



Zum Problem der Massenreduktion in der Angewandten Gravimetrie

Harald Figdor ¹, M. Hinger ²

¹ *Technische Universität Wien, Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik, Abteilung Geophysik, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien*

² *1200 Wien, Leystraße 20 C/1 4*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **76** (2), S. 191–207

1988

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Figdor_VGI_198832,  
  Title = {Zum Problem der Massenreduktion in der Angewandten Gravimetrie},  
  Author = {Figdor, Harald and Hinger, M.},  
  Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {191--207},  
  Number = {2},  
  Year = {1988},  
  Volume = {76}  
}
```



Zum Problem der Massenreduktion in der Angewandten Gravimetrie

Von H. Figdor und M. Hinger, Wien

Summary

This paper is a study on the accuracy of the gravimetric mass reduction (topographic and plate reduction).

Studying the literature one can remark, that concerning examples in gravimetry indications on the accuracy of mass reduction are rarely done. With modern gravity meters a high accuracy is obtainable (0.01 up to 0.001 mgal), so that there is a great disproportion between the accuracy of the readings and the unexact determination of the mass reduction. However, the latter is an additional value to the Bouguer anomaly and therefore it enters entirely into the final data.

For that reason an exact determination of the mass reduction or a reliable estimation of its accuracy seems to be essential.

The following items are important for the accuracy of the mass reduction:

- the adequate extension of the reduction area for ignoring the outlying masses
- errors in the digital height model
- errors in the digital density model

According to the above mentioned aspects analytic relations to the accuracy of reduction are investigated and then simple estimations of the accuracy of reduction are deducted.

Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Genauigkeitsuntersuchungen der gravimetrischen Massenreduktion (topographische und Plattenreduktion).

Beim Studium der Literatur fällt auf, daß bei Meßbeispielen der angewandten Gravimetrie sehr selten exakte Genauigkeitsangaben zur Massenreduktion gemacht werden. Da aber die heute zur Verfügung stehenden Meßinstrumente bereits sehr hohe Genauigkeiten zulassen (= 0,01 mgal), ergibt sich somit ein großes Ungleichgewicht zwischen der Genauigkeit der Meßdaten und der ungenauen Bestimmung der Massenreduktion. Diese geht aber als additiver Wert in vollem Umfang in die Bougueranomalien und damit auch in das Ergebnis der gravimetrischen Auswertung ein.

Aus diesem Grunderscheint eine genauere Bestimmung der Massenreduktion bzw. eine zuverlässige Abschätzung ihrer Genauigkeit sinnvoll.

Für die Genauigkeit der Massenreduktion sind vor allem folgende Größen wichtig:

- Die ausreichende Größe des Reduktionsgebiets, um den Einfluß der außerhalb liegenden Massen vernachlässigen zu können.
- Der Höhenfehler im digitalen Höhenmodell.
- Der Dichtefehler im digitalen Dichtemodell.

Für diese Fehler werden die theoretischen und analytischen Zusammenhänge mit der Reduktionsgenauigkeit untersucht und in der Folge möglichst einfache Abschätzungen der Reduktionsgenauigkeit abgeleitet.

1. Einleitung

Derzeit werden in der angewandten Gravimetrie die Reduktionen an die gemessenen Schwerewerte meistens ohne eingehende Abschätzung ihrer jeweiligen Genauigkeit an die Meßdaten angebracht, wobei oft nur eine konstante Dichte ($\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3$) für das gesamte Reduktionsgebiet angenommen wird.

Gute Gravimeter erreichen eine Meßgenauigkeit von 0,01 bis 0,02 mgal, das La Coste-Romberg-Gravimeter Modell D bis zu 0,001 mgal (Steinhauser, 1980). Im Vergleich dazu bewirkt schon die geringe Dichteänderung von $0,04 \text{ g/cm}^3$ einer 100 m dicken Bouguerplatte

eine Änderung der Plattenreduktion von 0,2 mgal, dem Zehnfachen der Meßgenauigkeit. Daraus läßt sich erkennen, daß Fehler bei der Bestimmung der Reduktion Größenordnungen erreichen können, die die Genauigkeit der Anomalien und ihre Interpretierbarkeit stark beeinträchtigen.

Diese Arbeit soll die Genauigkeit der Gelände- und Plattenreduktion untersuchen, die neben dem Freiluftgradienten in der Höhenkorrektur den größten Unsicherheitsfaktor bei der Bestimmung der Bougueranomalie bildet.

1.1 Die gravimetrische Massenreduktion

Üblicherweise wird die Reduktion überschüssiger Massen in zwei Schritten vorgenommen, in der Gelände- und Plattenreduktion (Abb. 1a). Diese Trennung erscheint aber ungeeignet, da für die Plattenreduktion eine konstante Dichte angenommen werden muß und somit veränderliche Dichten unberücksichtigt bleiben.

Weiters ergibt sich aus dieser Trennung, daß Zonen, wo das Gelände niedriger als die Bezugshöhe ist, bis zu dieser mit Massen aufgefüllt werden. Deren Wirkung ist aber bei der topographischen Reduktion genau entgegengesetzt zur Plattenreduktion und hebt sich somit in Summe auf.

Die Zusammenfassung der Gelände- und Plattenreduktion zur Massenreduktion (Abb. 1b) übergeht diese Einbeziehung nicht vorhandener Hilfsmassen und läßt auch Dichteveränderungen zwischen Bezugs- und Meßpunkthöhe zu. Dazu wird der gesamte Massenkörper zwischen Bezugshöhe und Geländeoberfläche wie bei der Geländereduktion in Elementarkörper verschiedener Dichte zerlegt und ihre Wirkung auf dem Meßpunkt berechnet.

Die Bestimmung der Massenverteilung mit den Methoden der Schweremessung ist prinzipiell nicht eindeutig, da dabei versucht wird, aus Oberflächendaten eine räumliche Struktur abzuleiten. Um ein möglichst plausibles Ergebnis zu bekommen, müssen bereits bekannte Randbedingungen, Dichteschranken und -werte einbezogen werden.

Die Massenreduktion gehört mit ihrer als bekannt angenommenen Dichteverteilung auch zu diesen Eingangsdaten, und verringert man sie, so vermindert man damit auch die Eindeutigkeit; reduziert aber gleichzeitig den Einfluß ihrer Ungenauigkeit auf die Meßwerte.

So sollte die Bezugshöhe möglichst nahe der Oberfläche gewählt werden, da die Dichten im Untergrund erstens unsicher sind, und zweitens ihre Bestimmung ja gerade Ziel der angewandten Gravimetrie ist. Bereiche mit geringerer Geländehöhe als die Bezugshöhe können dabei mit jeder beliebigen Dichte willkürlich belegt werden, da für die Berechnung der Dichteverteilung im Untergrund diese Zonen wieder berücksichtigt werden müssen. Durch eine möglichst geringe Differenz zwischen Bezugs- und Meßpunkthöhe wird auch die Freiluftkorrektur und ihre Unsicherheit minimiert. Es wäre aber andererseits falsch, die Bezugshöhe aus diesem Grund höher zu setzen als die Dichte im Untergrund bekannt ist. Man muß hier das Optimum zwischen Eindeutigkeit und Genauigkeit finden.

1.2. Die Fehlerquellen bei Bestimmung der Massenreduktion

Größe des Reduktionsgebietes

Diese hängt vor allem von den topographischen Gegebenheiten (Flachland oder Hochgebirge) ab, und es ist zu untersuchen, wie groß das Reduktionsgebiet der Topographie entsprechend gewählt werden muß, damit der Einfluß außerhalb liegender Massen unterhalb der gewünschten Genauigkeit liegt.

Fehler im Höhen- und Dichtemodell

Hier lassen sich zwei Fehlerquellen unterscheiden:

Erstens Ungenauigkeiten bei der Ermittlung der Modellhöhen und -dichten auf Grund der Ungenauigkeit der Unterlagen, die dazu verwendet werden.

Zweitens der Fehler der gemacht wird, indem man die tatsächliche Höhen- und Dichteverteilung durch die Modellhöhen und -dichten ersetzt. Dieser Fehler hängt von der Rastergröße und von der Kenntnis der topographischen bzw. geologischen Struktur im Reduktionsgebiet ab.

2. Größe des Reduktionsgebietes

2.1. Herleitung des Zusammenhanges zwischen Meß- und Reduktionsgebietsgröße in Funktion der Reduktionsgenauigkeit

Die Schweremessung zur Bestimmung der Dichteverteilung ist nur eine Relativmessung, da nur die Schweredifferenzen zwischen den Meßpunkten benötigt werden. Die daraus ableitbaren Dichteunterschiede genügen, um aus bereits bekannten Dichten die gesuchten zu bestimmen. Somit kann ein für alle Meßpunkte konstanter Anteil der Bougueranomalie vernachlässigt werden, also auch ein für alle Meßpunkte konstanter Wert der Massenreduktion.

Das Reduktionsgebiet muß demnach so groß sein, daß sich die Wirkung der Restmassen für alle Punkte des Meßgebietes um weniger als die Reduktionsgenauigkeit unterscheidet.

Der Schwerewirkungsunterschied $\Delta g_{A,B}$ der Restmassen zwischen den Meßpunkten A und B kann durch Taylorreihenentwicklung in erster Näherung aus dem Schweregradienten und der Koordinatendifferenz berechnet werden.

$$\Delta g_{A,B} = \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right)_A \Delta r_{A,B} \quad (2.1)$$

Damit ist der formale Zusammenhang zwischen Reduktionsgenauigkeit, Meß- und Reduktionsgebietsgröße gegeben. Der Schweregradient ist eine Funktion der Restmassen und der Ausdehnung des Reduktionsgebietes, Δg ist die Reduktionsgenauigkeit und Δr die Ausdehnung des Meßgebietes.

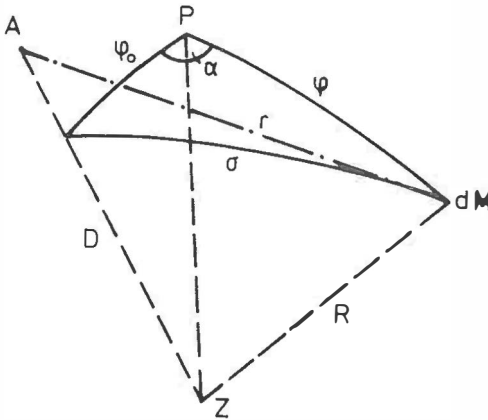
Die Größe des Horizontalgradienten hängt von der Verschiebungsrichtung des Aufpunktes und der Lage der Restmassen ab. Für den Aufbau von Berechnungsmodellen ist es vor allem interessant, jene Massenverteilung zu finden, bei der für eine bestimmte Verschiebungsrichtung der Gradient am größten ist. Nähert man die Restmassen durch einen solchen Massenkörper an, und verwendet man den maximalen Gradienten dieses Körpers für die Formel (2.1), so ist gewährleistet, daß die damit ermittelte Ausdehnung des Reduktionsgebietes sicher ausreicht.

Aus einfachen Überlegungen geht hervor, daß eine Konzentration der Restmassen auf eine Hälfte außerhalb des Reduktionsgebietes den stärksten Gradienten aller möglichen Verteilungen verursacht, wenn der Aufpunkt in Richtung der Massen verschoben wird. (Der Horizontalgradient symmetrisch zum Aufpunkt liegender Massen ist in erster Näherung „0“, eine Verschiebung des Aufpunktes tangential zur Masse bewirkt in erster Näherung ebenfalls keine Massenwirkungsänderung.) Daraus läßt sich nun ein Modellkörper ableiten, dessen maximaler Horizontalgradient sicher größer ist als der maximale Gradient der tatsächlichen Restmassenverteilung, der aber dennoch eine effiziente Näherung und Abschätzung zuläßt.

Bei ebener Berechnung wäre dieser Körper eine halbe Bouguerplatte, aus der das halbe Reduktionsgebiet herausgenommen ist (Abb. 2a). Für die notwendige Berücksichtigung der Erdkrümmung folgt daraus eine halbe Kugelschale (Abb. 2b). Die Richtung des maximalen Horizontalgradienten liegt in beiden Fällen in der Symmetrieebene dieser Restplatten.

2.2 Der maximale Horizontalgradienten der sphärischen Restplatte

Für einen Aufpunkt A mit den Kugelkoordinaten $(D, \varphi_0, \alpha_0 = 0)$ ist die Schwerewirkung der sphärischen Restplatte durch folgendes Integral gegeben:



- A Aufpunkt
- P Zentrum des Reduktionsgebietes
- dm Volumselement
- R Radius von Z nach dm
- D Radius von Z nach A
- r Abstand von A nach dm

$$g = G\varrho \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{D - R(\cos\varphi_0 \cos\varphi + \sin\varphi_0 \sin\varphi \cos\alpha)}{[D^2 + R^2 - 2RD(\cos\varphi_0 \cos\varphi + \sin\varphi_0 \sin\varphi \cos\alpha)]^{3/2}} R^2 \sin\varphi \, dR \, d\varphi \, d\alpha$$

Durch Ableitung nach φ_0 für $\varphi_0 = 0$ (Aufpunkt im Zentrum des Reduktionsgebietes), $\varphi_1 = \pi$ und $\alpha_1 = -\alpha_2 = \pi/2$ erhält man den maximalen Horizontalgradienten

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi_0}\right)_{\max} = 2G\varrho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{-R^2 + 2D^2 - RD\cos\varphi}{[D^2 + R^2 - 2RD\cos\varphi]^{5/2}} R^3 \sin^2\varphi \, dR \, d\varphi$$

Mit φ_1 als Funktion des Grenzradius r_a des Reduktionsgebietes folgt mit (2.1) eine Abschätzformel für den Zusammenhang von Meßgebietsgröße Δr , Reduktionsgebietsgröße r_a und Reduktionsgenauigkeit Δg :

$$D \frac{\Delta g}{\Delta r} = 2G\varrho \int_{R_1}^{R_1 + \Delta H} \int_{\frac{r_a}{D}}^{\pi} \frac{-R^2 + 2D^2 - RD\cos\varphi}{[D^2 + R^2 - 2RD\cos\varphi]^{5/2}} R^3 \sin^2\varphi \, dR \, d\varphi$$

Die Nomogramme Abb. 3a und Abb. 3b im Anhang zeigen die Auswertung dieser Integralformel mit einer Anwendung an einem Rechenbeispiel. Vergleiche mit einer numerischen Berechnung eines konkreten Beispiels im Hochgebirge zeigen, daß diese Formel bei geeigneter Wahl der Plattendicke H zu brauchbaren Ergebnissen führt (Hinger, 1987).

3. Fehler im Reduktionsgebiet

3.1. Aufteilung der gesamten Reduktionsgenauigkeit auf das Berechnungselement

Nach der derzeit üblichen Methode werden die natürlichen Massen im Reduktionsgebiet für die Berechnung durch ein digitales Modell mit Massensäulen gleicher Grundfläche ersetzt. Ist der mittlere Reduktionsfehler m_g , so setzt sich dieser aus der Quadratsumme der Fehler der einzelnen Säulen Δm_g zusammen:

$$m_g^2 = \sum_1^n \Delta m_g^2$$

Bei Betrachtung der einzelnen Fehleranteile als maximale Schranken dg folgt der maximale Reduktionsfehler:

$$\Delta g = \sum_1^n dg$$

Nimmt man einen für alle Säulen konstanten Fehler an, so ergibt sich daraus:

$$m_g = \sqrt{n} \Delta m_g \Rightarrow \Delta m_g = \frac{m_g}{\sqrt{n}}, \quad \Delta g = ndg \Rightarrow dg = \frac{\Delta g}{n}$$

Sind nun Δm_g und dg die Fehler entweder für ein Element mit konstanter Grundfläche oder für eine Masseneinheit (= Volumseinheit mit $\rho = \text{const}$), so ist n die Gesamtfläche des Reduktionsgebietes bzw. das gesamte Reduktionsvolumen, und man erhält den mittleren und maximalen Massen- bzw. Flächeneinheitsfehler:

$$\begin{aligned} \Delta m_{gF} &= \frac{m_g}{\sqrt{F}} = m_g \frac{1}{r_a \sqrt{\pi}}, \quad dg_F = \frac{\Delta g}{F} = \Delta g_F \frac{1}{r_a^2 \pi} \\ \Delta m_{gM} &= m_g \frac{1}{\sqrt{V}} \quad d_{gM} = \frac{\Delta g}{V} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Das Gesamtvolumen V läßt sich theoretisch aus dem Höhenmodell, aus der Rasterfläche ΔF und aus der Differenz zwischen den digitalen Geländehöhen h_{mi} und der Bezugshöhe h_b bestimmen:

$$V = \Delta F \sum_{i=1}^n (h_{mi} - h_b) = \Delta F \sum h_{mi} - F h_b = F (\bar{h} - h_b) \tag{3.2}$$

\bar{h} ist die mittlere Geländehöhe über das gesamte Reduktionsgebiet.

Da sich aber symmetrisch zur Horizontalebene des Aufpunkts liegende Massen mit angenommener konstanter Dichte in ihrer Wirkung aufheben, muß in Abhängigkeit der Aufpunkthöhe h_a und der Bezugshöhe h_b nur ein gewisser Teil (wirksames Volumen V_w) des gesamten Reduktionsvolumens für die Bestimmung des Masseneinheitsfehlers herangezogen werden.

Abb. 4 veranschaulicht diesen Zusammenhang zwischen V_w , V , h_a und h_b . Läßt sich V_w bestimmen, so kann man mit (3.1) bei gegebener Reduktionsgenauigkeit den erlaubten Fehleranteil pro Berechnungselement festlegen bzw. umgekehrt bei Kenntnis der Fehler pro Berechnungselement die Reduktionsgenauigkeit abschätzen. Dazu wird in Anlehnung an die Volumina geometrischer Körper (Quader, Dachprisma, Pyramide) über die allgemeine Volumsformel

$$V = F \cdot h_{\text{max}} \cdot c \tag{3.37}$$

- h_{max} . . . max. Geländehöhe
- F . . . Grundfläche des Reduktionsgebietes
- c . . . empirische Formparameter

ein Zusammenhang zwischen dem Wirksamen Volumen V_w und den bekannten Größen h_{max} , h_{min} , h_b und h_a hergeleitet. Der Formparameter c wurde dabei empirisch über einen Vergleich von h_{max} , h_{min} und der mittleren Geländehöhe \bar{h} in verschiedenen Gebieten (ÖK Blätter 1:50000) mit Hilfe von (3.2) und (3.3) entwickelt:

$$c = \frac{0,53 h_{\text{max}} - 0,47 h_{\text{min}} - 0,22}{h_{\text{max}} - h_{\text{min}}}$$

Für den in der angewandten Gravimetrie häufigen Fall $h_a = h_b$ ergibt sich für V_w :

$$\begin{aligned} V_w = V &= c \cdot \frac{(h_{\text{max}} - h_b)^2}{(h_{\text{max}} - h_{\text{min}})} \quad \text{für } h_b > h_{\text{min}} \\ V_w = V &= c \cdot (h_{\text{max}} + h_{\text{min}} - 2h_b) \quad \text{für } h_b \leq h_{\text{min}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2. Gewichtung des Einheitsfehlers in Abhängigkeit der Entfernung

Eine Aufteilung der gesamten Reduktionsgenauigkeit Δg auf die einzelnen Berechnungselemente mit Hilfe der im Abschnitt 3.1. abgeleiteten Einheitsfehler bewirkt, daß mit zunehmender Entfernung zum Aufpunkt auch die Schranken für die Höhen- und Dichtengenauigkeit größer werden, und zwar proportional r^3 (Abb. 5a). Es ist deshalb naheliegend den Einheitsfehler derart zu gewichten, daß bei gleichbleibender gesamter Reduktionsgenauigkeit die erlaubten Dichte- und Höhenfelder im Fernbereich zu Gunsten jener im Nahbereich reduziert werden.

Wenn Höhen- und Dichtefehler mit r^3 zunehmen, scheint es plausibel, den Einheitsfehler ausgleichend proportional zu $1/r^3$ zu gewichten, wobei die Gesamtreduktionsgenauigkeit gleichbleiben soll.

Im folgenden ist die Herleitung dieser Gewichte p_i angegeben:

Zunächst wird analog zum Massen- und Flächeneinheitsfehler ein nur von der Entfernung abhängiger Fehler dg_r gebildet:

$$dg_r = \frac{\Delta r}{r_a} \Delta g \Rightarrow \Delta g = \frac{r_a}{\Delta r} dg_r \quad (3.5)$$

r_a . . . Reduktionsgebietsausdehnung
 Δr . . . Kreisringbreite

Demnach wird dg_r mit zunehmender Entfernung auf eine linear zur Entfernung größer werdende Fläche ΔF_i aufgeteilt. Daraus folgt, daß der Fehleranteil pro konstantem Berechnungselement bereits linear mit der Entfernung abnimmt und dg_r nur mehr proportional zu $1/r^2$ gewichtet werden muß.

Unter der Bedingung, daß Δg unverändert bleiben soll, wird in (3.5) die rechte Seite mit

$$\frac{\sum \frac{1}{r_i^2}}{\sum \frac{1}{r_j^2}}$$

multipliziert und $r_a/\Delta r \cdot dg_r$ in den Zähler hineingezogen, und nach einigen Umformungen folgt:

$$\Delta g = \sum_{i=1}^{r_a/\Delta r} dg_r p_i \quad \text{mit} \quad p_i = \frac{r_a}{\Delta r} \frac{1}{i^2}$$

p_i . . . Gewicht für den i -ten Kreisring mit der Fläche ΔF_i

Um nun den Fehleranteil für ein konstantes Berechnungselement in einer bestimmten Entfernung zu berechnen, muß noch $dg_r \cdot p_i$ mit dem Flächen- bzw. Volumsverhältnis zwischen dem jeweiligen Kreisring und dem Berechnungselement multipliziert werden. Daraus ergeben sich mit (3.5) folgende gewichtete Flächen- und Masseneinheitsfehler:

$$dg_{F_i} = dg_{M_i} \bar{h}_i = \Delta g \left[\pi \Delta r^2 i^2 (2i - 1) \sum_{j=1}^{r_a/\Delta r} \frac{1}{j^2} \right]^{-1} \quad (3.6)$$

Wählt man eine Gewichtung, die nur proportional zu $1/r^2$ ist, ergibt sich analog zu (3.6):

$$dg_{F_i} = dg_{M_i} \bar{h}_i = \Delta g \left[\pi \Delta r^2 i (2i - 1) \sum_{j=0}^{r_a/\Delta r} \frac{1}{j^2} \right]^{-1} \quad (3.7)$$

Aus dem Vergleich von Abb. 5b mit Abb. 5c ergibt sich, daß die Gewichtung proportional zu $1/r^2$ günstiger ist als jene proportional $1/r^3$. Letztere liefert zwar im gesamten Gebiet nahezu konstante Werte und bewirkt in Aufpunktnähe sogar ein Ansteigen dieser. Die Gewichtung $1/r^2$ entspricht aber dem Umstand, daß für die Berechnung der Massenreduktion im digitalen Geländemodell mit zunehmender Entfernung zum Aufpunkt der Raster vergrößert wird und dadurch die Modellgenauigkeit dementsprechend abnimmt. Gleichzeitig ist aber auch der Minimalwert in Aufpunktnähe kaum geringer als jener bei einer Gewichtung $1/r^3$.

Die gewichteten Einheitsfehler nach den Formeln (3.7) sind damit am zweckmäßigsten, um aus einer vorgegebenen Reduktionsgenauigkeit die erforderlichen entfernungsabhängigen Genauigkeiten des Höhen- und Dichtemodells anzugeben.

3.3. Zusammenhang zwischen Reduktionsgenauigkeit und der Höhen- und Dichtegenauigkeit für die gesamte Reduktionsmasse

Für die Planung von gravimetrischen Projekten und auch für die Genauigkeitsuntersuchungen bereits durchgerechneter Projekte ist es aber sinnvoll, ohne einen derartigen Rechenaufwand die mögliche Reduktionsgenauigkeiten bzw. die erforderlichen Höhen- und Dichtegenauigkeiten des digitalen Geländemodells abschätzen zu können.

Dazu wird versucht, die gesamte Reduktionsmasse durch einfache Körper anzunähern, deren Genauigkeitsverhalten der Schwerewirkung dem der tatsächlichen Massenverteilung möglichst gut entspricht und geschlossen berechenbar ist.

Da die Massenwirkung eines Körpers eine Funktion der Entfernung und der relativen Höhe zum Aufpunkt ist, bieten sich prinzipiell rotationssymmetrische Körper als Näherung für die tatsächliche Massenverteilung an, wobei die Geländehöhe h_g eine Funktion der Entfernung r ist: $h_g = h_g(r)$.

3.3.1. Näherungsformel zur Bestimmung der vom Höhenfehler abhängigen Reduktionsgenauigkeit $\Delta g(h)$

Zur Herleitung dieser Formeln müssen geeignete entfernungsabhängige Funktionen für die Geländehöhe h_g bzw. für den Höhenfehler dh gefunden werden. Als einfachste Möglichkeit bietet sich an, die gesamte Reduktionsmasse durch einen volumsgleichen Zylinder zu ersetzen, dessen Höhe die mittlere Geländehöhe \bar{h} und dessen Radius der Grenzzylinder r_a des Reduktionsgebietes ist. Demnach ist $h_g(r) = \text{const.} = \bar{h}$, und es folgt aus dem Schwereintegral für einen Zylinder mit Aufpunkt in der Symmetrieachse

$$g = 2\pi G \int_0^{r_a} \int_{h_0}^{h_0(r)} \frac{\rho h r}{(h^2 + r^2)^{3/2}} dr dh \tag{3.8}$$

durch Integration über die Grenzen 0 bis r_a und \bar{h} bis $\bar{h} + dh(r)$ für einen konstanten Höhenfehler im gesamten Reduktionsgebiet

$$\Delta g(h) = 2\pi G \rho [((\bar{h} + dh)^2 + r_a^2)^{1/2} - (\bar{h}^2 + r_a^2)^{1/2} - dh] \tag{3.9}$$

Für $\bar{h} = -dh/2$ erreicht $\Delta g(h)$ ein Maximum, wobei die Verringerung von $\Delta g(h)$ mit wachsendem \bar{h} nur gering ist.

Aus diesem Grund läßt sich für die Abschätzung der Wirkung eines für das gesamte Reduktionsgebiet konstanten Höhenfehlers auf die Reduktionsgenauigkeit die Formel (3.9) auf den Sonderfall $\bar{h} = 0$ vereinfachen:

$$\Delta g(h) = 2\pi G \rho [(dh^2 + r_a^2)^{1/2} - r_a - dh] \tag{3.10}$$

Aus der Umkehrung von (3.10) läßt sich die notwendige Höhengenaugigkeit bei vorgegebener Reduktionsgenaugigkeit abschätzen:

$$dh = \frac{\overline{\Delta g} \, 2r_a + \overline{\Delta g}}{2 \overline{\Delta g} + r_a} \quad \text{mit} \quad \overline{\Delta g} = \frac{\Delta g(h)}{2\pi G \rho} \quad (3.11)$$

Für die Annahme eines konstanten Höhenfehlers über das gesamte Reduktionsgebiet sind damit einfache und sichere Abschätzungen gefunden, die sich im Vergleich mit einem numerischen Testbeispiel im Hochgebirge als sehr effizient erweisen (Hinger, 1987). Da aber der Höhenfehler meistens mit der Entfernung zum Aufpunkt zunimmt, wird im Folgenden eine Formel for $\Delta g(h)$ hergeleitet, bei der ein linearer Anstieg des Höhenfehlers mit der Entfernung angenommen wird:

$$dh(r) = dh_0 + kr$$

mit dh_0 . . . Höhenfehler im Aufpunkt

$$k = \text{const}$$

Es ergibt sich nach Integration von (3.8) über $hg(r) = \text{const} = hg$ bis $hg + dh_0 + kr$ und 0 bis r_a

$$\Delta g(h) = 2\pi G \rho \left\{ \frac{[r_a^2 + (h_g + dh_0 + kr_a)^2]^{1/2} - h_g - dh_0}{(1 + k^2)} - (h_g + r_a)^{1/2} + h_g - \frac{(h_g + dh_0) k}{(1 + k^2)^{3/2}} \ln \frac{(1 + k^2)^{1/2} [r_a + (h_g + dh_0 + kr_a)^2]^{1/2} + (1 + k^2) r_a + (h_g + dh_0) k}{(h_g + dh_0) (k + (1 + k^2)^{1/2})} \right\} \quad (3.12)$$

Das Nomogramm Abb. 6 zeigt die graphische Auswertung für verschiedene k und r_a für $dh_0 = 0$ und $h_g = \text{const}$. Wählt man für h_g die mittlere Geländehöhe im Bereich des Reduktionsgebietes, so liefert diese Abschätzung durchaus brauchbare Ergebnisse, die sich bei genauerer Bestimmung der Geländeparameter h_g und k noch verbessern lassen (Hinger, 1987).

3.3.2. Herleitung und Untersuchung von Näherungsformeln zur Bestimmung der vom Dichtefehler abhängigen Reduktionsgenaugigkeit $\Delta g(\rho)$

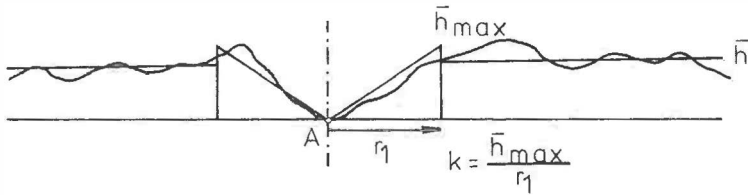
Für die Bestimmung dieser Näherungsformeln gelten prinzipiell dieselben Kriterien wie für jene zur Abschätzung von $\Delta g(h)$. Nähert man aber wie beim konstanten Höhenfehler auch für einen konstanten Dichtefehler d_g die gesamte Reduktionsmasse durch einen volumsgleichen Zylinder an, so zeigt sich bei einer Auswertung der entsprechenden Formel

$$\Delta g(\rho) = 2\pi G d \rho ([r_a + \bar{h} - (\bar{h}^2 + r_a^2)^{1/2}]$$

für verschiedene r_a und \bar{h} , daß vor allem der Nahbereich bis ca. 5 km um den Aufpunkt ausschlaggebend ist, und außerdem die Höhenabhängigkeit sehr groß ist. Demnach muß für eine möglichst genaue Abschätzung das Gelände in diesem Bereich gut angenähert werden. Die Abschätzung mit der mittleren Geländehöhe des gesamten Reduktionsgebietes reicht nicht mehr aus, wenn die Abweichungen von diesem Mittelwert in Aufpunktnähe sehr groß sind. Dies kann vor allem im Gebirge der Fall sein.

Für den Aufbau eines Näherungskörpers, der auch für diese Situation eine relativ einfache und sichere Abschätzung zuläßt, wird nun als Grundlage eine Höhenstatistik von Götze, Rosenbach und Steinhauser, 1980 herangezogen, nach der das Gelände bezogen auf den Aufpunkt durchschnittlich zuerst stiel ansteigt, um sich dann auf einem relativ konstanten Niveau einzupendeln.

Dieser Geländestruktur entsprechend wird in Aufpunktnähe als Näherung ein keilförmiger Rotationskörper gewählt. Der Anstieg k entspricht dabei dem mittleren Anstieg der Gebirgsflanken um den Aufpunkt, und die Höhe \bar{h}_{\max} ist das Mittel der ersten Geländehöhenmaxima um den Aufpunkt. Das restliche Reduktionsgebiet wird durch einen Zylinderring mit der mittleren Geländehöhe \bar{h} angenähert:



Die Wirkung des Rotationskeils läßt sich aus Formel (3.12) ableiten, indem h_g und dh_0 Null und $k = \bar{h}_{\max}/r_1$ gesetzt werden:

$$\Delta g(\varrho)_{\text{Keil}} = 2\pi G d \varrho r_1 \left(1 - \frac{r_1}{(r_1^2 + \bar{h}_{\max}^2)^{1/2}} \right)$$

Für die Wirkung des Zylinderringes gilt:

$$\Delta g(\varrho)_{\text{Zyl}} = 2\pi G d \varrho [r_a - (\bar{h}^2 + r_a^2)^{1/2} + (\bar{h}^2 + r_1^2)^{1/2} - r_1]$$

Für das gesamte $\Delta g(\varrho)$ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \Delta g(\varrho) &= 2\pi G d \varrho [r_a - (\bar{h}^2 + r_a^2)^{1/2} + (\bar{h}^2 + r_1^2)^{1/2} - \frac{r_1^2}{(r_1^2 + \bar{h}_{\max}^2)^{1/2}}] = \\ &= 2\pi G d \varrho [r_a - (\bar{h}^2 + r_a^2)^{1/2} + (\bar{h}^2 + r_1^2)^{1/2} - \frac{r_1}{(1 + k^2)^{1/2}}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Auswertung dieser Formel zeigt, daß bei konstantem k $\Delta g(\varrho) / d$ nahezu linear mit der Höhe steigt. Der Anstieg a der Geraden $k = \text{const}$ hängt wiederum von diesem k , der Steigung des Rotationskeiles, ab.

Diese lineare Beziehung ist darin begründet, daß die Schwerwirkung ähnlich zum Aufpunkt liegender Massen linear proportional zur Ausdehnung dieser Massen ist (Jung, 1961). Die Rotationskeile mit $k = \text{const}$ sind solche ähnlichen Massen, und die unterschiedliche Dimensionierung des restlichen Zylinderrings bei verschiedenem \bar{h}_{\max} bewirkt kaum eine Abweichung von dieser linearen Proportion.

Aus diesem Zusammenhang läßt sich eine lineare Näherung von (3.13) ableiten:

$$\frac{\Delta g(\varrho)}{d \varrho} = a \bar{h}_{\max} \quad \text{mit} \quad a = a(k) \quad (3.14)$$

Das Nomogramm Abb. 7 zeigt den Zusammenhang zwischen k und $a(k)$.

Damit ist eine sehr einfache Möglichkeit hergeleitet, die Wirkung eines konstanten Dichtefehlers auf die Genauigkeit der Massenreduktion abzuschätzen. Aus dem Nomogramm kann der jeweilige Faktor a entnommen und damit aus (3.14) das Verhältnis zwischen $\Delta g(\varrho)$ und $d \varrho$ errechnet werden. Im Vergleich mit dem numerischen Testbeispiel im Hochgebirge liefert diese Abschätzung plausible Ergebnisse.

Resümee der Arbeit und Ausblicke

In dieser Arbeit wurde versucht, für die Untersuchung der Genauigkeit der Massenreduktion möglichst einfache und dennoch sinnvolle Näherungsformeln ausgehend von theoretischen Überlegungen herzuleiten. Überprüfungen am konkreten Beispiel zeigen, daß dieses Ziel erreicht worden ist (Hinger, 1987).

Für eine Erhöhung der Genauigkeit dieser Abschätzungen müßten in weiterführenden Arbeiten noch eingehendere numerische Vergleiche durchgeführt werden, um genauere Zusammenhänge zwischen verschiedenen Geländestrukturen und den Eingangsparametern der Formeln zu finden.

Die in den Abschnitten 3.1 und 3.2 abgeleiteten Formeln für die verschiedenen Einheitsfehler und ihre Zusammenhänge mit dem Dichte- und Höhenfehler pro Berechnungselement des Geländemodells können als Grundlage für die Entwicklung von Programmen dienen, die sowohl eine Berechnung der Reduktionsgenauigkeit aus den Modellfehlern als auch die Bestimmung notwendiger Modellgenauigkeiten bei einer vorgegebenen Reduktionsgenauigkeit ermöglichen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß mit diesen Genauigkeitsuntersuchungen der Massenreduktion nur ein Teil der Gesamtgenauigkeit der Bougueranomalie behandelt worden ist. Für die Bestimmung dieser Gesamtgenauigkeit müßten auch die übrigen Reduktionen, insbesondere der Vertikalgradient in der Freiluftreduktion, auf seine Genauigkeit untersucht werden.

Literatur

- Bartsch, H.-J.*: Mathematische Formeln. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1984
- Götze, H.*: Ein numerisches Verfahren zur Berechnung der gravimetrischen und magnetischen Feldgrößen für dreidimensionale Modellkörper — Dissertation an der Technischen Universität Clausthal, 1976
- Götze, H., Rosenbach, D., Steinhauser, P.*: Die Bestimmung der mittleren Geländehöhen im Hochgebirge für die topographische Reduktion von Schweremessungen — Berichte über den Tiefbau der Ostalpen, Heft 9, Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Publikation Nr. 245, Wien, 1980
- Gutdeutsch, R.*: Anwendungen der Potentialtheorie auf geophysikalische Felder, Kapitel 2.6 — Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986
- Hinger, M.*: Genauigkeitsuntersuchungen zur gravimetrischen Massenreduktion — Diplomarbeit an der TU Wien, 1987
- Jung, K.*: Schwerkraftverfahren der angewandten Geophysik. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1961
- Kertz, W.*: Einführung in die Geophysik 1 — B. I. — Hochschultaschenbücher Band 275, Mannheim, 1969
- Leppich, W.*: Gravimetrische Dichtebestimmung in den westlichen mittleren Tauern (Ostalpen) — Dissertation an der Techn. Univ. Clausthal, 1976
- Ruess, D., Zeger, J., Steinhauser, P.*: Digitales Geländemodell Österreichs — Tagungsbericht über das 3. Alpengravimetrie-Kolloquium Leoben 1983, Heft 12, Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Publikation Nr. 298, Wien, 1985
- Schöler, W.*: Die Krustenstruktur der Ostalpen nach Ergebnissen gravimetrischer Untersuchungen unter Berücksichtigung des gemessenen Vertikalgradienten — Dissertation an der Techn. Universität Clausthal, 1976
- Steinhauser, P.*: Zur Präzisionskalibrierung des La Coste-Romberg-Gravimeter-Modells D — Tagungsbericht über das 1. Alpengravimetrie-Kolloquium Wien 1977, Heft 8, Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Publikation Nr. 244, Wien, 1980
- Walach, G.*: Ein Programmsystem für die automatische Bearbeitung von Schweremessungen unter Verwendung von digitalen Gelände- und Dichtemodellen — Sonderdruck aus Freiburger Forsch. H. C 408, VEB Deutscher Verl. f. Grundstoffindustrie, Leipzig, 1985

Dank

Die Arbeit ist an der Abteilung Geophysik der Technischen Universität Wien (Vorstand: Prof. Dr. A. E. Scheidegger) entstanden, welche die für deren Ausführung notwendige Infrastruktur bereitgestellt hat.

Anhang 0

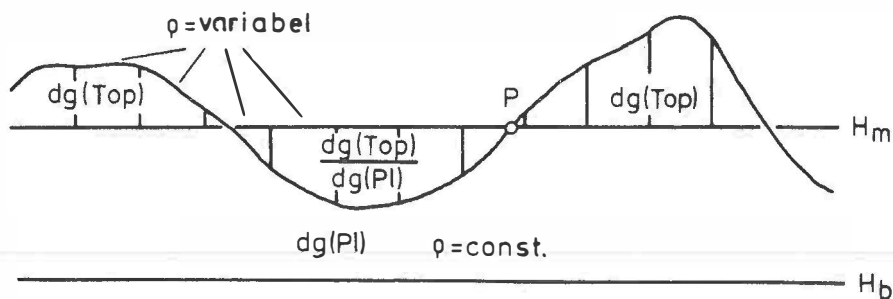


Abb. 1a: Getrennte Gelände- und Plattenreduktion

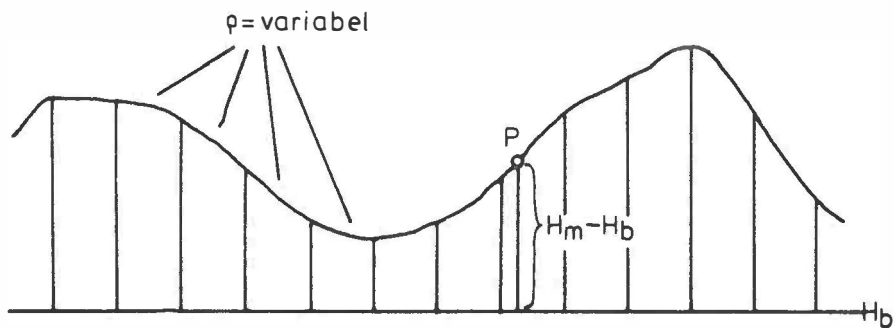


Abb. 1b: Zusammengefaßte Gelände- und Plattenreduktion

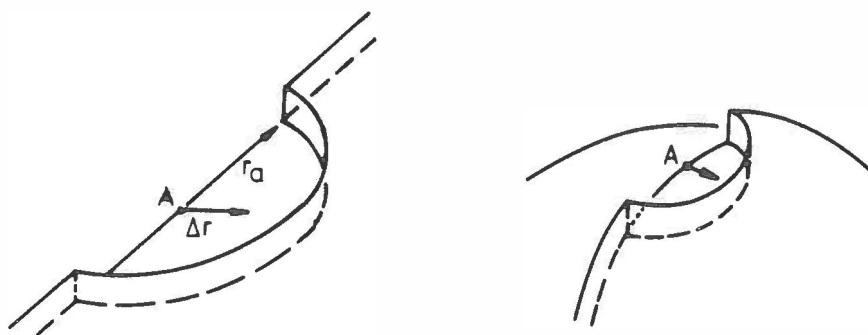


Abb. 2: Darstellung der Restplatten

Anhang 1

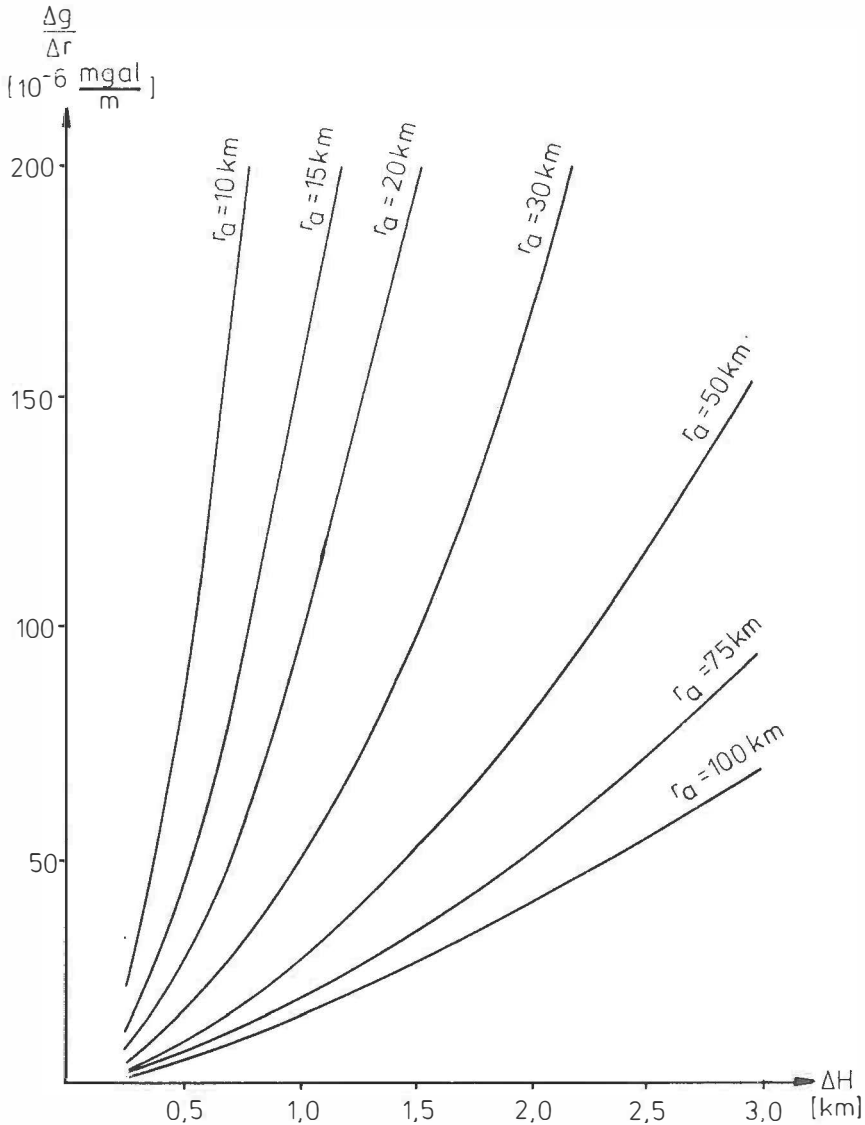


Abb. 3a: Horizontalgradient $\Delta g/\Delta r$ der sphärischen Restplatte in Funktion der Plattendicke ΔH für verschiedene Grensradien r_a des Reduktionsgebietes

Kennt man nun jeweils 3 der 4 Größen r_a , ΔH , Δg und Δr , so läßt sich die vierte Unbekannte entweder direkt oder indirekt über das Verhältnis $\Delta g/\Delta r$ aus der Abbildung ermitteln:

z. B.: geg.: $r_a = 30$ km, $\Delta H = 0,5$ km, $\Delta g = 0,1$ mgal

ges.: Δr

Aus Abb. 3a folgt damit $\Delta g/\Delta r = 16 \cdot 10^{-6}$ mgal/m

Mit $\Delta g = 0,1$ mgal ergibt sich für Δr : $\Delta r = 0,1/16 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 6 \text{ m}$

Anhang 2

In der Abb. 3b ist der direkte Zusammenhang zwischen Meßgebietsgröße Δr und der Plattendicke ΔH für verschiedene Grensradien r_a dargestellt, wenn die Reduktionsgenauigkeit Δg bekannt ist. ($R = 6378 \text{ km}$, $R_2 = D$, $\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3$)

Δr ist dekadisch logarithmisch skaliert:

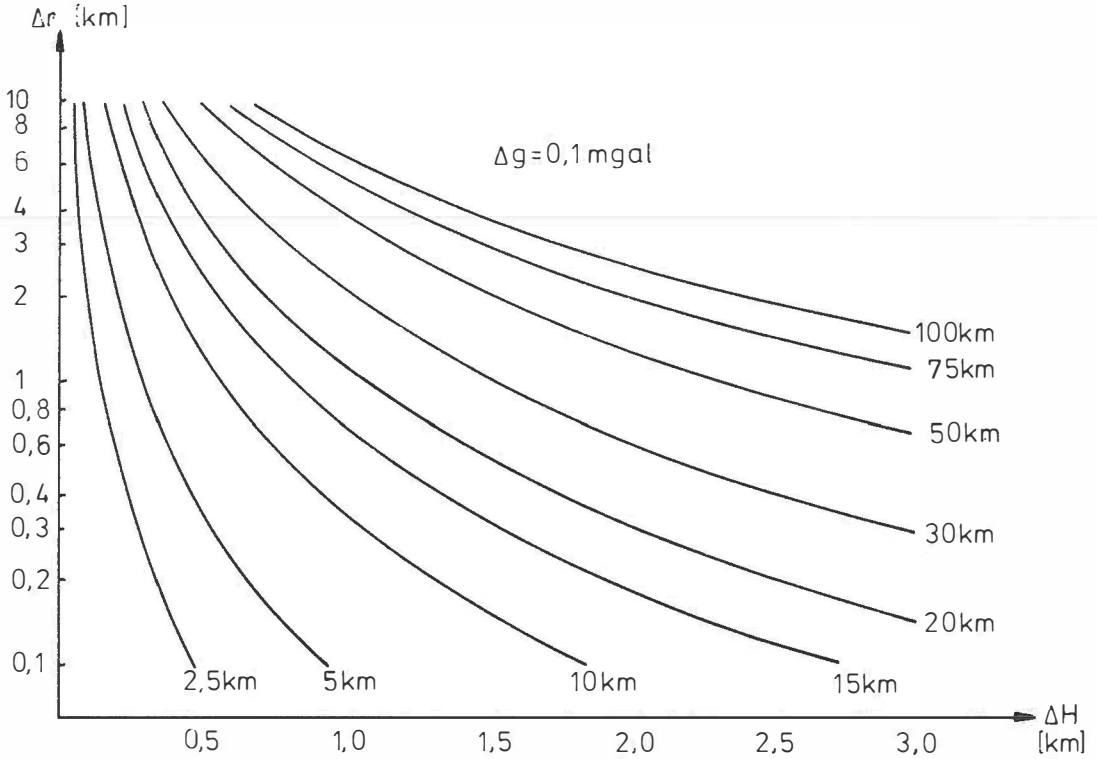


Abb. 3b: Ausdehnung des Meßgebietes Δr in Funktion der Plattendicke ΔH für verschiedene Grensradien r_a des Reduktionsgebietes und für eine Reduktionsgenauigkeit $\Delta g = 0,1 \text{ mgal}$.

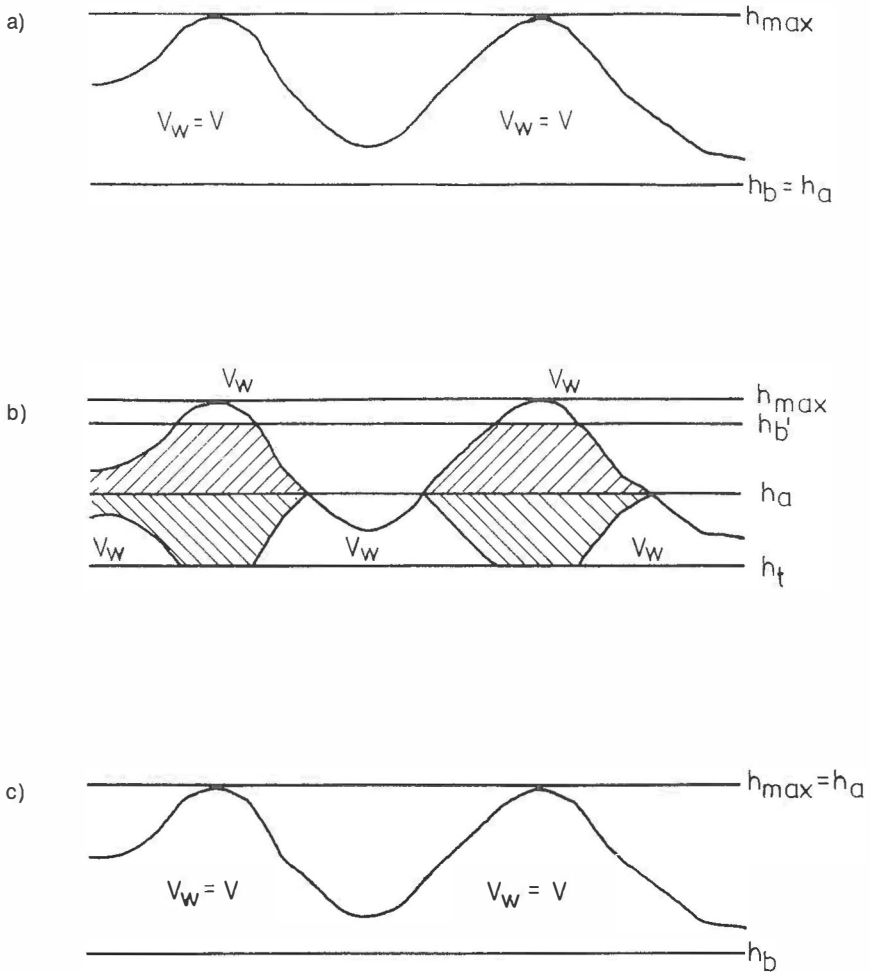
Auch daraus läßt sich wieder die vierte Größe aus den anderen drei bekannten Größen direkt oder indirekt über $\Delta g/\Delta r$, wenn ein anderes Δg als das der Abbildung gegeben bzw. gesucht ist, bestimmen:

z. B. geg.: $\Delta g = 0,05 \text{ mgal}$, $r_a = 30 \text{ km}$, $\Delta H = 0,5 \text{ km}$
 ges.: Δr

Aus Abb. 3b bekommt man für $\Delta g' = 0,1 \text{ mgal}$ ein $\Delta r'$ von ca. 6 km. Mit $\Delta g = 0,05 \text{ mgal}$ folgt daraus:

$$\Delta g'/\Delta r' = 0,1/6 = 0,05/\Delta r \quad \Delta r = 3 \text{ km}$$

Anhang 3

Abb. 4: Das wirksame Volumen V_w für verschiedene Aufpunkthöhen

Diese Abbildungen zeigen, daß für ein bestimmtes Meßpunktniveau h_a zwischen Bezugshöhe h_b und der maximalen Geländehöhe h_{max} V_w minimal wird. Auch gibt es ein Niveau, in dem die Massenreduktion gleich 0 ist, da die Massenwirkung in Abb. 4a entgegengesetztes Vorzeichen zu der in Abb. 4c hat. Beide Niveaus sind aber nicht identisch, weil die Schwerewirkung nicht nur vom Volumen, sondern auch von der Lage dieser zum Aufpunkt abhängt.

In der angewandten Gravimetrie wird in den meisten Fällen die Aufpunkthöhe nicht sehr stark von der Bezugshöhe abweichen und V_w fast gleich V sein.

Anhang 4

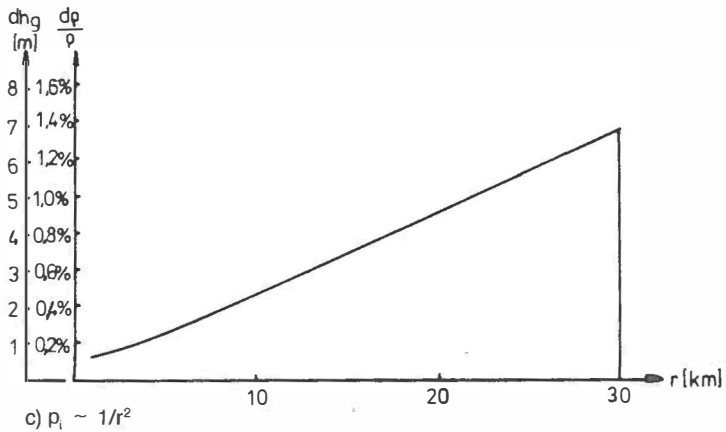
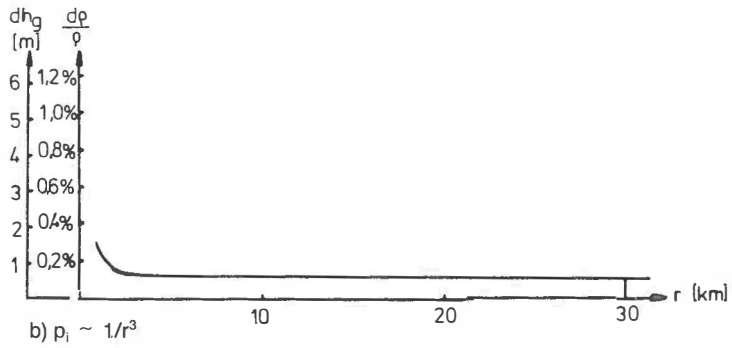
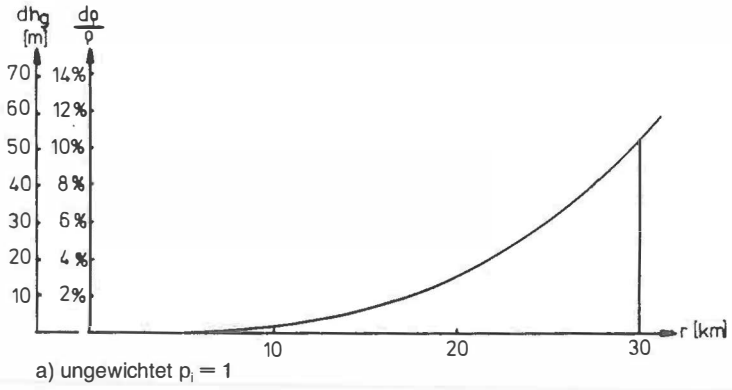


Abb. 5: Höhen- und relative Dichtefehler für eine Masseneinheit (Quader 1 x 1 x 1 km, $\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3$) in Abhängigkeit der Entfernung bei gegebenem verschieden gewichteten Masseneinheitsfehler.

Anhang 5

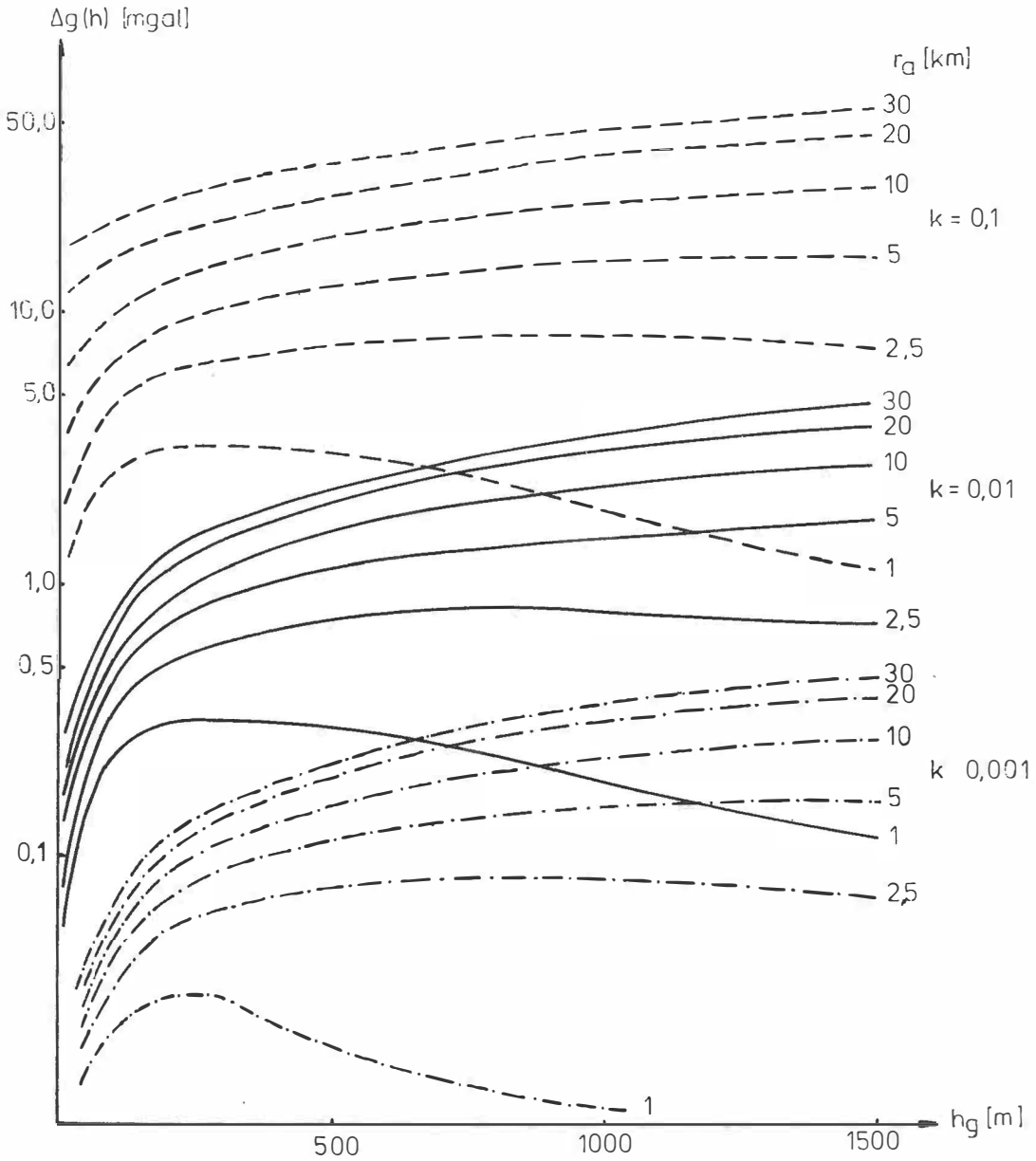


Abb. 6: Reduktionsgenauigkeit $\Delta g(h)$ bei einem mit dem Faktor k linear zur Entfernung zunehmenden Höhenfehler in Abhängigkeit der Höhe für verschiedene k und Reduktionsgebietsradien r_a .

Anhang 6

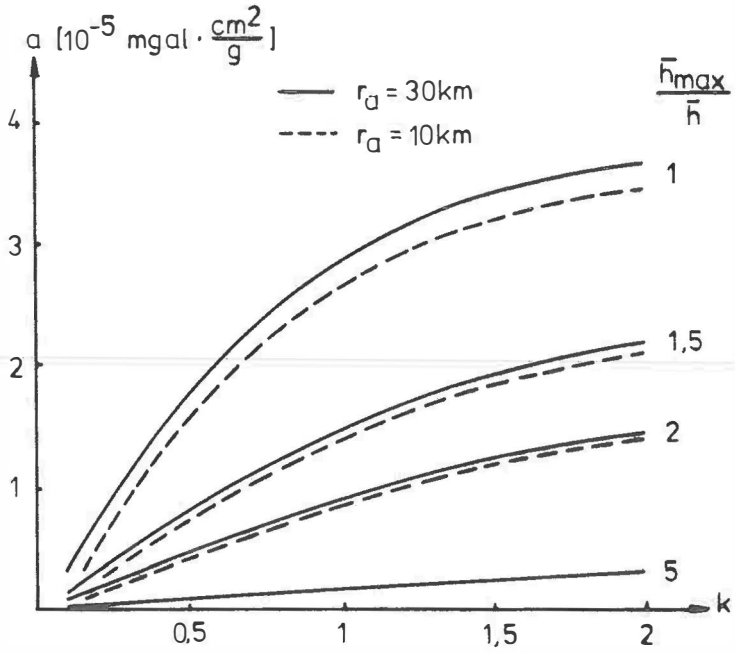


Abb. 7: Steigung a der Formel (3.14) in Funktion des Anstiegs k des Näherungskörpers (nach 3.3.2) für verschiedene r_a und \bar{h} .

Manuskript eingelangt im April 1988