichnet und ihre Gleichung intuitiv bestimmt zu:

$$\Delta h_{(\text{in mm})} = k \cdot h_{(\text{in km})}^2, \quad k = 33 \text{ mm} \cdot \text{km}^{-2}. \quad (2.4)$$

Eine Ausgleichung ergibt $k = 34$ und eine Standardabweichung der Δh von $s = \pm 2$ mm. Damit ist eine einfache und genaue Formel zur Gewinnung orthometrischer Höhen gegeben.

3. Theoretische Begründung

Der Faktor k hat die Dimension lm^{-1} . Seine Bedeutung ergibt sich wie folgt:

$$\Delta h = h_n - h^* = \frac{C}{g} - \frac{C}{\bar{g}^*} = \frac{C}{g} \left(\frac{\bar{g}^* - g}{\bar{g}^*} \right). \quad (3.1)$$

Da Δh eine kleine Größe ist ($\approx 80 \text{ mm}$ für $h = 1500 \text{ m}$), darf in (3.1) C/g gleich einem Näherungswert der Höhe und der Nenner in der Klammer gleich einem runden Schwerewert g_0 gesetzt werden, also:

$$\Delta h = \frac{h}{g_0} (\bar{g}^* - g). \quad (3.2)$$

Der Mittelwert der Schwere entlang der Lotlinie ist in großer Näherung gleich dem Schwerewert in der Masse in halber Höhe. Somit ist

$$(\bar{g}^* - g) = \delta g \cdot \frac{h}{2} \quad (3.3)$$

nichts anderes als die *Prey*-Reduktion von der Oberfläche in die halbe Höhe und δg der *Prey*-Gradient. Dieser setzt sich aus der Wirkung der Topographie, der Freiluftreduktion und der doppelten *Bouguer*-Platte zusammen. (3.2) kann nun mit (3.3) in der Form geschrieben werden:

$$\Delta h = k \cdot h^2, \text{ mit } k = \frac{\delta g}{2g_0}. \quad (3.4)$$

In einer theoretischen Betrachtung kann die individuelle Topographie nicht berücksichtigt werden. Der theoretische *Prey*-Gradient besteht daher nur aus Freiluftgradient und doppeltem *Bouguer*-Gradienten:

$$\delta g = \frac{2GE}{R^3} - 4\pi G\rho, \quad (3.5)$$

mit $G = \text{Gravitationskonstante}$, $E = \text{Erddichte}$, $R = \text{Erdradius}$, $\rho = \text{Standarddichte der Erdkruste}$. Mit den Werten: $G = 66,73 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3\text{s}^{-2}\text{g}^{-1}$, $E = 5,974 \cdot 10^{27} \text{ g}$, $R = 6,371 \cdot 10^8 \text{ cm}$, $\rho = 2,7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $g_0 \approx 981 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ folgt:

$$\delta g = 0,08190 \text{ mGal/m} \text{ und } k = 4,2 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^{-1} = 42 \text{ mm} \cdot \text{km}^{-2}. \quad (3.6)$$

4. Der erweiterte Prey-Gradient

Der Unterschied des empirisch bestimmten Wertes $k = 34$ zu dem theoretisch bestimmten $k = 42$ liegt offenbar in der Wirkung der Topographie, zum geringen Teil auch in der angenommenen Standarddichte. Es sei daher versucht, den erweiterten *Prey*-Gradienten zu ermitteln. Die von *Höggerl* [2] zur Berechnung der orthometrischen Höhen der 88 Knoten benutzten Mittelwerte der Schwere \bar{g}^* (in denen die Topographie voll berücksichtigt ist) lassen sich leicht wiedergewinnen durch Division der geopotentiellen Knoten durch die orthometrischen Höhen:

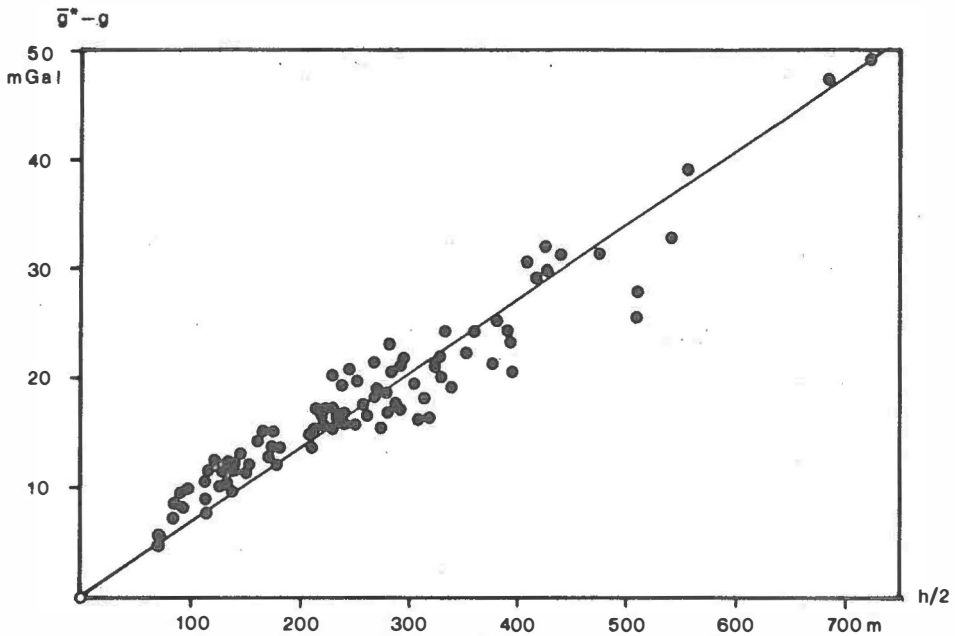
$$\bar{g}^* = C/h^*. \quad (4.1)$$

Trägt man nun die Differenzen $(\bar{g}^* - g)$ in Abhängigkeit von der halben Höhe in ein Diagramm ein, so liegen die Punkte auf einer Geraden (Figur 1). Eine Ausgleichung liefert deren Gleichung:

$$(\bar{g}^* - g) = 0,06735 \cdot \frac{h}{2}. \quad (4.2)$$

Die Steigung dieser Geraden ist der erweiterte *Prey*-Gradient:

$$\delta g = 0,06735 \text{ mGal/m}. \quad (4.3)$$



Figur 1: Bestimmung des erweiterten *Prey*-Gradienten.

Mit (3.4) folgt daraus:

$$k = 3,4 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^{-1} = 34 \text{ mm} \cdot \text{km}^{-2}, \quad (4.4)$$

in Übereinstimmung mit dem Wert in Kapitel 2. Selbstverständlich ist das keine unabhängige Herleitung, sondern bloß eine Bestätigung des früheren empirischen Resultats. Übrigens ließe sich der theoretische *Prey*-Gradient durch Annahme einer Krustendichte von $\rho = 2,87 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ auf dem Wert (4.3) bringen.

Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß von den 88 Knoten 82 unter 1000 m und nur 6 zwischen 1000 und 1500 m liegen. Für größere Höhen ist der Wert von k also mit Vorsicht zu gebrauchen, wogegen er bis 1000 m gut gesichert ist. In jedem Fall aber stellt die Beziehung

$$h^* = \frac{C}{g} - (34 \cdot h^2_{\text{km}})_{\text{mm}} \quad (4.5)$$

eine einfache und sichere Kontrollformel dar. Im Hinblick auf die Meßfehler des Nivellements und den hypothetischen Charakter der orthometrischen Höhen und den hohen Aufwand zu ihrer Bestimmung, kann (4.5) überhaupt zur Berechnung der orthometrischen Höhen nachgeordneter Nivellements benützt werden.

5. Wirkung der Topographie

In [1] wurden auch noch die Differenzen der orthometrischen Höhen h^* zu den Normalhöhen H nach *Molodenskij* auf ihre Höhenabhängigkeit untersucht (Figur 2 in [1]). Diese Differenzen stellen die Erhebung des Quasigeoides über das Geoid dar, d. h. die Differenzen „Höhenanomalie minus Geoidundulation“:

$$h^* - H = \zeta - N. \quad (5.1)$$

Diese Differenzen liegen ebenfalls auf einer parabelähnlichen Kurve, allerdings mit wesentlich größerer Streuung, weshalb in [1] die Frage nach der Ursache gestellt wurde. Diese ist abermals in der Wirkung der Topographie zu suchen. Es ist

$$\zeta - N = h^* - H = \frac{C}{g^*} - \frac{C}{\bar{g}} = \frac{C}{g\bar{g}^*} (\bar{g} - g^*) \tag{5.2}$$

und

$$\Delta h = h_n - h^* = \frac{C}{g} - \frac{C}{g\bar{g}^*} = \frac{C}{g\bar{g}^*} (\bar{g}^* - g). \tag{5.3}$$

In (5.2) ist nur ein Faktor des Klammerausdrucks von der Topographie beeinflusst, denn \bar{g} ist ein theoretischer Schwerwert im Außenraum des Niveauellipsoides. In (5.3) dagegen unterliegen beide Faktoren der Klammer der Wirkung der Topographie, wenn auch nicht in derselben Weise, aber offenbar doch so, daß die Wirkung in der Differenz weitgehend kompensiert wird.

Die geringe Streuung der Δh zeigt aber auch, daß die regionalen Abweichungen von der angenommenen Standarddichte nicht groß sein können. Immerhin wird eine künftige Untersuchung eines großen Datenmaterials auf regionale Effekte interessante Rückschlüsse auf die Struktur der Erdkruste in Österreich erlauben.

Literatur

- [1] *Bretterbauer, K.*: Das Höhenproblem der Geodäsie. ÖZ, 74. Jg., 1986, Heft 4.
- [2] *Höggerl, N.*: Ausgleichung des österreichischen Präzisionsnivelementnetzes. ÖZ, 74. Jg., 1986, Heft 4.

NEU Das Digitalisiergerät der 3. Generation

DIGITALES KOORDINATEN-, FLÄCHEN- UND LÄNGENMESSGERÄT

X-PLAN 360 iR



NEU
mit RS 232 C für
Computer/Miniprinter-
anschluß

- Koordinaten 0,1 mm genau
- Ursprung und Achse
frei wählbar
- Distanzen, Umfang, Fläche gleichzeitig
- Messeinheiten und Maßstäbe individuell
- Sammel- und Durchschnittswerte
- Gerade und Kreisbögen in Einzelpunktmessung
- Folgepunktnummern automatisch

r-a-rost
A-1151 WIEN, MÄRZTRASSE 7
TELEFON 0222/92 92 31-07, 92 92 35-01, 92 53 53-01