

Paper-ID: VGI_199001



Der gefährliche Ort des überbestimmten räumlichen Rückwärtseinschneidens

Karl Killian ¹

¹ *Hadikgasse 40, 1140 Wien*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **78** (1), S. 1–12

1990

Bib_TE_X:

```
@ARTICLE{Killian_VGI_199001,  
Title = {Der gef{\a}hrliche Ort des {\u}berbestimmten r{\a}umlichen R{\u}  
ckw{\a}rtseinschneidens},  
Author = {Killian, Karl},  
Journal = {{\0}sterreichische Zeitschrift f{\u}r Vermessungswesen und  
Photogrammetrie},  
Pages = {1--12},  
Number = {1},  
Year = {1990},  
Volume = {78}  
}
```



Der gefährliche Ort des überbestimmten räumlichen Rückwärtseinschneidens

von *Karl Killian*, Wien

a) Einleitung

Das räumliche Rückwärtseinschneiden (r.R.-E.) bei Vorhandensein von drei Festpunkten ist ein sehr bekanntes und weitgehend behandeltes Problem. Der gefährliche Ort (gef. O.) dieses Problems wurde schon von *S. Finsterwalder* auf kinematischem Wege abgeleitet [1a)] und später [1b)] sehr ausführlich behandelt. Ebenso haben *Krames*, *Rinner* und *Wunderlich* [6] [9] [12] u. a. auf diesem Gebiet wertvolle Arbeiten geleistet. Die erste geschlossene analytische Ableitung des gef. O. ist in [5] gegeben. Alle auf verschiedenen Wegen durchgeführten Arbeiten über den gef. O. (Kreiszyylinder, der durch die drei Festpunkte geht und auf der Festpunktebene normal steht) zeigen unmittelbar – oft wird auch besonders darauf hingewiesen –, daß der genannte Zylinder der einzige gef. O. des r.R.-E. bei Vorhandensein von drei Festpunkten ist.

Gotthardt behandelte das überbestimmte r. R.-E., d. h., er setzte vier und mehr Festpunkte voraus und kommt erstmalig zu sehr bedeutungsvollen Aussagen:

1) Liegen vier oder mehr Festpunkte in einer Ebene, so gibt es keinen gef. O. [2a)].

2) Liegen jedoch vier oder mehr Festpunkte im Raum, so ergeben bestimmte Lagen der Festpunkte einen gef. O. Das ist dann der Fall, wenn beliebig viele Festpunkte auf bestimmten Raumkurven dritter Ordnung liegen [2b)]. Bei der Ableitung dieser Kurven kommt *Gotthardt* zu der Aussage, daß es bei Vorhandensein von drei Festpunkten, außer dem bekannten gefährlichen Zylinder, noch einen anderen gef. O. gibt.

Zu 2) ist zu bemerken, daß die von *Gotthardt* abgeleitete Kurve dritter Ordnung und ihre Eigenschaften schon sehr lange bekannt sind (siehe unter C). Allerdings wurde die Bedeutung dieser Kurven für die Photogrammetrie nicht genügend beachtet. Ferner ist zu bemerken, daß der sogenannte „neuentdeckte gef. O. des r. R.-E.“ bei Vorhandensein von drei Festpunkten nicht existiert.

b) Grundlegendes

Wir gehen von einer ganz einfachen Überlegung aus, die ohne Rechnung zu einem sehr anschaulichen Ergebnis führt: σ_1 und σ_2 sind eine horizontale bzw. eine vertikale Ebene. In σ_2 liegt ein Kreis K , mit dem Durchmesser (\emptyset) a , der σ_1 im Punkt O berührt (Fig. 1). Das Projektionszentrum P eines Luftbildes liegt im höchsten Punkt von K , und O ist der Fußpunkt des Lotes von P auf σ_1 . Durch O geht eine zur Schnittlinie von σ_1 und σ_2 normale Gerade G . Die Festpunkte A und B liegen auf dem Kreis K , und der Festpunkt C liegt auf der Geraden G . Bewegt man P auf dem Kreis K , so bleiben die Winkel α und β konstant. Bewegt man P auf dem Kreis \bar{K} (Radius von \bar{K} ist gleich dem Durchmesser von K), so bleibt der Winkel γ konstant. Da die Kreise K und \bar{K} in P eine gemeinsame Tangente haben, ändern sich alle drei Winkel nur von zweiter Ordnung, wenn sich P um eine Strecke erster Ordnung bewegt. Da mit Hilfe von α , β und γ auch alle drei Positionswinkel zu den Punkten A , B , C bestimmt sind, liegt ein r. R.-E. vor. Der Punkt P ist sodann der gef. O.

Diese Überlegung gilt für beliebig viele Festpunkte, wenn sie alle auf dem Kreis K und auf der Geraden G liegen. Immer ist P der gef. O., obwohl also eine beliebig hohe Überbestimmung des r. R.-E. vorliegt.

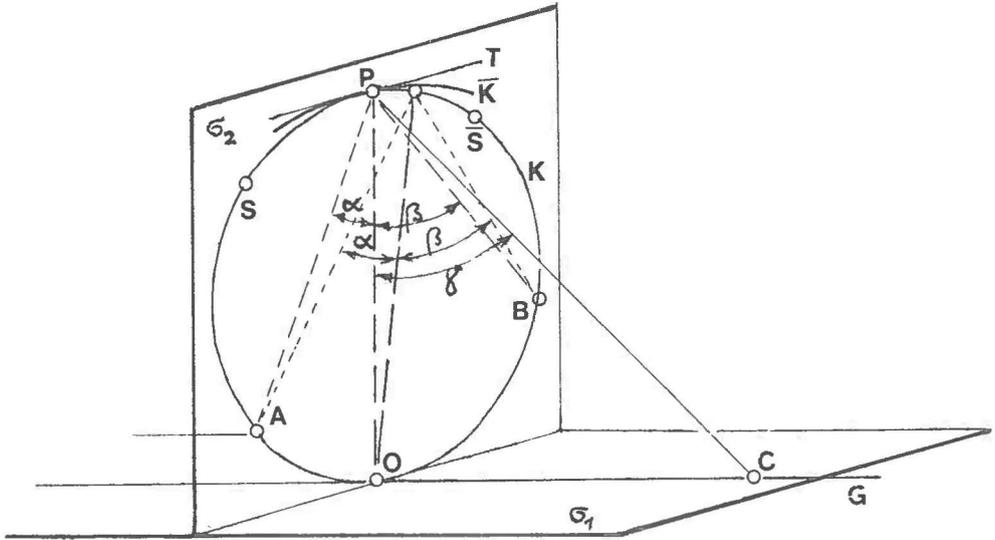


Fig. 1

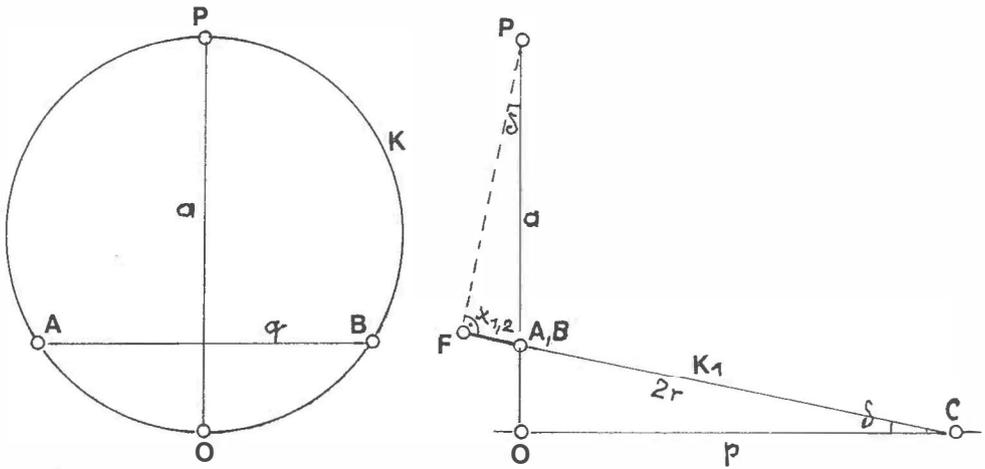


Fig. 2

Ferner ist auf einfache Weise zu erkennen, daß zu zwei symmetrisch zu P in endlicher Entfernung liegenden Punkten S, \bar{S} entsprechende Positionswinkel gehören, die exakt gleiche Größe haben. S und \bar{S} stellen sodann zwei getrennte und P eine zusammenfallende Lösung dar.

Bemerkt sei, daß unter c) diese Ergebnisse noch wesentlich erweitert werden.

Wir gehen nun wieder zurück auf unsere Annahme: Es liegen nur drei Festpunkte A, B, C (Fig. 1) vor. Fig. 1 könnte zur Vermutung führen, daß damit ein neuer gef. O. des r. R.-E. entdeckt ist (Gotthardt [2 b]). Das ist jedoch nicht so. Wird nämlich über das Festpunkt-dreieck (A und B sind beliebige Punkte des Kreises K, und C ist ein beliebiger Punkt der Geraden G die bekannte gefährliche Zylinderfläche errichtet, so geht diese immer durch P. Oder anders gesagt: Fällt man von P das Lot auf die Festpunktebene ϵ , so schneidet dieses immer den Umkreis des Festpunkt-dreiecks. Diese Aussage entspricht dem letzten Satz des ersten Absatzes der Einleitung. Dennoch soll unabhängig davon diese Aussage analytisch bewiesen werden:

Dieser Beweis wird besonders einfach, wenn A und B gleich hoch sind. Wir nehmen folgende Größen als gegeben an: $a = \emptyset$ des Kreises K, $p =$ Entfernung \overline{OC} , $\delta =$ Neigungswinkel des Umkreises K_1 . Aus Fig. 2 folgt für Kreis K

$$q^2 = (a - p \tan \delta) p \tan \delta \tag{1}$$

Ebenso folgt für den Umkreis K_1 ($\emptyset = 2r$)

$$q^2 = \left(2r - \frac{p}{\cos \delta}\right) \cdot \frac{p}{\cos \delta} \tag{2}$$

Aus 1) und 2) folgt:

$$(a - p \tan \delta) p \tan \delta = \left(2r - \frac{p}{\cos \delta}\right) \cdot \frac{p}{\cos \delta}$$

daraus

$$2r = (a - p \tan \delta) \sin \delta + \frac{p}{\cos \delta} \tag{3}$$

Aus dem Kreuzriß folgt für K: $x_1 = (a - p \tan \delta) \sin \delta$ (4)

Ebenso folgt für K_1 : $x_2 = 2r - \frac{p}{\sin \delta}$ (5)

Aus 3) ist ersichtlich, daß $x_1 = x_2$.

Beachtenswert ist noch der Fall, daß nur ein Festpunkt dem Kreis angehört und die beiden anderen Festpunkte auf der Geraden G (Fig. 1) liegen. Man erkennt sodann unmittelbar, daß das von P aus gefällte Lot auf die Festpunktebene durch den Umkreis K_1 geht.

Wir gehen nun zur ursprünglichen Aufgabe zurück: A und B haben beliebige Lagen auf dem Kreis K, und C hat eine beliebige Lage auf G. Diese Aufgabe kann bei verschiedenen Annahmen mit den Methoden der darstellenden Geometrie gelöst werden. Diesem Vorgang entsprechend, weisen die Lösungen nur graphische Genauigkeit auf. Zu einem strengen analytischen Beweis führen einige aus der Fig. 3 ablesbaren Beziehungen. Die Punkte A, B, C sowie der Kreis K sind in Grund- und Aufriß dargestellt. e_1 und e_2 sind die Spuren der Ebene ϵ . Grund- und Aufriß des von P auf e_1, e_2 gefällten Lotes l stehen normal zu e_1 bzw. e_2 .

Wir zeichnen einen Seitenriß auf eine vertikale durch B gehende und zu l' ($= l^\circ$) parallelen Ebene und erhalten den in die Grundrißebene gedrehten Fußpunkt F° des Lotes. Wir drehen ferner das Dreieck A, B, C in die Grundrißebene und erhalten $A^\circ, B^\circ, C^\circ$. Zeichnen wir den Umkreis dieses Dreiecks, so muß dieser, wenn obige Aussage richtig ist, durch F° gehen.

An dieses graphische Ergebnis schließen wir einen analytischen Beweis. Die ganze Fig. 3 ist mit Angabe der Größen a, z_2, y_1, y_2 und x_3 eindeutig bestimmt. Denn $z_1, t, \sin\beta, \cos\beta, \sin\gamma$ und $\cos\gamma$ können aus diesen Angaben berechnet bzw. aus der Figur abgelesen werden.

Aus den Aufriß folgt:

$$y_1^2 = z_1(a - z_1) \tag{1}$$

$$y_2^2 = z_2(a - z_2) \tag{2}$$

Daraus
$$a = \frac{y_2^2}{z_2} + z_2 \tag{3}$$

Aus dem Grundriß folgt:

$$\sin\beta = \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + t^2}} \tag{4}$$

$$\cos\beta = \frac{t}{\sqrt{x_3^2 + t^2}} \tag{5}$$

Aus dem Seitenriß folgt:

$$\tan\gamma = \frac{z_2}{(t + y_2) \sin\beta}$$

und wegen 4)
$$\tan\gamma = \frac{z_2 \sqrt{x_3^2 + t^2}}{(t + y_2) x_3} \tag{6}$$

$$\overline{SF}^{\circ} = \overline{TF}^{\text{III}} = a \sin\gamma + t \sin\beta \cos\gamma = \sin\gamma [a + t \sin\beta \cot\gamma] \tag{I}$$

Nach Verwendung der Gln. 3), 4) und 6) ergibt eine einfache Rechnung

$$\overline{SF}^{\circ} = \frac{\sin\gamma}{z_2(x_3^2 + t^2)} [x_3^2(y_2^2 + t^2 + y_2 t)] \tag{Ia}$$

Zur Bestimmung des Schnittpunktes des Umkreises mit l' ($= l^{\circ}$) verwenden wir ein rechtwinkeliges Koordinatensystem ξ, η Ursprung Punkt S. Sind p und q die Koordinaten des Mittelpunktes, so folgt $\overline{SF}_0 = 2q$ und $\overline{\xi C} = 2p$. Nach Verwendung der Gln. des durch S, A° B° C° gehenden Kreises folgt

$$\overline{SF}^{\circ} = 2q = \frac{1}{\eta_B} (\xi_B^2 - \xi_B \xi_C + \eta_B^2) = \frac{1}{\eta_A} (\xi_A^2 - \xi_A \xi_C + \eta_A^2) \tag{7}$$

In 7) sind die Indizes $_o$ weggelassen. Aus dem Grundriß folgt:

$$\xi_C = \overline{SC}^i = x_3 \sin\beta, \quad \xi_B = \overline{ST} = y_2 \cos\beta, \quad \eta_B = \frac{z_2}{\sin\gamma}$$

Somit ist:

$$\overline{SF}^{\circ} = \frac{\sin\gamma}{z_2} (y_2^2 \sin^2\beta - y_2 x_3 \sin\beta \cos\beta + \frac{z_2^2}{\sin\gamma}) \tag{II}$$

Verwendet man 4) und 5) und drückt man $\sin^2\gamma$ durch $\tan\gamma$ aus und bringt man $\sin\gamma/z_2 (x_3^2 + t^2)$ wieder vor die Klammer, so wird II) identisch mit Ia). Damit ist der Beweis geliefert.

Wir stellen jetzt eine allgemeinere Frage: Wie müssen die Festpunkte A, B, C liegen, damit das vom Luftstandpunkt P auf die Festpunktebene ε gefällte Lot den Umkreis K_1 des Festpunktedreiecks schneidet?

Die Vektoren zu den Punkten A, B, C heißen $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$.

(Vektoren sind im folgenden durch Halbpfleile gekennzeichnet.)

Der Vektor zu P ist \vec{p}_0 Fig. 4.

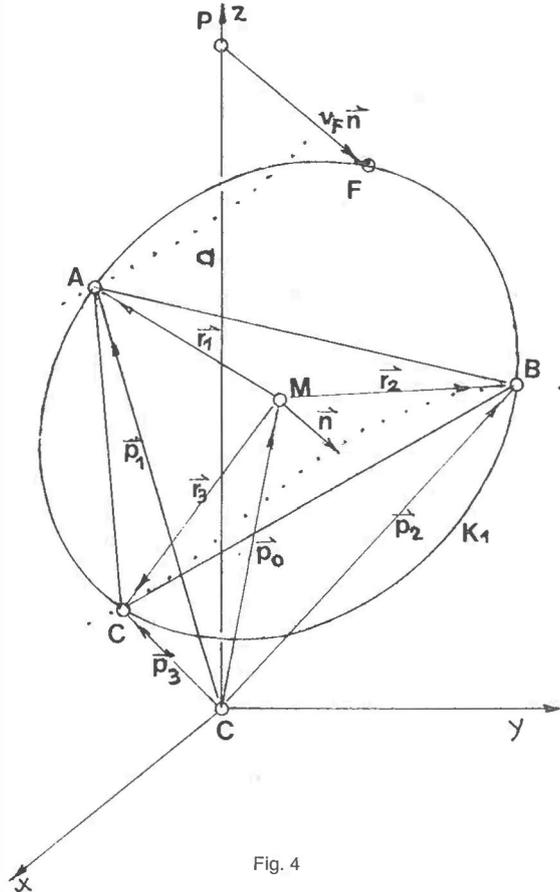


Fig. 4

$$\vec{p}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad (1)$$

$$\vec{p}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \quad (2)$$

$$\vec{p}_3 = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k} \quad (3)$$

Für den Mittelpunkt M des Umkreises besteht die Beziehung:

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = |\vec{r}_3| \quad (4)$$

Sind x_0, y_0, z_0 die Koordinaten von M, so ist:

$$\vec{r}_1 = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = (x_1 - x_0) \vec{i} + (y_1 - y_0) \vec{j} + (z_1 - z_0) \vec{k} \quad (5)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{p}_2 - \vec{p}_0 = \dots \quad (6)$$

$$\vec{r}_3 = \vec{p}_3 - \vec{p}_0 = \dots \quad (7)$$

Wegen 4) ist

$$(\vec{p}_1 - \vec{p}_0)^2 = (\vec{p}_2 - \vec{p}_0)^2 = (\vec{p}_3 - \vec{p}_0)^2 \tag{8}$$

Aus 5) und 7) folgt

$$2(x_3 - x_1)x_0 + 2(y_3 - y_1)y_0 + 2(z_3 - z_1)z_0 = x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 + z_3^2 - z_1^2 \tag{I}$$

Analog folgt aus 6) und 7)

$$2(x_3 - x_2)x_0 + 2(y_3 - y_2)y_0 + 2(z_3 - z_2)z_0 = x_3^2 - x_2^2 + y_3^2 - y_2^2 + z_3^2 - z_2^2 \tag{II}$$

Das sind zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der Koordinaten von M. Die folgende Gleichung ergibt sich aus der Komplanaritätsbedingung (bzw. lineare Abhängigkeit) von und \vec{r}_1 , \vec{r}_2 und \vec{r}_3 : $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = 0$. Etwas einfacher ist es, die Gleichung der Ebene ε in Determinantenform zu verwenden:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{III}$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die laufenden Koordinaten x, y, z durch x_0, y_0, z_0 , so hat man die gesuchte dritte Gleichung III) zur Berechnung von M (x_0, y_0, z_0). Die Lösung dieser Gleichungen ergibt

$$\vec{p}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \tag{9}$$

Der Normalvektor n auf die Ebene ε ist

$$\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} \tag{10}$$

Aus Fig. 4) folgt, wenn v_F die Zahl bedeutet, mit der n zu multiplizieren ist, um den Fußpunkt F des Lotes zu erreichen

$$\vec{p}_F = a \vec{k} + v_F \vec{n} \tag{11}$$

Die Berechnung von v_F erfolgt mit der Dreipunktegleichung der Ebene ε :

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{r}_1 + \mu \vec{r}_2 \tag{12}$$

oder

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda(\vec{p}_1 - \vec{p}_0) + \mu(\vec{p}_2 - \vec{p}_0) \tag{12a}$$

wobei λ und μ unabhängig voneinander alle reellen Zahlen durchlaufen. Wegen 11) ist

$$\vec{p}_0 + \lambda_F(\vec{p}_1 - \vec{p}_0) + \mu_F(\vec{p}_2 - \vec{p}_0) = a \vec{k} + v_F \vec{n} \tag{13}$$

die Koordinaten von \vec{r}_1 nennen wir a_1, a_2, a_3

die von \vec{r}_2 nennen wir b_1, b_2, b_3

Somit ist:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda_F \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \mu_F \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + v_F \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

oder

$$v_F \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ -c_3 \end{pmatrix} + \lambda_F \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \mu_F \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \\ a - z_0 \end{pmatrix} \tag{14a}$$

Nach der Cramerschen Regel ist

$$v_F = \frac{\begin{vmatrix} -x_0 & a_1 & b_1 \\ -y_0 & a_2 & b_2 \\ a - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -c_1 & a_1 & b_1 \\ -c_2 & a_2 & b_2 \\ -c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \tag{15}$$

Aus 10) und 11) folgt

$$\vec{p}_F = a\vec{k} + v_F(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}) \quad (16)$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß F auf dem Umkreis liegt, ist

$$|\vec{p}_F - \vec{p}_0| = |\vec{r}| \quad (17)$$

Infolge 13) 10) und 9) ist

$$|a\vec{k} + v_F(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}) - x_0\vec{i} - y_0\vec{j} - z_0\vec{k}| = |(v_F c_1 - x_0)\vec{i} + (v_F c_2 - y_0)\vec{j} + (v_F c_3 + a - z_0)\vec{k}|$$

Somit

$$(v_F c_1 + x_0)^2 + (v_F c_2 - y_0)^2 + (v_F c_3 + a - z_0)^2 = |\vec{r}|^2 \quad (18)$$

Die angeführten Gleichungen sind unmittelbar zur Berechnung numerischer Beispiele geeignet: Gegeben sind P und A, B, C. Es ist gefragt, ob das Lot von P auf die Festpunktebene ε den Umkreis des Festpunktedreiecks schneidet. Umgekehrt dürften diese Gleichungen nur aufgrund sehr aufwendiger Überlegungen die Antwort auf die Frage geben können, wo die Festpunkte liegen müssen, damit sie die obige Eigenschaft erfüllen.

Gotthard [2b)] erklärte, daß die Festpunkte, die auf bestimmten Kurven 3. O. liegen, ein r. R. E. von differenzieller Unsicherheit ergeben.

Unter c) wird gezeigt, daß eine ganz einfache und in diesem Zusammenhang kaum beachtete geometrische Überlegung unsere allgemeinere Frage beantwortet.

c) Die Horopter-Kurve

Die von Gotthardt angegebene Kurve 3. O. [2b)] wurde schon von A. F. Möbius [8] 1827 studiert. Eine bedeutende Rolle spielte sie in der physiologischen Optik [4] [7] [10] [11]. Sie heißt Horopter-Kurve (Kunstwort, abgeleitet vermutlich aus Horos = altägyptischer Sonnengott). Sie hat gewisse Analogien mit dem Kreis und wird daher auch kubischer Kreis genannt. Die für unsere Belange maßgebenden Eigenschaften der Horopter-Kurve können ganz elementar abgeleitet werden:

Wir denken uns zwei kongruente Strahlenbündel. Ihre Strahlen seien nach dem Prinzip der gleichen Winkel einander zugeordnet. Bekanntlich können zwei kongruente Strahlenbündel, deren Zentren nicht zusammenfallen, nicht so gelegt werden, daß sich alle einander entsprechenden Strahlen je in einem Punkt schneiden. Im allgemeinen kreuzen sich zwei entsprechende Strahlen dieser Bündel. Jedoch in beiden Bündeln gibt es einander entsprechende Strahlen, die sich schneiden. Die Gesamtheit dieser Schnittpunkte ergibt die Horopter-Kurve. Um diese zu bestimmen, gehen wir folgendermaßen vor:

Die beiden kongruenten Bündel legen wir so, daß zwei Strahlen des Bündels mit dem Zentrum S sowie die entsprechenden zwei Strahlen des Bündels \bar{S} zu einer horizontalen Ebene π parallel liegen. Die Grundrisse dieser Strahlen $S'Q_1$ und $S'Q_2$ sowie $\bar{S}'Q_1$ und $\bar{S}'Q_2$ (sie sind in Fig. 5 strichliert gezeichnet) schließen ebenso wie die entsprechenden Strahlen gleiche Winkel α ein. Die Schnittpunkte der Grundrisse sind Q_1 und Q_2 . Da über die Größe von α nichts ausgesagt wurde, liegen alle Q-Punkte auf einem Kreis K (Peripheriewinkelsatz).

Auf dem Kreis K denken wir uns eine Zylinderfläche errichtet, deren Erzeugende vertikal stehen. In dieser Fläche wählen wir einen Punkt R so, daß die Vertikalwinkel β in S und in \bar{S} gleich groß sind. Sodann sind \overline{SR} und $\overline{\bar{S}R}$ entsprechende Strahlen der beiden kongruenten Bündel. Alle Punkte auf der Zylinderfläche, welche die Eigenschaft des

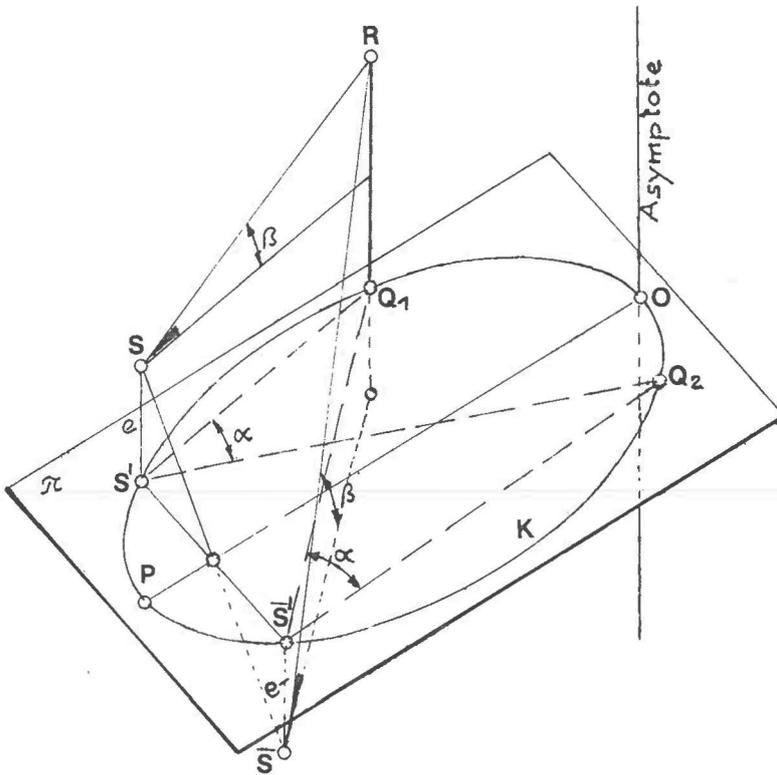


Fig. 5

Punktes R haben, liegen auf einer Kurve, der Horopter-Kurve (kurz Horopter). Für diese besteht also die Beziehung:

$$e + \overline{S'Q_1} \tan \beta = \overline{S''Q_1} \tan \beta - e$$

Läßt man β gegen 90° gehen, so erkennt man, daß der Horopter eine vertikale, zu P diametral liegende Asymptote hat.

Die optischen Vorgänge im menschlichen Auge werden in erster Näherung der mathematischen Idealisierung zusammenfassend etwa folgendermaßen beschrieben: Jedes Auge hat ein Zentrum eines Lichtstrahlenbündels. Die Augen sind um diese Zentren drehbar. Wenn die Augen eine primäre Stellung annehmen, d. h., wenn bei aufrechter Körperhaltung ein optisch unendlich ferner Punkt fixiert wird, so liegen die kongruenten Lichtbündelstrahlen parallel. Sie bestimmen entsprechende Punkte auf den Netzhäuten. Wird nun ein beliebiger endlich weit entfernter Punkt im Raum fixiert, werden die Augen so gedreht, daß die Bilder des Punktes auf entsprechende Stellen der Netzhäute fallen. Der zugehörige Horopter ist der Ort der Punkte, in denen sich je zwei entsprechende Strahlen der Bündel schneiden. Die Punkte des Horopters allein werden scharf gesehen. Dieser Vorgang wird uns beim Sehen kaum bewußt.

Im Sinne der Photogrammetrie heißen die bis jetzt erklärten Eigenschaften des Horopters: Wenn in zwei Luftstandpunkten S und \bar{S} je ein Luftbild von den gleichen beliebig vielen Festpunkten aufgenommen wird, die alle auf einem Horopter liegen, so sind die beiden Strahlenbündel kongruent. Das heißt, das r. R.-E. hat bei Verwendung aller Festpunkte zwei nicht zusammenfallende Lösungen. Ist die Strecke $\overline{S\bar{S}}$ sehr klein, so kann die sogenannte Nebenlösung nicht mehr ausgeschieden werden. Es liegt also ein gef. O.

vor. In Fig. 5 haben wir S höher als \bar{S} angenommen. Es ergibt sich in diesem Fall ein linksgängiger Horopter. Liegt S tiefer als \bar{S} , ergibt sich ein rechtsgängiger Horopter. Liegen diese beiden Punkte gleich hoch, so zerfällt der Horopter in einen Kreis und in eine Gerade. Damit kommen wir wieder auf Fig. 1 zurück.

Wir betrachten wieder das r. R.-E. bei Vorhandensein von drei Festpunkten. Unter b) wurde gezeigt, daß dann, wenn die drei Festpunkte auf einem entarteten Horopter liegen, kein „neuentdeckter gef. O.“ vorliegt. Wie soeben gezeigt, gilt dasselbe auch dann, wenn die drei Festpunkte auf einem nicht entarteten Horopter liegen.

Bezüglich der Mannigfaltigkeit eines Horopters kann bemerkt werden, daß für einen Luftstandpunkt P und bei vorgegebener Lotrichtung ∞^3 Horopter bestehen. Denn, es gibt ∞^1 azimutal liegende Kreise K (Fig. 1). Ihr Durchmesser a kann ∞^1 verschiedene Werte annehmen und die Steigung des Horopters kann ebenfalls ∞^1 verschiedene Werte annehmen.

Eine besonders einfache punktweise Konstruktion und Berechnung eines Horopters wird noch angeführt: Aus Fig. 5 folgt, daß der Horopter auf einem Drehzylinder liegt. Ein orthogonaler Kegel hat bekanntlich eine Erzeugende, die senkrecht zu den Kreischnitten des Kegels steht. Bringt man diese Erzeugende mit einer Erzeugenden des Zylinders zur Deckung und bestimmt man sodann die Schnittlinie der beiden Flächen 2. O., so ergibt sich eine Raumkurve 3. O., und zwar ein Horopter. (Z. B. hat *Th. Schmid* in seiner Darstellenden Geometrie I. Bd., S. 205 (1922) für einen rechtsgängigen Horopter diese Konstruktion durchgeführt.) Die Konstruktion von Auf- und Grundriß des Punktes R ist aus Fig. 6 unmittelbar ersichtlich.

Bei Annahme von z ergibt sich aus der Fig. 6

$$y = \sqrt{z(a-z)}, \quad \text{und } x = k \cdot \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{a-z}}$$

(zwei ähnliche Dreiecke mit dem gemeinsamen Eckpunkt P'')

Es müssen also die drei Vektoren p_i ($i = 1, 2, 3$) mit den Koordinaten

$$z_i, x_i = k \cdot \frac{\sqrt{z_i}}{\sqrt{a-z_i}}, \quad y_i = \sqrt{z_i(a-z_i)}$$

die Gl. 18) befriedigen.

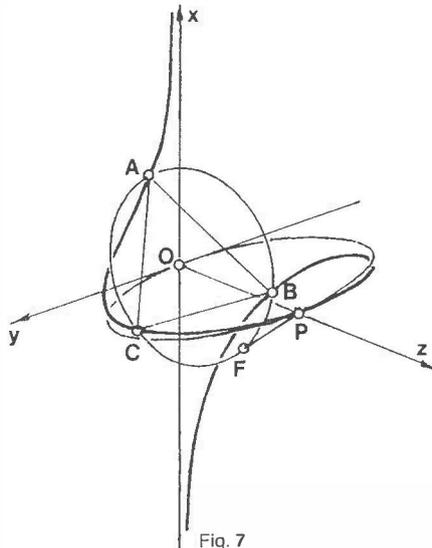


Fig. 7

Abschließend wird in Fig. 7 dieses Ergebnis graphisch dargestellt. Die Eckpunkte des beliebigen Dreiecks A, B, C liegen auf einem nicht entarteten Horopter. Von P wird das Lot auf diese Dreiecksebene gefällt. Das Lot schneidet immer den Umkreis des Dreiecks. Diese Aussage entspricht der im letzten Satz des ersten Absatzes der Einleitung gemachten Bemerkung.

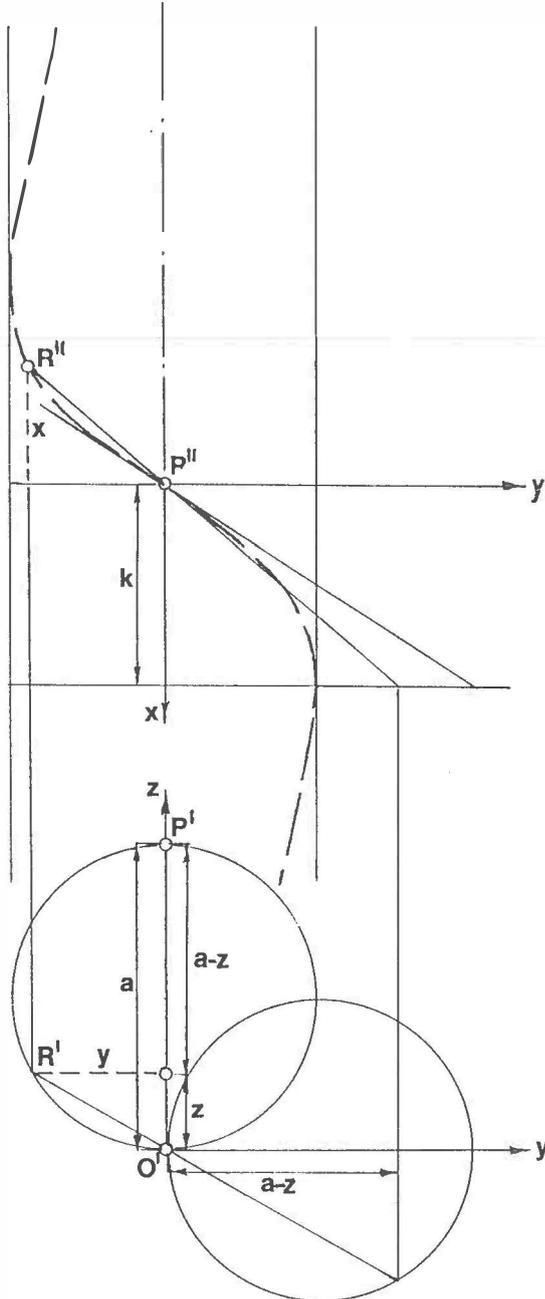


Fig. 6

Literatur

- [1] *Finsterwalder S.*, a) Die geometr. Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresb. d. Deutschen Math. Vereinigung VI/2 1899, u. Seb. Finsterwalder zum 75. Geburtstage 1937.
b) Über zwei mit der Ortung von Luftaufnahmen zusammenhängende Aufgaben. Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1939, S. 166 bis 171.
- [2] *Gotthardt E.*, a) Zur Unbestimmtheit des räumlichen Rückwärtseinschnittes. Mitteilungen der Ges. f. Photogrammetrie e.V., Jänner 1940, Heft 5.
b) Ein neuer gefährlicher Ort zum räumlichen Rückwärtseinschnitten. Bildm. u. Luftbildw. 1974/1
- [3] *Großmann M.*, Darstellung des Horopters. Vierteljahresschrift der Naturf. Ges. in Zürich LXX (1925)
- [4] *Helmholtz v. H.*, Handbuch der physiologischen Optik. 2. Aug. 1896
- [5] *Killian K.*, Über das Rückwärtseinschneiden im Raum. Ö.Z.f.V. 1955 Nr. 6, S. 175 bis 177
- [6] *Krames J.*, Elementargeometrischer Nachweis des "gefährlichen" Drehzylinders beim räumlichen Rückwärtseinschnitt. Elemente der Mathematik 1955, X/5
- [7] *Ludwig W.*, Die Horopterkurve. Math. Abhandlungen aus dem Verlag math. Modelle von M. Schilling in Halle a.S. Neue Folge Nr. 8.
- [8] *Möbius A. F.*, Der barycentrische Calcül 1827 p. 120.
- [9] *Rinner K.*, Der gefährliche Ort § 39, S. 397 in Handb. der Vermessungsk. Jordan, Eggert, Kneissl, Bd. IIIa/1 Photogrammetrie (1972).
- [10] *Schuh F.*, Die Horopterkurve. Z. f. Math. u. Phys. Bd. 47 (1902).
- [11] *Schur F.*, Über die Horopterkurve. Sitzungsber. der Dorpater Naturforsch. Gesellsch. 2. Nov. 1889.
- [12] *Wunderlich W.*, Über den „gefährlichen“ Rückwärtsschnitt Jahresber. der Deutschen Math.-Vereinigung Bd. 53, 1943 Heft 2.

Manuskript eingelangt im Jänner 1990.