

Paper-ID: VGI_198845



Das Schwerfeld als Bindeglied bei Ingenieurvermessungen

Hans Sünkel ¹

¹ *Abteilung für Mathematische und Datenverarbeitende Geodäsie der Technischen Universität Graz, Rechbauerstraße 12, 8020 Graz*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **76** (3), S. 343–356

1988

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Suenkel_VGI_198845,  
  Title = {Das Schwerfeld als Bindeglied bei Ingenieurvermessungen},  
  Author = {S{\u}nkel, Hans},  
  Journal = {\O}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen und  
    Photogrammetrie},  
  Pages = {343--356},  
  Number = {3},  
  Year = {1988},  
  Volume = {76}  
}
```



Das Schwerfeld als Bindeglied bei Ingenieurvermessungen

Von H. Sünkel, Graz

Zusammenfassung

Ingenieurgeodätische Aufgaben lassen sich im wesentlichen auf das Problem der Bestimmung geometrischer Beziehungen in einem 3-D-Punkthaufen reduzieren, wobei derzeit noch überwiegend klassische Verfahren, in der Zukunft jedoch vermehrt, aber sicher nicht ausschließlich, moderne, praktisch rein-geometrische GPS-Methoden eingesetzt werden.

Da (geodätische) Messungen naturgemäß im Erdschwerfeld erfolgen, beinhalten die Meßergebnisse sowohl geometrische als auch physikalische Information. Um den rein geometrischen Gehalt aus den physikalisch kontaminierten Meßdaten herauszufiltern, ist daher die Kenntnis der Physik in Form des Erdschwerfeldes erforderlich. Erfolg dies (etwa aus Unkenntnis des Erdschwerfeldes oder aus Unkenntnis der Problematik) nicht, so wird der nicht-stochastische Anteil des Erdschwerfeldes implizit als stochastisches Rauschen behandelt, was besonders, aber nicht ausschließlich, in Gebirgsgegenden zu einer signifikanten Verfälschung der scheinbar geometrischen Aussagen führen kann.

Am Beispiel Österreichs wird das Verhalten des lokalen Schwerfeldes, ausgedrückt durch die stark relevanten nullten und ersten Ableitungen (Geoidhöhe, Lotabweichung, Schwerestörung) gezeigt, sowie deren Wirkung auf geodätische Messungen und daraus abgeleitete geometrische Aussagen demonstriert.

1. Geodätische Messungen

Der Geodäsie kommt unter anderem die Aufgabe zu, geometrische Relationen in einem Punkthaufen und deren zeitliche Änderungen sowie das Schwerfeld der Erde zu bestimmen. Zur Erfüllung dieser Aufgaben wurden Meßmethoden speziell auf die jeweiligen Bedürfnisse (Bestimmung der Geometrie oder Bestimmung des Erdschwerfeldes) maßgeschneidert.

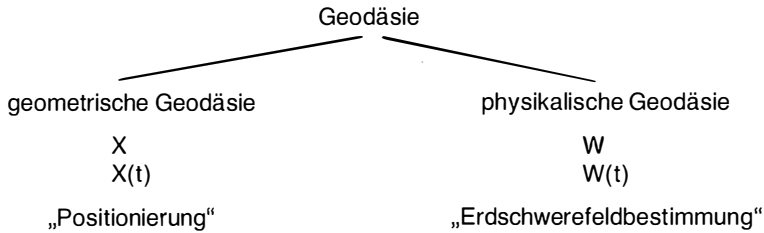
Sämtliche Messungen finden naturgemäß im Erdschwerfeld statt. Geodätische Meßdaten enthalten daher auch Schwerfeldinformation. Geodätische Messungen werden aber nicht ausschließlich vom Erdschwerfeld beeinflusst, sondern spüren auch andere physikalische Felder wie etwa das Magnetfeld, etc. Darüber hinaus sind der geometrische Zustand und die gesamte Meßumgebung (Erdschwerfeld, etc.) laufenden zeitlichen Änderungen unterworfen. Somit sind geodätische Messungen auch zeitabhängig. Und schließlich sind alle Messungen von einem stochastischen Rauschen überlagert.

Folglich läßt sich jede geodätische Messung in folgender Form darstellen:

$$l = f(X, W, F, t) + n \quad (1 - 1)$$

mit l . . . Meßergebnis,
 X . . . Koordinaten (Parameter),
 V . . . Gravitationspotential,
 Ω . . . Rotationspotential,
 W . . . Schwerepotential, $W = V + \Omega$,
 F . . . alle anderen physikalischen Felder,
 t . . . Zeit,
 n . . . Meßrauschen

X und W (geometrische Positionen und das Erdschwerfeld) sind für die Geodäsie primär von Interesse. Die Aufgabe der Geodäsie besteht daher in der bestmöglichen Bestimmung von X und W aus den Meßdaten l . Die geometrische Aufgabe wird wegen des vorwiegenden Koordinaten-Charakters von X als „*Positionierung*“, die Bestimmung von W als „*Erdschwerfeldbestimmung*“ bezeichnet. Entsprechend dieser Unterteilung der Aufgaben gliedert sich auch die gesamte Geodäsie in zwei Bereiche, die geometrische und die physikalische Geodäsie.



In der Folge werden die wichtigsten geodätischen Messungen angeführt, wobei eine Gliederung in Geometrie-bezogene und Erdschwerefeld-bezogene erfolgt. Die Abhängigkeit von den in (1-1) aufgezählten Größen wird jeweils angegeben.

Geodätische Messungen mit vorwiegendem Geometrie-Bezug:

a) Erdoberfläche (E) – Erdoberfläche (E)

Die folgenden Gruppen von geodätischen Messungen werden zu den klassischen geodätischen Messungen gezählt und beziehen sich ausnahmslos auf Punkte auf der Erdoberfläche:

Distanzen

Bei Nichtbeachtung relativistischer Effekte hat eine Distanzmessung zwischen zwei Punkten rein geometrischen Gehalt, der überlagert ist von den Einflüssen anderer physikalischer Felder (Erdatmosphäre, etc.). Auf Grund der Dynamik jedes Punkthaufens ist die Distanz einer zeitlichen Änderung unterworfen.

$$l = f(E_1; E_2; F; t) + n$$

Horizontalwinkel

Eine Horizontalwinkelmessung erfordert drei Punkte; sie ist daher von diesen drei Positionen an der Erdoberfläche abhängig. Der Begriff „horizontal“ bringt aber bereits zum Ausdruck, daß die Messung in bezug auf die örtliche Horizontale erfolgt. Diese Horizontale ist aber Tangentialebene an die örtliche Äquipotentialfläche (Niveaufläche), also eine ausgezeichnete Fläche des Erdschwerefeldes, und somit ist eine Messung eines Horizontalwinkels vom Erdschwerefeld abhängig. Die Abhängigkeit von anderen physikalischen Feldern, subsumiert in F, wie etwa dem Zustand der Erdatmosphäre etc., sowie die zeitliche Abhängigkeit zufolge der Positionsänderung der Meßpunkte und der Zustandsänderung von W und F ist evident.

$$l = f(E_1; E_2; E_3; W; F; t) + n$$

Vertikalwinkel

Eine Vertikalwinkelmessung erfolgt immer in bezug auf die lokale Vertikale (oder auch Horizontale – dann spricht man von Höhenwinkel) und der Richtung zu einem Punkt. Damit ist diese Messung von nur zwei Punkten an der Erdoberfläche abhängig und wegen des Bezugs auf die Vertikale (oder Horizontale) aus oben bereits erwähnten Gründen auch vom lokalen Erdschwerefeld im Standpunkt abhängig. Bezüglich der Abhängigkeit von F gilt oben Gesagtes unverändert auch hier.

$$l = f(E_1; E_2; W; F; t) + n$$

Nivellierte Höhenunterschiede

Der Begriff „Nivellieren“ bringt bereits zum Ausdruck, daß hier Niveauflächen im Spiel sein müssen. Durch Nivellieren ermittelt man den Abstand von Niveauflächen (den Höhenunterschied zweier Punkte), womit Messungen dieser Art natürlich von der Lage zweier Punkte und vom lokalen Erdschwerefeld abhängig sind. Die Abhängigkeit von F und der Zeit t

ergibt sich aus denselben Gründen wie oben.

$$l = f(E_1; E_2; W; F; t) + n$$

b) Erdoberfläche (E) – Satellit (S)

Um Positionen mit hoher Genauigkeit über sehr große Entfernungen direkt (ohne Oberflächennetze bemühen zu müssen) übertragen zu können, benötigt man einen „Zielpunkt“, welcher von beiden Orten aus sichtbar ist. (Dies ist auch der Grund, warum geodätische Netzpunkte hoher Genauigkeit wenn möglich auf Berggipfeln gewählt wurden.) Noch weiter entfernt als Berggipfel sind offenbar Erdsatelliten, die den großen Vorteil bieten, von sehr weit entfernten Punkten gleichzeitig gesehen zu werden, jedoch auch den Nachteil haben, ihre Position mit sehr hoher Geschwindigkeit zu verändern. Sie eignen sich vorzüglich zur Positionsübertragung über sehr große Distanzen und werden eben zu diesem Zweck seit etwa zwei Jahrzehnten eingesetzt.

Raumrichtungen

Optische Methoden finden in der Geodäsie seit jeher Anwendung. Daher ist es auch logisch, daß es auch optische Methoden waren, die in den Anfängen der Satellitengeodäsie eingesetzt wurden. Es waren Messungen der Raumrichtung zu einem Satelliten durch Fotografie des Satelliten vor dem Sternenhintergrund und anschließende Interpolation der Satelliten „spur“ im System der bekannten Sternen „spuren“. Messungen dieser Art sind wie jede Richtungsmessung von der Position der zu verbindenden Punkte abhängig. Hier besteht das Problem darin, daß einer der beiden Punkte (der Satellit) seine Position mit sehr hoher Geschwindigkeit ändert. Die Satellitenbahn wiederum ist abhängig von einem Anfangszustand des Satelliten, ausgedrückt etwa durch 6 Parameter einer Keplerellipsenbahn (im folgenden als „Zustandsvektor“ Z bezeichnet) und vom Gravitationsfeld V der Erde (man beachte: Gravitationsfeld und nicht Schwerfeld). Darüber hinaus wird die Messung einer Raumrichtung vom Zustand der Erdatmosphäre, dem Strahlungsdruck der Sonne, etc., also von diversen physikalischen Feldern beeinflusst und ist in hohem Maße zeitabhängig.

$$l = f(E_1; Z_1; V; F; t) + n$$

Raumdistanzen

Raumdistanzen zwischen einer Bodenstation auf der Erdoberfläche und Satelliten werden mittels Laser mit einer Genauigkeit von wenigen Zentimetern über viele tausend Kilometer gemessen (Satellite Laser Ranging, SLR). Auch in diesem Fall finden wir wieder dieselben Abhängigkeiten wie bei Richtungsmessungen.

$$l = f(E_1; Z_1; V; F; t) + n$$

Raumdistanzänderungen

Vor etwa 15 Jahren begann man, unter Ausnützung des Dopplereffektes die Änderung der Raumdistanz von aktiven Satelliten mit hoher Genauigkeit zu messen. Die so erhaltenen Daten lieferten vorzügliche Absolutkoordinaten (bezogen auf den Erdschwerpunkt) und trugen in Verbindung mit physikalischer Information sehr wesentlich auch zur Erdschwerfeldbestimmung bei. Die Abhängigkeit einer Dopplermessung ist im Prinzip gleich wie oben.

$$l = f(E_1; Z_1; V; F; t) + n$$

Trägerwellen-Phasenmessung

Seit einigen Jahren befindet sich das Globale Positionierungs-System im Aufbau, welches insbesondere für geodätische Zwecke Relativpositionierung mit extrem hoher Genauigkeit in kurzer Zeit erlaubt, wobei die Änderung der Phase von Trägerwellen die starke Informationsquelle darstellt. Die GPS-Satelliten befinden sich in Bahnen in etwa 20.000 km Höhe, also in einer so großen Erdentfernung, daß ihre Bahnen von den lokalen Einflüssen der Unregel-

mäßigkeiten des Gravitationsfeldes der Erde weitgehend verschont bleiben. Daher ist die Bahnbestimmung deutlich einfacher als im Falle niedrig fliegender Satelliten (wie etwa bei Doppler-Satelliten); die Abhängigkeit vom Erdschwerefeld ist aber dennoch gegeben (wenn auch in stark abgeschwächter Form) und ebenso werden diese Satelliten und damit ihre Bahnen vom Strahlungsdruck der Sonne etc. beeinflusst. Trägerwellen-Phasenmessungen zeigen daher ein prinzipiell gleiches Abhängigkeitsmuster wie die oben diskutierten Messungen.

$$I = f(E_1; Z_1; V; F; t) + n$$

c) Erdoberfläche (E) – Quasare (Q)

Der aufmerksame Leser wird möglicherweise festgestellt haben, daß sich die geodätischen Hochziele im Laufe der Entwicklung geodätischer Meßtechniken mit Geometrie-Bezug zusehends von der Erde entfernt haben. Der Grund liegt einfach darin, daß weiter entfernte Objekte vom Erdschwerefeld und seinen Unregelmäßigkeiten mit zunehmender Entfernung immer weniger beeinflusst werden. Da aber die Physik (das Erdschwerefeld) die Bestimmung geometrischer Relationen stört, versucht man, Meßobjekte möglichst weit von der Erde zu entfernen. Quasare sind ganz besonders weit entfernt (Milliarden von Lichtjahren) und eignen sich daher vorzüglich zur Relativpositionierung höchster Genauigkeit über sehr große Entfernungen (interkontinentale Distanzen). Das Meßprinzip ist das der Radio-Interferometrie (Very Long Baseline Interferometry, VLBI), wobei die zeitliche Verzögerung des Eintreffens von Radio-Signalen eines Quasars (mehrerer Quasare) zwischen zwei und mehreren Radio-Teleskopen gemessen wird. Aus den oben erwähnten Gründen sind solche Messungen praktisch absolut frei von jeglichem Erdschwerefeldeinfluß.

$$I = f(E_1; E_2; Q; F; t) + n$$

Geodätische Messungen mit vorwiegendem Erdschwerefeld-Bezug

Im Gegensatz zu geodätischen Messungen mit starkem Geometrie-Bezug wird man zur Bestimmung des Erdschwerefeldes nach Meßanordnungen trachten, welche maximale Sensibilität bezüglich dieses Feldes aufweisen. Dies ist dann gegeben, wenn sich die Erdschwerefeldsensoren möglichst nahe an der Quelle (Erdkörper) befinden.

a) Erdoberfläche (E)

Astronomische Ortsbestimmung

Die Richtung des Gradienten des Schwerepotentials ist bekanntlich die Richtung des Schwerevektors und damit die Lotrichtung. Messungen dieser Richtung enthalten daher direkte Information über die Richtung der maximalen Änderung dieses Feldes. Da sie mit relativ einfachem geodätisch-astronomischen Instrumentarium ausgeführt werden können, zählen diese Messungen zu den ältesten Erdschwerefeldmessungen überhaupt. Das Meßergebnis ist natürlich vom Ort der Messung und aus den besagten Gründen vom lokalen Erdschwerefeld abhängig. Da sich astronomische Messungen des Sternenlichts bedienen und dieses die Erdatmosphäre passieren muß, sind diese Messungen auch von diesem Feld abhängig. Die zeitliche Abhängigkeit folgt vor allem aus der Dynamik des Erdkörpers.

$$I = f(E_1; W; F; t) + n$$

Gravimetrie

Im Gegensatz zur astronomischen Ortsbestimmung wird in der Gravimetrie der Betrag des Schwerevektors gemessen, wobei das Prinzip des freien Falls für Absolutschweremessungen und das mechanischer Systeme, die sich nahezu im labilen Gleichgewicht befinden, für Relativschweremessungen zur Anwendung kommen. Absolutschweremessungen gehören im übrigen zu den genauesten Messungen der Physik überhaupt (10^{-9}).

$$I = f(E_1; W; F; t) + n$$

b) Erdoberfläche (E) – Satellit (S)

Astronomische Ortsbestimmungen und Schweremessungen sind einerseits sehr zeit- und damit kostenintensiv und andererseits mit hinreichender Genauigkeit praktisch nur auf dem Festland durchzuführen. Zwei Drittel der Erdoberfläche (die Ozeangebiete) entziehen sich damit einer Erdschwerefeldmessung dieser Art. Daher wurden vor etwa 15 Jahren Methoden entwickelt, welche diese große Lücke schließen sollten.

Satelliten-Altimetrie

Die Oberfläche der Meere stellt in sehr guter Näherung eine Fläche konstanten Schwerepotentials dar (Äquipotentialfläche). Wenn ein Satellit seinen Abstand von dieser Meeresoberfläche laufend mißt und die Bahn des Satelliten bekannt ist, dann sind aus solchen Messungen Lage und Form der Meeresoberfläche und damit in guter Näherung auch die des Geoids (= Äquipotentialfläche im mittleren Meeresniveau) ableitbar. Somit läßt sich eine Satelliten-Altimeter-Messung in Funktion des Initial-Zustandsvektors im Orts-Geschwindigkeitsraum, des Erdschwerefeldes sowie der anderen physikalischen Felder und natürlich der Zeit darstellen.

$$l = f(Z_1; W; F; t) + n$$

c) Satellit (S) – Satellit (S)

Die Bahn eines Satelliten ist bekanntlich vom Gravitationsfeld der Erde abhängig. Somit beinhalten Daten über Satellitenbahnen auch Informationen über das zugrundeliegende Gravitationsfeld der Erde.

Satellite-to-Satellite-Tracking (SST)

Eine Differentiation verstärkt bekanntlich proportional der Frequenz eines Signals. Mißt man laufend die Entfernungsänderung zweier Satelliten (idealerweise zweier niedrig fliegender Satelliten), so beinhalten diese Messungen Informationen über Details (höherfrequente Anteile) des Gravitationsfeldes der Erde. Satelliten-Missionen in diesem Tandem-Mode sind daher geeignet, das Erdschwerefeld global mit relativ hoher Auflösung abzubilden. Die Meßgröße (Entfernungsänderung) ist eine Funktion der Zustandsvektoren der beiden beteiligten Satelliten zu einem bestimmten Referenzzeitpunkt, des Gravitationsfeldes und wegen des Strahlungsdrucks der Sonne etc. auch eine Funktion von F und wegen der schnellen zeitlichen Änderung der Konfiguration natürlich eine Funktion der Zeit.

$$l = f(Z_1; Z_2; V; F; t) + n$$

Satelliten-Gradiometrie

Unter Gradiometrie versteht man die Messung der zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials (Elemente des Gravitationstensors zweiter Ordnung). Hochsensible Meßanordnungen, beruhend auf der Messung von Beschleunigungen, werden derzeit erprobt und vermutlich 1993 erstmals im Rahmen der Aristoteles-Mission der ESA in etwa 200 km Höhe eingesetzt. Gradiometer-Daten werden es uns erlauben, das Geoid global mit einer Genauigkeit von etwa 20 cm zu bestimmen und damit die Genauigkeit der heutigen globalen Erdschwerefeldlösungen um einen Faktor von etwa 5–10 zu steigern.

$$l = f(S_1; V; F; t) + n$$

2. Das funktionale Modell

In Abschnitt 1 haben wir versucht zu zeigen, daß sämtliche geodätische Daten sowohl geometrische als auch physikalische Information beinhalten. Die Abhängigkeit der Daten von den (meist geometrischen) Parametern, dem Erdschwerefeld, den anderen physikalischen Feldern sowie der Zeit ist im allgemeinen eine *nichtlineare*. Das Problem der Geodäsie besteht nun darin, vor allem den Parametervektor und das Erdschwerefeld aus den vorhandenen Daten (Vektor l) bestmöglich zu schätzen.

Da lineare Systeme ungleich einfacher als nichtlineare sind, versuchen wir das Problem zu linearisieren. Zu diesem Zweck stellen wir die reale Welt dar durch die Summe aus einem realitätsnahen Modell und einem Residuum:

$$\text{Realität} = \text{Modell} + \text{Residuum}$$

Somit lassen sich auch alle Größen zerlegen in einen Modellanteil und einen Residualanteil:

$$\begin{aligned} X &= X^\circ + \delta X \\ W &= W^\circ + \delta W \\ F &= F^\circ + \delta F \\ t &= t^\circ + \delta t \\ I &= I^\circ + \delta I \end{aligned} \quad (2-1)$$

Der geodätische Datenvektor läßt sich so darstellen als

$$I^\circ + \delta I = f(X^\circ + \delta X; W^\circ + \delta W; F^\circ + \delta F; t^\circ + \delta t) + n, \quad (2-2)$$

wobei die Gesamtheit

$$(X^\circ; W^\circ; F^\circ; t^\circ) \quad (2-3)$$

den „Taylorpunkt“ bezeichnet mit

- X° . . . Modell der Parameter (Koordinaten),
- W° . . . Modell des Erdschwerefeldes,
- F° . . . Modell der anderen physikalischen Felder,
- t° . . . Modellzeit,
- I° . . . Modelldaten.

Die Linearisierung erfolgt natürlich am Taylorpunkt und führt auf

$$I = I^\circ + \frac{\partial f^\circ}{\partial X} \delta X + \frac{\partial f^\circ}{\partial t} \delta t + L_W^\circ \delta W + L_F^\circ \delta F + n, \quad (2-4)$$

wobei die Modelldaten I° in Funktion der Modellgrößen durch

$$I^\circ := f(X^\circ; W^\circ; F^\circ; t^\circ) \dots \text{Modelldaten} \quad (2-5)$$

gegeben sind. In (2-4) sind die partiellen Ableitungen der Funktion f nach dem Parametervektor X und der Zeit t elementar, die beiden Terme L_W° und L_F° dagegen stellen einen Operator (Vektor von linearen Funktionalen) bezüglich der Residualfelder δW und δF dar und sind daher keineswegs elementar.

Die numerische Berechnung dieser Modelldaten ist nicht einfach, insbesondere weil das Modell-Schwerefeld W° beim derzeit bereits hoch entwickelten Stand der Modellbildung durch eine sehr große Anzahl von Parametern beschrieben wird (siehe Kapitel 3). Die Abspaltung dieser Modelldaten I° von den tatsächlichen Meßdaten I , also die Bildung der Datenresiduen δI , bezeichnet man allgemein als „Datenfilterung“.

$$\delta I := I - I^\circ \dots \text{Datenfilterung} \quad (2-6)$$

Nun wollen wir aus Gründen der Einfachheit die meist berechnete und noch öfter bemühte Annahme machen, daß die in F subsumierten physikalischen Felder bereits so gut durch das Modell F° abgebildet werden, daß wir mit gutem Gewissen auf eine Berücksichtigung des Residuums δF verzichten können. Weiters wollen wir die Zeit im Parametervektor X inkludieren. Dann lassen sich die Datenresiduen darstellen als Linearkombination dreier Anteile: eines deterministischen Anteils, repräsentiert durch die Parameterresiduen, eines residualen Schwerefeldanteils, der in der Folge mit Methoden der Statistik behandelt und

daher hier als statistischer Anteil bezeichnet wird, und eines stochastischen Anteils, repräsentiert durch das Rauschen in unseren Daten.

$$\delta l = \frac{\partial f^e}{\partial X} \delta X + L_w^* \delta W + n \tag{2 - 7}$$

stochastischer Anteil
statistischer Anteil
deterministischer Anteil

Das Problem der bestmöglichen Schätzung des Parametervektors X und des Erdschwerefeldes W aus dem Datenvektor l hat sich nach der Datenfilterung auf das lineare Problem der Inversion von (2 - 7) reduziert. Bevor wir jedoch diesen Inversionsprozeß in Angriff nehmen können, bedarf es wohl noch einiger Vorbemerkungen.

Wenn sich, wie allgemein üblich, das tatsächliche Schwerefeld und das Modell-Schwerefeld das Rotationsfeld teilen, so enthält das Restschwerefeld keinen Rotationsanteil und hat daher rein gravitationellen Charakter.

$$\delta W = V - V^o \tag{2 - 8}$$

Gravitationsfelder sind aber harmonisch im massenfreien Raum und erfüllen folglich dort die Laplace'sche Differentialgleichung

$$\text{div grad } \delta W = 0. \tag{2 - 9}$$

Da sämtliche Entwicklungsfunktionale bezüglich des Restfeldes δW beschränkt sind, kann δW als ein Element aus einem Hilbert-Raum H mit reproduzierendem Kern K betrachtet werden, wobei die Kernfunktion die Eigenschaften der Harmonizität, der Symmetrie, der Homogenität und Isotropie und der positiven Definitheit besitzen muß. Eine solche Kernfunktion läßt sich bei Berücksichtigung des Additionstheorems für Kugelfunktionen als Linearkombination Legendre'scher Polynome darstellen:

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \left[\frac{R^2}{r_P r_Q} \right]^{n+1} P_n(\cos \psi_{PQ}) \tag{2 - 10}$$

- R . . . Harmonizitätsbereich: $r > R$,
- ψ_{PQ} . . . sphärische Distanz PQ,
- $P_n(\cos \psi)$. . . Legendresches Polynom vom Grad n,
- k_n . . . „Gradvarianzen“.

Falls die Kernfunktion die statistischen Eigenschaften des Restpotentials δW abbildet, so läßt sie damit optimale Schätzungen im Sinne minimaler Schätzfehler zu. In diesem Fall heißt die Kernfunktion Kovarianzfunktion (des Restpotentials); sie kann aus einer hinreichend großen Menge von Datenresiduen δl empirisch ermittelt werden.

Kehren wir nun aber wieder zurück zu unserer eigentlichen Aufgabe, der optimalen Schätzung des Residuenvektors δX und des Restpotentials δW . Aus Gründen der Einfachheit bedienen wir uns einer kompakteren Notation und setzen

$$\begin{aligned} A &:= \frac{\partial f^e}{\partial X} \\ B &:= L_w^* , \\ G &:= [A \ B] , \\ Y &:= \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta W \end{bmatrix} , \end{aligned} \tag{2 - 11}$$

sodaß

$$\delta l = A \delta X + B \delta W + n .$$

Wenn q Daten und p Parameter vorliegen, so gilt

$$\begin{aligned} \delta l, n &\in R^q \\ \delta X &\in R^p \\ \delta W &\in H. \end{aligned} \quad (2-12)$$

Die Datenresiduen lassen sich damit sehr einfach darstellen als

$$\delta l = G Y + n \quad (2-13)$$

und die Schätzung der Parameterresiduen δX und des Restpotentials δW als

$$Y = G^{-1} \delta l, \quad (2-14)$$

wobei zu beachten ist, daß G^{-1} wegen der Mehrdeutigkeit der Lösung ein verallgemeinerter inverser Operator ist. Wir haben demnach ein *Improperly posed problem* vor uns und werden uns zur Lösung einer *Tikhonov-Regularisierung* bedienen.

In diesem Sinne suchen wir eine optimale Lösung im Sinne minimaler Norm

$$\| Y \|^2 + \| n \|^2 = \text{Minimum} \quad (2-15a)$$

unter der Nebenbedingung (2-13),

$$\delta l = G Y + n, \quad (2-15b)$$

wobei Y als Element des Produktraumes $R^p \times H$ die Norm $\| Y \|^2$,

$$\| Y \|^2 = \delta X^T P \delta X + (\delta W, \delta W)_H \quad (2-16a)$$

und n die Norm $\| n \|^2$ mit

$$\| n \|^2 = n^T D^{-1} n \quad (2-16b)$$

besitzen. Hier bedeuten

P^{-1} . . . a priori Varianz-Kovarianzmatrix der Parameter,
 D^{-1} . . . a priori Varianz-Kovarianzmatrix des Meßrauschens.

Das obige Variationsproblem wird gelöst durch Minimierung von

$$\Psi := \frac{1}{2} \delta X^T P \delta X + \frac{1}{2} (\delta W, \delta W)_H + \frac{1}{2} n^T D^{-1} n - k^T (A \delta X + B \delta W + n - \delta l) = \text{Min}. \quad (2-17)$$

und liefert als Ergebnis die beste lineare erwartungstreue Schätzung für den Rest-Parametervektor δX und das Restpotential δW

$$\begin{aligned} \delta \hat{X} &= [A^T(C + D)^{-1} A + P]^{-1} A^T(C + D)^{-1} \delta l \\ \delta \hat{W} &= (B K)^T (C + D)^{-1} (\delta l - A \delta \hat{X}) \end{aligned} \quad (2-18)$$

mit der Daten-Kernmatrix (Kovarianzmatrix) C

$$C := B(B K)^T. \quad (2-19)$$

Schließlich erhält man durch Addition der Modellanteile X^o und W^o sowohl die beste Schätzung für den Parametervektor X als auch für das Erdschwerepotential W :

$$\begin{aligned} \hat{X} &= X^o + \delta \hat{X} \\ \hat{W} &= W^o + \delta \hat{W} \end{aligned} \quad (2-20)$$

Die hier vorgestellte Kollokationsmethode erlaubt aber darüber hinaus auch noch die Prädiktion beliebiger Erdschwerefeldgrößen, welche durch lineare Funktionale L_s repräsentiert sind,

$$\begin{aligned} \hat{s} &= L_s \hat{W} \\ &= L_s W^o + L_s \delta \hat{W} \\ \hat{s} &= L_s W^o + L_s (B K)^T (C + D)^{-1} (\delta l - A \delta \hat{X}) \end{aligned} \quad (2-21)$$

und die Schätzung der Fehlerkovarianzmatrizen der Parameter

$$\Sigma_{xx} = [A^T(C + D)^{-1} A + P]^{-1} \quad (2-22)$$

und der geschätzten Erdschwerefeldgrößen (Signale)

$$\begin{aligned} \Sigma_{ss} &= L_s (L_s K)^T - \\ &- L_s (BK)^T (C + D)^{-1} \{ I - A [A^T(C + D)^{-1} A + P]^{-1} \cdot \\ &\cdot A^T (C + D)^{-1} \} (B K) L_s^T \end{aligned} \quad (2-23)$$

(Die Diagonalelemente der Matrizen Σ_{xx} und Σ_{ss} sind die Fehlervarianzen [mittleren quadratischen Fehler] der geschätzten Größen.)

Dem interessierten Leser sei als umfassende Literatur zu diesem Thema das vorzügliche Buch „Advanced Physical Geodesy“ von H. Moritz wärmstens empfohlen.

3. Das Schwerfeld in Österreich

Zur Reduktion klassisch geodätischer Beobachtungen benötigen wir lokale Erdschwerefeldinformation in Form von Geoidhöhe, Lotabweichungskomponenten und Schwere an beliebig wählbaren Punkten bzw. entlang eines beliebig wählbaren Meßweges. Dieser Forderung stehen lokale Erdschwerefelddaten (Lotabweichungen, Schwerewerte) mit mehr oder weniger flächenhafter Verteilung gegenüber. Wir haben daher das Problem zu lösen, auf der Grundlage des vorhandenen Schwerfeldmaterials an beliebigen Punkten Erdschwerefeldgrößen wie Geoidhöhe, Lotabweichungskomponenten und Schwere vorherzusagen.

Da das Schwerfeld sehr viel glatter ist als das Feld seiner ersten (und erst recht höheren) Ableitungen, war es zunächst naheliegend, der Geoidbestimmung höchste Priorität beizumessen. Bereits im Jahre 1953 startete Litschauer einen ersten recht bemerkenswerten Versuch, das Geoid für Österreich aus den damals vorhandenen etwa hundert Lotabweichungsdaten nach dem Prinzip der astrogeodätischen Geoidbestimmung zu berechnen, wiewohl auf Grund der geringen Datendichte und Nichtberücksichtigung topographischer Einflüsse die Relativgenauigkeit von etwa ± 1 m über 50 km nicht sehr ermutigend war.

Ende der siebziger und Anfang der achtziger Jahre erfolgte schließlich im Rahmen mehrerer Projekte des Österreichischen Forschungsförderungsfonds und des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen die Messung eines äußerst dichten Netzes von Lotabweichungen sowie die Erstellung eines digitalen Höhenmodells (DHM), wodurch die wesentlichen Voraussetzungen für eine detaillierte Geoidbestimmung für zwei Drittel des Bundesgebietes gegeben waren. Unabhängig voneinander wurde für das Gebiet $\lambda \geq 12^\circ 20'$ am Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen in Wien (Erker, 1983) unter Anwendung klassischer Methoden und, aufbauend auf die Pilotstudie „Testnetz Steiermark“, an der Technischen Universität Graz (Sünkel, 1983) mit modernen Methoden eine Geoidbestimmung durchgeführt. Die Relativgenauigkeit der beiden Lösungen lag bei etwa $\pm 1-1,5$ cm über 1 km und war damit um das 10fache besser als Litschauers Lösung. Der Grund für diese dramatische Genauigkeitssteigerung lag einerseits in der fünfmal höheren Datendichte der Lotabweichungen und andererseits in der Einbeziehung der topographisch-isostatischen Reduktion unter Verwendung eines $20'' \times 20''$ DHM.

Während der vergangenen fünf Jahre wurde sowohl das gesamte Bundesgebiet (also auch $\lambda < 12^\circ 20'$) mit Lotabweichungsmessungen aufgefüllt, sodaß nunmehr eine weitgehend homogene Datenbedeckung von 683 Lotabweichungen mit einem mittleren Punktabstand von etwa 12 km vorliegt, als auch ein neues, wesentlich besseres und höher auflösendes DHM mit

einem Gitterabstand von $11.25'' \times 18.75''$ erstellt. Darüber hinaus steht nun ein digitales Dichtemodell (DDM) mit einer Auflösung von $1.5' \times 2.5'$ für Österreich und nähere Umgebung sowie ein $5' \times 5'$ globales DHM und ein neues globales Erdmodell, vollständig bis Grad 360, zur Verfügung. Daneben verfügt Österreich über ein rechteckiges, homogenes Netz von 41 Doppelpunkt-Punkten mit einem mittleren Punktabstand von ca. 50 km sowie über ca. 26.000 Schweredaten, die allerdings nicht homogen verteilt sind.

Mit Ausnahme der Schweredaten wurden alle o. a. Daten für eine erneute Erdschwerfeldbestimmung herangezogen, welche im Sommer 1987 abgeschlossen werden konnte (Sünkel, 1987). Wie bereits 1983 erfolgte unabhängig davon am Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen in Wien eine Geoidbestimmung mit klassischen Methoden (Erker, 1987), und an der TU Graz eine allgemeine, umfassende Erdschwerfeldbestimmung (mit der Geoidbestimmung als Teil davon) unter Einsatz der modernsten derzeit zur Verfügung stehenden Methode (Kollokation nach kleinsten Quadraten mit Parametern „remove-restore“ – Sandwichverfahren über ein isostatisches Modell) (Sünkel, 1987). Diese „Grazer Lösung 1987“ weist Relativgenauigkeiten der Geoidhöhen von ± 5 cm über eine Distanz von 100 km auf und erlaubt die Prädiktion von Lotabweichungen mit einer Genauigkeit von $\pm 0.8''$. In Gebieten mit ausreichender Schweredatendichte sind unter Einsatz dieses Verfahrens Prädiktionen von Punktschwerewerten mit einer Genauigkeit von etwa ± 1.5 mgal möglich. Diese wirklich beachtlichen Ergebnisse suchen ihresgleichen. Österreich verfügt damit vermutlich weltweit über das bestbestimmte Schwerfeld.

4. Der Einfluß des Schwerfeldes auf klassisch-geodätische Beobachtungen

Wie in Abschnitt 1 erläutert, enthalten herkömmliche geodätische Beobachtungen neben vorwiegend geometrischer Information auch Schwerfeldinformation. Um solche Daten auf ihren geometrischen Gehalt zu reduzieren (denn nur dieser ist für den Geometer von Interesse), muß ihr Schwerfeldanteil „herausgefiltert“ werden. Vier Erdschwerfeldgrößen spielen dabei eine große Rolle: Geoidhöhe N , die beiden Lotabweichungskomponenten ξ , η und die Schwere g .

In der Folge seien jene Korrekturterme angegeben, welche die o. g. „Geometrisierung“ geodätischer Meßgrößen bewerkstelligen (Heiskanen and Moritz (HM), 1967, p. 189 ff.):

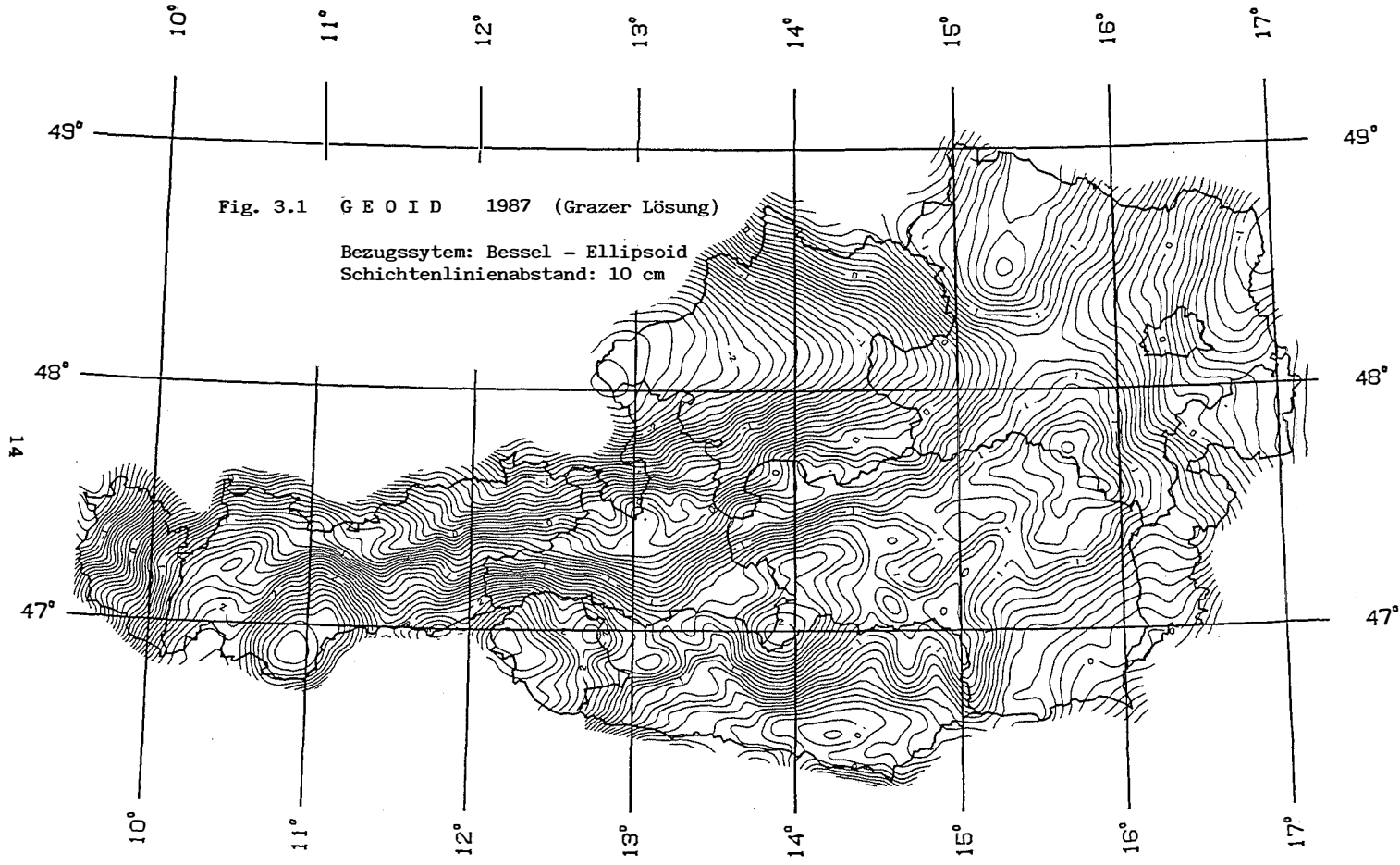
Distanzen

Um eine zwischen zwei (Oberflächen)punkten P und Q gemessene Raumdistanz s_{PQ} auf die zugehörige Ellipsoidsehne zu reduzieren, benötigen wir die ellipsoidischen Höhen dieser beiden Punkte. In der Praxis wurden solche Reduktionen bisher fast ausschließlich mit orthometrischen (oder sphäroidischen oder Gebrauchshöhen) durchgeführt. Geoidhöhen wurden nicht berücksichtigt und damit implizit als Null angenommen, was natürlich im allgemeinen nicht der Realität entspricht. Um diese unrichtig reduzierten Distanzen richtigzustellen, bedarf es einer Korrektur zufolge der Geoidhöhen:

$$\delta s_{PQ} = - \frac{\Delta H_{PQ}}{s_{PQ}} \Delta N_{PQ} - \frac{s_{PQ}}{R} \bar{N}_{PQ} \quad (4-1)$$

mit H ... orthometrische Höhe,
 R ... mittlerer Erdradius,
 \bar{N}_{PQ} ... mittlere Geoidhöhe
 $(\bar{N}_{PQ} := \frac{1}{2}(N_P + N_Q))$

Bei Bezug auf das Bessel-Ellipsoid ist der Anteil des zweiten Terms zufolge der geringen Geoidhöhen innerhalb unseres Bundesgebietes ($|N| \leq 3.5$ m) praktisch vernachlässigbar, während der erste Term in Gebieten bewegter Topographie (bei steilen Visuren und damit großen Höhenunterschieden ΔH) doch beachtliche Werte annehmen kann (siehe Abschnitt 5).



Trigonometrische Höhendifferenzen

Trigonometrische Höhenmessung unter Verwendung beobachteter (unreduzierter), gegenseitiger Zenitdistanzen liefert bekanntlich praktisch orthometrische Höhenunterschiede (HM, 1967, p. 173 ff.). Ihre Überführung in ellipsoidische Höhenunterschiede erfordert eine Korrektur

$$\delta \Delta h_{PQ} = -\cos^2 \left(\frac{z_{QP} - z_{PQ}}{2} \right) s_{PQ} \bar{\epsilon}_{PQ} \quad (4-2)$$

mit z_{PQ} . . . Zenitdistanz von P nach Q,

$\bar{\epsilon}_{PQ}$. . . mittlere Lotabweichung im Azimut von P nach Q ($\bar{\epsilon}_{PQ} = \frac{1}{2} (\epsilon_P + \epsilon_Q)$).

Bei flachen Visuren erhalten wir wegen $\Delta N \doteq -\epsilon$ s in guter Näherung

$$\delta \Delta h_{PQ} = \Delta N_{PQ} \quad (4-3)$$

Diese Korrektur kann durchaus (selbst im Flachland) Werte von mehreren Dezimetern erreichen (siehe Abschnitt 5).

Nivellierte Höhendifferenzen

Um nivellierte Höhendifferenzen in ellipsoidische Höhendifferenzen überzuführen, bedarf es zweier Korrekturen: der orthometrischen Korrektur OK, welche von der Schwere zwischen Geoid und Erdoberfläche an den beiden Endpunkten P und Q des Nivellementweges abhängig ist (HM, 1967, p. 166 ff.) und der Korrektur zufolge der Geoidhöhendifferenz zwischen P und Q,

$$\delta \Delta h_{PQ} = OK_{PQ} + \Delta N_{PQ} \quad (4-4)$$

Auch hier sind Korrekturen im Dezimeterbereich über wenige Kilometer Nivellementweg durchaus nicht unüblich.

Azimute

Die Reduktion eines gemessenen astronomischen Azimutes auf ein zugehöriges ellipsoidisches Azimut ist auf Grund der „natürlichen Stehachsenschiefe“, der Lotabweichung, erforderlich,

$$\delta \alpha_{PQ} = -\eta_P \tan \phi_P + \epsilon'_{PQ} \cot z_{PQ}, \quad (4-5)$$

wobei $\epsilon' = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$

die Projektion des Lotabweichungsvektors auf den Normalvektor zum Richtungsvektor e,

$$e^T = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

bedeutet (HM, S. 184 ff.).

Bei flachen Visuren ist der zweite Term natürlich klein, der erste Term jedoch erreicht innerhalb unseres Bundesgebietes Werte bis zu 20".

Horizontalwinkel

Ein Winkel als Differenz zweier Azimute hat den Vorteil, daß der standpunktabhängige Teil $\eta \tan \phi$ eliminiert wird und sich die Reduktion beobachteter auf ellipsoidische Winkel daher beschränkt auf

$$\delta \omega_{P, QR} = \epsilon'_{PR} \cot z_{PR} - \epsilon'_{PQ} \cot z_{PQ} \quad (4-6)$$

Zenitdistanzen

Die Korrektur gemessener Zenitdistanzen zufolge der Lotabweichung ergibt sich durch Projektion des Lotabweichungsvektors auf den Richtungsvektor e (HM, S. 189 ff.)

$$\delta z_{PQ} = \xi_P \cos \alpha_{PQ} + \eta_P \sin \alpha_{PQ} \quad (4-7)$$

5. Ergebnisse

Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Erdschwerfeldbestimmung für Österreich ermöglicht, für beliebige Punkte innerhalb unseres Bundesgebietes die Geoidhöhe (Höhenanomalie), und die beiden Lotabweichungskomponenten zu präzisieren. In Gebieten mit ausreichender Datendichte können auch Punktschwerewerte mit hinreichender Genauigkeit präzisiert werden. Somit sind alle Voraussetzungen erfüllt, klassisch-geodätische Meßergebnisse vom Einfluß des Schwerfeldes zu befreien und sie so auf weitgehend geometrischen Inhalt zu reduzieren. Die hierzu erforderlichen einfachen Formeln sind in Abschnitt 4 angegeben. Um dem interessierten Leser eine Vorstellung von der Größenordnung dieser Korrekturen zu vermitteln, werden anhand zweier Beispiele, des Karawanken-Tunnel-Netzes und des Semmering-Basistunnel-Netzes, die Minima und Maxima der Erdschwerfeldgrößen, der Meßgrößen und der Korrekturen zufolge des Erdschwerfeldeinflusses angegeben (nächste Seite).

Die Größenordnungen der hier auftretenden Korrekturen zeigen wohl sehr eindrucksvoll, daß der Einfluß des Erdschwerfeldes auf geodätische Meßergebnisse durchaus beachtlich und keinesfalls vernachlässigbar ist. Eine Nichtberücksichtigung und damit formale Gleichsetzung dieses Signals mit Meßrauschen ist dazu angetan, Ausgleichsergebnisse geodätischer Netze erheblich zu verfälschen.

Die nun vorliegende Kenntnis des Erdschwerfeldes in Österreich und die uns verfügbaren hoch entwickelten mathematisch-numerischen Verfahren stellen somit ein ausgereiftes Werkzeug dar zur „Geometrisierung“ klassischer geodätischer Daten und damit auch zur sauberen Verknüpfung mit praktisch rein geometrischen GPS-Daten — eine absolute Notwendigkeit für die Zukunft moderner Ingenieurgeodäsie.

Literatur

- Erker, E.* (1983): Das Geoid in Österreich, Berechnungen des Bundesamtes für Eich- und Vermessungswesen. In: Das Geoid in Österreich. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band III, 89–115, Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung, Graz
- Erker, E.* (1987): The Austrian Geoid — Local Geoid Determination Using Modified Conservative Algorithms. In: The Gravity Field in Austria. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band IV, 19–46, Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung, Graz
- Heiskanen, W. A. and H. Moritz* (1967): Physical Geodesy. Freeman, San Francisco.
- Moritz, H.* (1980): Advanced Physical Geodesy. Wichmann, Karlsruhe.
- Sünkel, H.* (1983): Geoidbestimmung, Berechnungen an der TU Graz, 2. Teil. In: Das Geoid in Österreich. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band III, 125–143, Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung, Graz
- Sünkel, H.* (1987), *N. Bartelme, H. Fuchs, M. Hanafy, W.-D. Schuh, and M. Wieser*: The Gravity Field in Austria. In: The Gravity Field in Austria. Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung, Neue Folge, Band IV, 47–75, Österreichische Kommission für die Internationale Erdmessung, Graz

Karawanken-Tunnel

	Min.	Max.
Breite	46.45°	46.49°
Länge	13.97°	14.03°
Höhe	614 m	1891 m
Geoidhöhe (Bessel)	0.11 m	0.24 m
Lotabweichung NS	-9.6"	+7.4"
Lotabweichung OW	+0.4"	+8.0"
Distanz	283 m	5524 m
Zenitdistanz	64°	115°
Höhenunterschied	5 m	1277 m

Erdschwerefeld einfluß

Horizontaldistanz	0 mm	35 mm
Höhenunterschied		164 mm
Azimet	-1.3"	+10.3"
Zenitdistanz	-9.8"	+ 9.6"

Semmering-Basistunnel

	Min.	Max.
Breite	47.55°	47.71°
Länge	15.62°	15.94°
Höhe	460 m	1764 m
Geoidhöhe (Bessel)	1.17 m	1.65 m
Lotabweichung NS	-10.5"	+ 9.0"
Lotabweichung OW	- 6.2"	+11.5"
Distanz	2107 m	14019 m
Zenitdistanz	76°	103°
Höhenunterschied	13 m	1218 m

Erdschwerefeld einfluß

Horizontaldistanz	0 mm	40 mm
Höhenunterschied		666 mm
Azimet	- 6.4"	+12.9"
Zenitdistanz	-12.1"	+ 8.2"