

Paper-ID: VGI\_199306



## Über die Volumensbedingung bei der Ausgleichung eines dreidimensionalen Trilaterationsnetzes

Josef Kabelac <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Lehrstuhl für Höhere Geodäsie, TU Prag, Thakurova 7, CR-1 6629 Praha 6*

Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie **81** (2), S. 75–85

1993

BibT<sub>E</sub>X:

```
@ARTICLE{Kabelac_VGI_199306,  
  Title = {{\text{U}}ber die Volumensbedingung bei der Ausgleichung eines  
          dreidimensionalen Trilaterationsnetzes},  
  Author = {Kabelac, Josef},  
  Journal = {{\text{O}}sterreichische Zeitschrift f{{\text{u}}r Vermessungswesen und  
            Photogrammetrie},  
  Pages = {75--85},  
  Number = {2},  
  Year = {1993},  
  Volume = {81}  
}
```





# Über die Volumensbedingung bei der Ausgleichung eines dreidimensionalen Trilaterationsnetzes

von Josef Kabelac, Prag

## Zusammenfassung

Die Thematik dieser Abhandlung betrifft die Ausgleichung räumlicher Netze, die nur an den Seiten gemessen wurden. Sie untersucht den Fall, bei dem nur die Seiten des Netzes gemessen worden sind. Die dreidimensionale Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen erfolgt mittels der sogenannten Volumensbedingung. Ihre Herleitung durch N. Tartaglio [2] basiert auf der Formel für das Volumen eines Tetraeders. Ein numerisches Beispiel wird gegeben.

## 1. Einleitung

An der Wende der Fünfziger- zu den Sechzigerjahren hat Prof. Hradilek mit geodätischen Hochgebirgsmessungen begonnen, zuerst in der Westlichen, dann in der Hohen und in der Östlichen Tatra im Gebiet der nördlichen Slowakei [4]. Der Zweck der Messungen und Berechnungen waren genaue trigonometrische Höhenbestimmungen. Ihre Wiederholungen in geplanten Zeitabschnitten sollten Höhenänderungen und somit auch gebirgsbildende Bewegungen im angegebenen Gebiet nachweisen. Die Problematik der Hochgebirgsmessungen wurde vollständig in [3] behandelt.

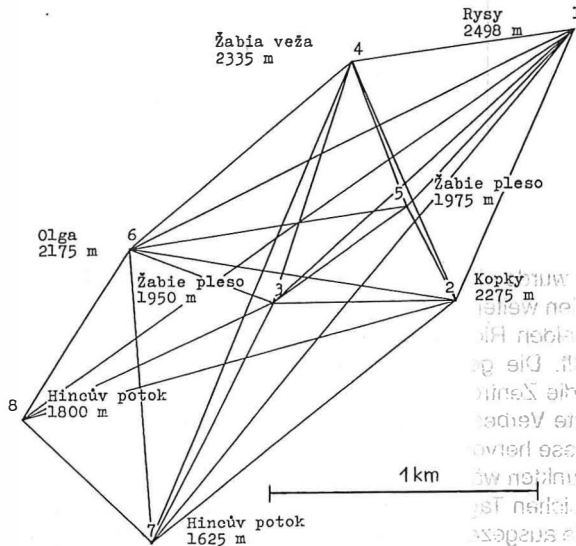


Abb. 1: Das Raumnetz im Gebiet von Hincova dolina und dolina Zabich ples in der Hohen Tatra

Anfang der Achtzigerjahre schufen die polnischen Geodäten eine geodätische Basis im Gebiet des Tatra-Städtchens Zakopane. Neben anderen zahlreichen Messungen wurde die Höhe des Grenzgipfels Rysy (Punkt 1 in Abb. 1) durch trigonometrisches Nivellement bestimmt. Ausgehend vom Gebirgssee Morskie oko führten die polnischen Geodäten einen trigonometrischen Höhenzug mit fünf Instrumentenaufstellungen. Die Zenitwinkel wurden gleichzeitig und gegenseitig gemessen. Nach ihrer Meinung ist das Verfahren frei von Refraktions- und Lotabweichungseinflüssen. Selbstverständlich wurde die Forderung erhoben, die Gipfelhöhe auch von der slowakischen Seite zu bestimmen [8]. Diese neuen Messungen sollten auch die im Jahre 1964 bestimmte Höhe kontrollieren. Die Aufgabe übernahm das Geodätische und Kartographische Forschungsinstitut in Bratislava. An den Arbeiten beteiligten sich auch einige Lehrer und Schüler der CVUT in Prag, darunter auch der Autor. Die vorliegende Abhandlung entstand als Folge dieses Unternehmens.

## 2. Charakterisierung des Netzes und der Messungen

Das Raumnetz wurde im Jahre 1987 erkundet und stabilisiert, gemessen wurde 1988. Das Netz liegt im Gebiet von Hincova dolina und dolina Zabich ples im Bereich Vysoké Tatry (Hohe Tatra) westlich des Punktes Rysy. Es besteht aus acht Punkten mit Höhendifferenzen von fast 900 m und der längsten Seite von 2,5 km. Die Höhenwinkel der Visuren bewegten sich zwischen 4 und 43 gon. Die schiefen Distanzen wurden mittels Geodimeter, Kern Mekometer 3000 und Wild Di 2000 gemessen.

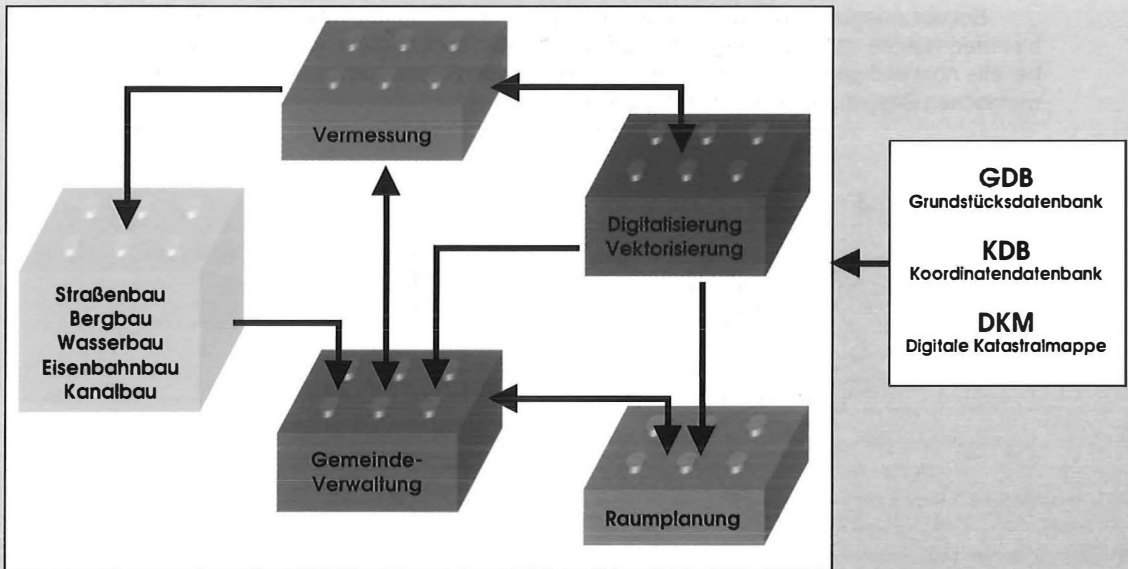
Verbindungs- linie	Länge [m]	Verbindungs- linie	Länge [m]
1-2	1001,8875	2-8	1610,9631
1-3	1446,1933	3-4	956,6317
1-4	774,0273	3-5	528,8444
1-5	959,4129	3-6	670,5267
1-6	1610,4552	3-7	925,0906
1-7	2352,9518	3-8	1023,2518
1-8	2460,5242	4-5	631,2200
2-3	650,3294	4-6	881,7779
2-4	887,4049	4-7	1864,8642
2-5	461,1159	5-6	920,7156
2-6	1131,3256	6-7	1249,6828
2-7	1429,1910	6-8	1110,8493
		7-8	402,3757

Tab. 1: Auf die Mitten der Stabilisationsmarken reduzierte Längen

Die Visur 4-8 wurde nicht gemessen, in den Seiten 5-7 und 5-8 bestand keine Sichtverbindung. Bei allen weiteren 25 Visuren wurden Stand- und Zielpunkt vertauscht und so die Distanz aus beiden Richtungen gemessen. Nur in Punkt 4 wurde nur ein Prismenreflektor aufgestellt. Die gemessenen Längen wurden wegen physikalischer Einflüsse korrigiert und auf die Zentren der Stabilisierungsmarken reduziert (Tabelle 1). Die durchschnittliche absolute Verbesserung der gegenseitig gemessenen Seiten beträgt nur 0,36 mm (Tabelle 4). Diese hervorragenden Ergebnisse wurden durch die feste Aufstellung der Stative auf allen Punkten während der gesamten Meßzeit, die Messung an verschiedenen Tagen, aber zu gleichen Tageszeiten bei ungefähr gleichen meteorologischen Bedingungen sowie durch die ausgezeichneten Eigenschaften der benützten Entfernungsmesser erzielt.

Das technologische Verfahren für die Bestimmung der Zenitwinkel ist in [1] beschrieben, in [6] finden sich ihre numerischen Werte.

# Koordinierter CAD-Einsatz.



# GRUND BODEN.

Eine Initiative für AutoCAD-Anwender.

Raumplanung, Straßenbau, Vermessung  
 Digitalisierung, Vektorisierung  
 Bauwesen, Vermessung  
 Bergbau  
 Gemeindeverwaltung, Vermessung  
 Straßenbau, Wasserbau, Eisenbahnbau  
 Gemeindeverwaltung, Vermessung  
 Bauwesen, Vermessung  
 Gemeindeverwaltung, Vermessung

Salzburg  
 Linz  
 St. Pölten  
 Ternitz  
 Schwertberg  
 Wien  
 Oberwart  
 Bad Vöslau  
 Innsbruck

a-b CAD  
 AIC  
 Draft & Motion  
 EnviroSoft  
 GD-DATA  
 Ing. Mader  
 rm-DATA  
 SELB OEG  
 SYNERGIS

Tel. 0662 - 23 575  
 Tel. 0732 - 23 22 86  
 Tel. 02742 - 89 152  
 Tel. 02630 - 37 149  
 Tel. 07262 - 62 525  
 Tel. 0222 - 876 40 15  
 Tel. 03352 - 84 82  
 Tel. 02252 - 76 095  
 Tel. 0512 - 26 20 60

### 3. Die Suche nach der passenden Form der Volumensbedingung und ihre Herleitung

Bei der Ausgleichung eines ebenen Netzes, Triangulations-, Trilaterations- oder kombinierten Netzes, gilt als Grundfigur das Dreieck. Man spricht dann von Trigonometrie wobei alle notwendigen Beziehungen für die Ausgleichung eines solchen Netzes aus trigonometrischen Beziehungen abgeleitet werden.

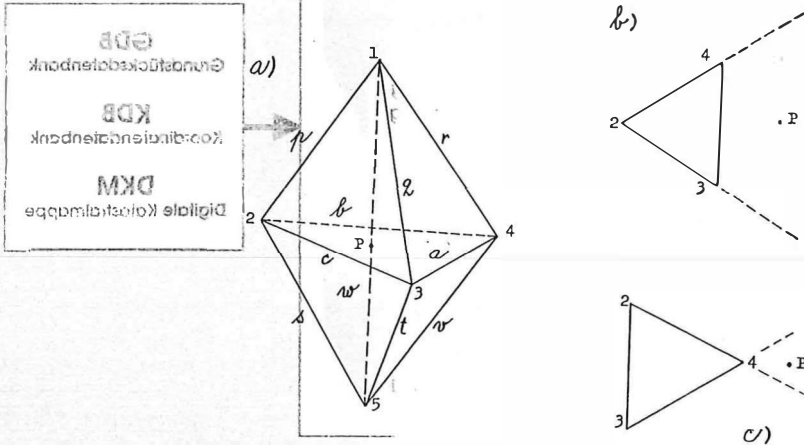


Abb. 2a,b,c: Zur Ableitung der Volumensbedingung

Bei der Ausgleichung des Raumnetzes betrachten wir als geometrische Grundfigur das Tetraeder, das die einfachste Raumfigur darstellt. Die Eigenschaften des Tetraeders behandelt die sogenannte Tetragnetrie, z.B. in [7]. In [2] und [9] sind viele geometrische Beziehungen für das Tetraeder abgeleitet oder angeführt. In der [2] haben wir die Formel für die Berechnung des Volumens V eines Tetraeders gefunden, wenn die Längen a, b, c, p, q, r, s, t seiner sechs Kanten gegeben sind (Abbildung 2a). Sie hat die Form

$$V = \frac{1}{120} [a^2 p^2 (b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2) + b^2 q^2 (c^2 + a^2 - b^2 + r^2 + p^2 - q^2) + c^2 r^2 (a^2 + b^2 - c^2 + p^2 + q^2 - r^2) - a^2 q^2 r^2 - b^2 r^2 p^2 - c^2 p^2 q^2 - a^2 b^2 c^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Der Autor dieser Formel ist N. Tartaglio (1500-1557). Man kann sie auch in Form einer Determinante ausdrücken.

0	$c^2$	$b^2$	$p^2$	1	(2)
$c^2$	0	$a^2$	$q^2$	1	
$b^2$	$a^2$	0	$r^2$	1	
1	$p^2$	$q^2$	$r^2$	0	
1	1	1	1	1	

Der Vorteil beider Formeln liegt in der Darstellung des Volumens nur aus den Kantenlängen. Es treten keine Winkel, Winkelfunktionen, oder sonstige Funktionen auf. Die bestimmte Volumengleichung wird nach Abbildung 2a zusammengestellt. Diese illustriert zwei Tetraedern mit den gemeinsamen Körperdiagonalen 1-5. Die Summe ihrer Volumina ist gleich der Summe der von

Weind...  
 Tel. 02782 - 33 578  
 Tel. 02782 - 33 578  
 Tel. 02782 - 89 182  
 Tel. 02782 - 37 149  
 Tel. 02782 - 82 558  
 Tel. 02782 - 87 40 18  
 Tel. 02782 - 84 85  
 Tel. 02782 - 10 088  
 Tel. 02782 - 50 50 00

$$V_{1234} + V_{2345} = V_{1235} + V_{1345} + V_{1245} \cdot \tag{3}$$

Je nach Lage des Schnittpunktes P der Körperdiagonalen 1-5 mit der Dreiecksebene 2, 3, 4 unterscheidet man drei Fälle:

1. Der Schnittpunkt P liegt innerhalb des Dreiecks 2, 3, 4. Für diesen Fall gilt (3) - siehe Abbildung 2a.

2. Der Schnittpunkt P liegt außerhalb des Dreiecks 2, 3, 4 an einer seiner Seiten - siehe Abbildung 2b. Dann gilt die bedingte Volumengleichung in der Form

$$V_{1234} + V_{2345} = V_{1235} + V_{1245} - V_{1345} \cdot$$

3. Der Schnittpunkt P liegt außerhalb des Dreiecks an einem seiner Scheitel - siehe Abbildung 2c. Dann gilt die bedingte Volumengleichung

$$V_{1234} + V_{2345} = V_{1235} - V_{1345} - V_{1245} \cdot$$

Wenn mit den Buchstaben a, b, c, p, q, r, s, t, v die Kanten des Hexaeders und mit w die Körperdiagonale bezeichnet werden (Abb. 2a), dann gilt für das gemeinsame Hexaeder die bedingte Volumengleichung

$$V_{abcpr} + V_{abcst} \pm V_{aqrtv} \pm V_{bprsv} \pm V_{cpqst} = 0. \tag{4}$$

Wenn man für die entsprechenden Volumina die Formel von Tartaglio [2] einsetzt, bekommt man die Bedingungs-gleichung in der Form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} [a^2 p^2 (b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2) + b^2 q^2 (c^2 + a^2 - b^2 + r^2 + p^2 - q^2) + \\ & + c^2 r^2 (a^2 + b^2 - c^2 + p^2 + q^2 - r^2) - a^2 q^2 r^2 - b^2 r^2 p^2 - c^2 p^2 q^2 - a^2 b^2 c^2]^{\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{1}{12} [a^2 s^2 (b^2 + c^2 - a^2 + t^2 + v^2 - s^2) + b^2 t^2 (c^2 + a^2 - b^2 + v^2 + s^2 - t^2) + \\ & + c^2 v^2 (a^2 + b^2 - c^2 + s^2 + t^2 - v^2) - a^2 t^2 v^2 - b^2 v^2 s^2 - c^2 s^2 t^2 - a^2 b^2 c^2]^{\frac{1}{2}} \pm \\ & \pm \frac{1}{12} [a^2 w^2 (q^2 + r^2 - a^2 + t^2 + v^2 - w^2) + q^2 v^2 (r^2 + a^2 - q^2 + t^2 + w^2 - v^2) + \\ & + r^2 t^2 (a^2 + q^2 - r^2 + w^2 + v^2 - t^2) - a^2 t^2 v^2 - q^2 t^2 w^2 - r^2 w^2 v^2 - a^2 q^2 r^2]^{\frac{1}{2}} \pm \\ & \pm \frac{1}{12} [b^2 w^2 (p^2 + r^2 - b^2 + s^2 + v^2 - w^2) + p^2 v^2 (r^2 + b^2 - p^2 + s^2 + w^2 - v^2) + \\ & + r^2 s^2 (b^2 + p^2 - r^2 + w^2 + v^2 - s^2) - b^2 s^2 v^2 - p^2 s^2 w^2 - r^2 w^2 v^2 - b^2 p^2 r^2]^{\frac{1}{2}} \pm \\ & \pm \frac{1}{12} [c^2 w^2 (p^2 + q^2 - c^2 + s^2 + t^2 - w^2) + p^2 t^2 (q^2 + c^2 - p^2 + s^2 + w^2 - t^2) + \\ & + q^2 s^2 (c^2 + p^2 - q^2 + w^2 + t^2 - s^2) - c^2 s^2 t^2 - p^2 s^2 w^2 - q^2 w^2 t^2 - c^2 p^2 q^2]^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Wenn wir die linke Seite von (5) mit U = U (a, b, c, p, q, r, s, t, v, w) bezeichnen, können wir diese Gleichung linearisieren (unter der Voraussetzung der Existenz der nötigen Ableitungen) mit Hilfe des Taylorsatzes in der Form

$$\frac{\delta U}{\delta a} v_a + \frac{\delta U}{\delta b} v_b + \frac{\delta U}{\delta c} v_c + \frac{\delta U}{\delta p} v_p + \frac{\delta U}{\delta q} v_q + \frac{\delta U}{\delta r} v_r + \frac{\delta U}{\delta s} v_s + \frac{\delta U}{\delta t} v_t + \frac{\delta U}{\delta v} v_v + \frac{\delta U}{\delta w} v_w + U^0 = 0$$

worin wir die partiellen Ableitungen und den Widerspruch U<sup>0</sup> mittels der gemessenen Werte ausdrücken. Die partiellen Ableitungen wurden aus (5) durch Ableitung nach den einzelnen Veränderlichen a, b, c, p, q, r, s, t, v, w gebildet. So z.B. gibt die Ableitung nach der Veränderlichen a, unter Berücksichtigung von

$$12 V_{abcqqr} = [a^2 p^2 (b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2) + b^2 q^2 (c^2 + a^2 - b^2 + r^2 + p^2 - q^2) + c^2 r^2 (a^2 + b^2 - c^2 + p^2 + q^2 - r^2) - a^2 q^2 r^2 - b^2 r^2 p^2 - c^2 p^2 q^2 - a^2 b^2 c^2]^{\frac{1}{2}}$$

und entsprechenden Umformungen, den Ausdruck

$$\frac{\delta U}{\delta a} = \frac{1}{144} a \{ (V_{abcqqr})^{-1} [p^2 (b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2 - a^2) + (q^2 - c^2) (b^2 - r^2)] + (V_{abcstv})^{-1} [s^2 (b^2 + c^2 - a^2 + t^2 + v^2 - s^2 - a^2) + (t^2 - c^2) (b^2 - v^2)] \pm (V_{aqrtvw})^{-1} [w^2 (q^2 + r^2 - a^2 + t^2 + v^2 - w^2 - a^2) + (v^2 - r^2) (q^2 - t^2)] \}.$$

Nach demselben Verfahren erhält man die Ableitungen nach den übrigen Veränderlichen in (5).

Man kann die einzelnen Ableitungen auch durch die Determinanten nach (2) ausdrücken. Die Determinante mit der Unbekannten  $x^2$  nur in einem ihrer Elemente drückt man in der Form aus

$$D = D(x=0) + (-1)^{i+j} x^2 SD_{ij}, \quad (6)$$

worin  $D(x=0)$  die ursprüngliche Determinante  $D$  ist, in der  $x$  durch die Null ersetzt wurde, und  $SD_{ij}$  die Subdeterminante zum Element  $x$  ist, das in der  $i$ -ten Zeile und in der  $j$ -ten Spalte steht. Leitet man (6) nach  $x$  ab, bekommt man

$$dD/dx = (-1)^{i+j} 2x SD_{ij}.$$

Eine Determinante mit der Unbekannten  $x^2$  in zwei ihrer Elemente, wie in (2) drückt man in der Form aus

$$D = D(x=0) + (-1)^{i+j} 2x^2 SD_{ij}(x=0) - x^4 SSD_{ij,ji}$$

worin  $D(x=0)$  die ursprüngliche Determinante  $D$  ist, in der alle  $x$  durch Nullen ersetzt wurden. Die  $SSD_{ij,ji}$  ist die Subdeterminante zu den Elementen  $x$ , aus denen das erste in der  $i$ -ten Zeile und in der  $j$ -ten Spalte, das zweite in der  $j$ -ten Zeile und in der  $i$ -ten Spalte liegt. Die Ableitung der vorhergehenden Gleichung ergibt die Form

$$dD/dx = (-1)^{i+j} 4x SD_{ij}(x=0) - 4x^3 SSD_{ij,ji}.$$

#### 4. Numerische Anwendung

Zuerst ist es nötig, die Anzahl der Bedingungsgleichungen zu bestimmen. Nach Abbildung 2 ist die Anzahl der Scheitel  $n = 8$ . Die Anzahl aller möglichen Verbindungslinien ist 28. In unserem Netz wurden aber drei Seiten nicht gemessen (5-7, 5-8, 4-8). Die Anzahl der gemessenen Seiten ist also 25. Die Anzahl der notwendigen Seiten ist  $3(n-3)+3 = 3(n-2) = 18$ , und die Anzahl der Bedingungsgleichungen  $r = 25-18 = 7$ .

Nach Abbildung 1 wurden also sieben Hexaeder bestimmt, für welche die bedingten Volumengleichungen aufgestellt wurden. Es sind dies die Hexaeder:

- 1.: 1,2,3,4,5    3.: 1,3,4,5,6    5.: 2,3,4,6,7    7.: 1,3,6,7,8.  
2.: 2,3,4,5,6    4.: 1,2,3,6,7    6.: 2,3,6,7,8

**Eine Klasse Sache**

Klasse 1

Klasse 2

Klasse 3

*Stellen Sie sich Ihr eigenes Meßsystem mit diesen Bausteinen zusammen: ✓ Dem Basisinstrument mit einem nahezu unübertrefflichen Betriebssystem, dem 2-achsigen Stehachsenkompensator, der seriellen Zweizeige-Datenkommunikation, der koaxialen Optik und vielen anderen Funktionen, die Ihre Arbeit effizienter, zuverlässiger und angenehmer machen. ✓ Drei Klassen für Genauigkeit und Reichweite. ✓ Numerische Tastatur. ✓ Alphanumerische*

*Tastatur. ✓ Servo-Antrieb. ✓ Mechanischer Antrieb. ✓ Kapazität des internen Speichers von 1000 bis zu 10.000 Punkte. ✓ Kapazität des externen Speichers für bis zu 3000 Punkte. ✓ 10 verschiedene Programme zur Daten-erfassung und für Feldberechnungen. ✓ Die RPU 500 ermöglicht Ihnen, während Sie am Meßpunkt stehen, zu messen, zu speichern, Meßwerte zu berechnen und Daten zu überprüfen.*

## Stellen Sie sich Ihr eigenes Meßsystem zusammen!

Was würden Sie tun, wenn Sie Ihr eigenes Meßsystem nach Ihren Wünschen zusammenstellen könnten? Sie würden es Ihrer Arbeitsweise und Ihren Aufgaben anpassen. Richtig? Wie sollte Ihr Ergebnis sein? Sollte es nicht zuverlässiger und gewinnbringender sein? Selbstverständlich! Das ist kurz gesagt die Philosophie, die hinter dem System 500 steht. Dem System, das Sie nach Ihren Anforderungen zusammensetzen.

Es ist leicht. Sie beginnen mit der Entscheidung, welche Genauigkeit und welche Reichweite Sie wünschen. Dazu gibt es noch weitere 20 Funktionen, die Sie wählen und mit Ihren Ansprüchen in Einklang bringen können. Kreieren Sie Ihr „Trauminstrument“, wir machen dann Wirklichkeit daraus. Mit anderen Worten: Sie wählen die Spezifikationen und den Preis. Das ist Freiheit!

### Geodimeter System 500

*Die Freiheit wählen zu können*

Interessiert? Rufen Sie uns an und vereinbaren Sie einen Termin mit uns oder fordern Sie einen Prospekt an. Wir geben Ihnen 65 triftige Gründe, sich für das Geodimeter System 500 zu entscheiden.

Den Coupon bitte kopieren oder ausschneiden und an uns schicken oder faxen. Geotronics GmbH, Feldstraße 14, W-6108 Weiterstadt. Fax: (06151) 89 11 23.

**Ja! Ich möchte selbst kreativ sein.**

Ich möchte eine unverbindliche Vorführung

Ich möchte ausführlichere Informationen über das System 500

Name \_\_\_\_\_

Firma \_\_\_\_\_

Straße \_\_\_\_\_

Ort \_\_\_\_\_

Telephon \_\_\_\_\_





** )	1	2	3	4	5	6	7
1-2	-477662			-252544			
1-3	1204052		479563	-1637186			-3808133
1-4	-301873		326254				
1-5	-532361		-272053				
1-6			-517371	198221			-4837406
1-7				1698226			-9062754
1-8							17268754
2-3	-438207	195814		343951	276111	-233942	
2-4	280100	159638			-225713		
2-5	207081	-108584					
2-6		-202214		-65029	101503	568805	
2-7				-482027	-351999	1441746	
2-8						-1593467	
3-4	-527299	-775980	-901668		7607287		
3-5	-414736	561524	335314				
3-6		540426	481695	-173282	-1881643	744855	2150656
3-7				-1401636	7122353	2062036	3807464
3-8						-2236550	-7664400
4-5	231888	400424	508752				
4-6		424599	805200		1482964		
4-7					-8604365		
5-6		-580337	-565592				
6-7				205877	2034755	-3894287	5842124
6-8						3394361	-9471411
7-8						2467033	-4397624

\*) Verbindungslinie    \*\*) Bedingungs-gleichung No.

Tab. 2: Partielle Ableitungen

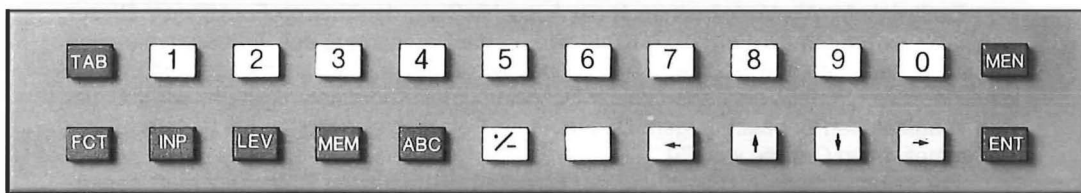
Bedingungs-gleichung No.	Widersprüche	
	Vor der Aus-gleichung [m <sup>3</sup> ]	Nach der Aus-gleichung [m <sup>3</sup> ]
1	-711	-6
2	928	0
3	614	-4
4	5475	5
5	-6295	-57
6	4818	26
7	-32423	-29

Tab. 3: Widersprüche

Verbindungs-linie	Gewichte: $p_{ij} = 1$		Gewichte: $p_{ij} = 9(1 + l_{ij})^{-2}$	
	$m_0 = \pm 0,94\text{mm}$		$m_0 = \pm 1,0\text{mm}$	
	Verbesserung [mm]	$m_{ij}$ [mm]	Verbesserung [mm]	$m_{ij}$ [mm]
1-2	0,32	0,85	0,13	0,66
1-3	0,90	0,55	0,81	0,46
1-4	-0,03	0,80	-0,03	0,57
1-5	0,20	0,86	0,06	0,65
1-6	-0,13	0,74	-0,07	0,64
1-7	1,66	0,63	-2,22	0,59
1-8	0,39	0,62	0,41	0,58
2-3	-0,21	0,89	-0,11	0,55
2-4	-0,09	0,88	-0,07	0,64
2-5	-0,02	0,93	0,02	0,49
2-6	0,01	0,90	0,04	0,71
2-7	0,19	0,91	0,03	0,82
2-8	0,25	0,91	0,34	0,88
3-4	0,34	0,67	0,45	0,50
3-5	-0,14	0,80	-0,15	0,48
3-6	-0,14	0,86	-0,19	0,53
3-7	0,74	0,68	0,30	0,55
3-8	0,18	0,78	0,22	0,64
4-5	-0,30	0,89	-0,17	0,56
4-6	-0,38	0,77	-0,27	0,57
4-7	0,26	0,67	0,03	0,59
5-6	0,30	0,85	0,30	0,60
6-7	0,52	0,75	0,54	0,61
6-8	-0,75	0,78	-0,55	0,63
7-8	-0,49	0,87	-0,17	0,48

Tab. 4: Längenverbesserungen und Schätzungen der mittleren quadratischen Längenfehler

# Leistungen, die Grenzen sprengen



## Setzen Sie auf Dialog, um Meßprobleme zu lösen

Freies Stationieren mit Ausgleichung; Koordinatenbestimmung; Absteckung nach Koordinaten; Abstand Punkt - Gerade; Spanmaßbestimmung ...

Hat Ihr Tachymeter für jedes Meßproblem eine elegante Lösung?

Wenn für Sie die Software eines elektronischen Tachymeters „verständlich“ sein muß, dann führt an den Computer-Tachymetern



Neu! Computer-Tachymeter Rec Elta

Rec Elta der Baureihe E von Carl Zeiss kein Weg vorbei.

Die Software der Rec Elta bietet universelle Möglichkeiten, selbst für komplexe Meßaufgaben. Im Dialog erreichen Sie schnell und zuverlässig das gewünschte Meßergebnis.

Und, weil Sie mit einem Rec Elta mit interner Registrierung Zeit sparen – durch praxisgerechte Zusatzfunktionen ...



Zeiss Österreich GmbH  
Rooseveltplatz 2  
1096 Wien  
Tel. 02 22-42 36 01  
Fax 02 22-43 44 25

**BAU-REIHE E**  
Zukunftsweisende  
Elektronik im  
Vermessungswesen

Tabelle 2 enthält die partiellen Ableitungen in 7 Bedingungsgleichungen für 25 unbekannte Distanzen. Tabelle 3 zeigt in der ersten Spalte die Widersprüche vor und in der zweiten Spalte nach der Ausgleichung. Tabelle 4 enthält die Streckenverbesserungen und Schätzungen ihrer mittleren quadratischen Fehler mit dem Messungsgewicht  $p_{ij} = 1$  und mit dem Messungsgewicht  $p_{ij} = 9(1+l_{ij})^2$ , worin  $l_{ij}$  die in Kilometern ausgedrückten Seitenlängen sind. Diesen zwei Gewichtsvarianten entsprechen die a-posteriori mittleren Einheitsfehler  $m_0 = 0,94$  mm und  $m_0 = 1,01$  mm. Die durchschnittliche absolute Verbesserung beträgt 0,36 mm bzw. 0,31 mm. Bei der zweiten Gewichtsvariante wurden die Gewichte nach der Formel  $p_{ij} = m_0'^2/m^2 l_{ij}$  berechnet, mit dem a-priori Wert  $m'_0 = 3$  mm und  $m_{ij} = 1+l_{ij}$  [km].

## 5. Abschluß

Die vorliegende Arbeit gibt eine neue sogenannte Volumensbedingung für die Ausgleichung eines dreidimensionalen Trilaterationsnetzes an. Die Vorteile liegen in ihrer ungewöhnlichen Empfindlichkeit auf Streckenfehler, weil deren Größe mit dem Volumen des entsprechenden Tetraeders wächst. Die Ausgleichung der Längen allein deckt die systematischen oder groben Fehler auf und zwar ohne den Einfluß der Fehler in den gemessenen Zenitwinkeln. Als Vorteil gilt auch die Ausschließung der inneren Funktionen. Dieser Umstand wird durch die Formel von Tartaglio für die Berechnung des Tetraedervolumens nur aus den Längen bewirkt. Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen bietet noch einen weiteren Vorteil - sie bedarf keiner Definition eines Koordinatensystems wie z.B. bei den vermittelnden Beobachtungen. Dadurch fallen die Schwierigkeiten bei der Reduktion der gemessenen Größen weg [5].

Zur selbständigen Ausgleichung der Strecken im benutzten Raumnetz muß hervorgehoben werden, daß es sich um ungewöhnlich genaue Messungen handelt, wie aus den beidseitigen Beobachtungen, aus den Verbesserungen der Ausgleichung und aus der Schätzung ihrer mittleren quadratischen Fehler hervorgeht. Die Ergebnisse aus beiden Gewichtsvarianten weisen keine großen Differenzen auf.

Ein Nachteil der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen ist die allgemein bekannte Schwierigkeit in der Aufstellung der Form der Bedingungsgleichungen und oft auch die Feststellung der nötigen Anzahl dieser Gleichungen. Sollen das Ergebnis die Raumkoordinaten oder wenigstens die Höhen der einzelnen Punkte sein, so ist es nötig, die aus den Bedingungen gewonnenen ausgeglichenen Größen in das zugehörige System zu transformieren.

Die Verbesserung  $v_{17}$  der gemessenen Seite  $l_{17}$  hat in beiden Gewichtsvarianten Ausreißerwerte (-1,66 mm bzw. -2,22 mm). In der ersten Variante ( $p_{ij} = 1$ ) ist die mittlere Verbesserung

$$m_v = m_0 \sqrt{n'/n} = 0.94 \text{ mm} \quad \sqrt{7/25} = 0.50 \text{ mm}$$

und die normierte Verbesserung  $t_{17} = v_{17}/m_v = 3,32$ . Die nach dem Pearson-Test bestimmte kritische Grenze von  $t_\alpha$  ( $\alpha = 5\%$ ) = 2,72 wurde überschritten. In der zweiten Variante  $p_{17} = 0,80$  ist auf die Gewichtseinheit normiert

$$v'_{17} = v_{17} \sqrt{p_{17}} = 1.98 \text{ mm}, \quad m_{v'} = 1.01 \text{ mm} \quad \sqrt{7/25} = 0.53 \text{ mm},$$

$$t'_{17} = v'_{17}/m_{v'} = 3.74 \text{ bei } t_{5\%} = 2.72.$$

In beiden Varianten hat die Verbesserung einen statistisch, nicht aber geodätisch bedeutsamen Wert, der auf einen größeren Fehler in der gemessenen Strecke  $l_{17}$  hindeutet.

Wahrscheinlich wurde er durch ungenaue Zentrierung verursacht. Hier bestätigt sich die Effizienz der Trilaterationsausgleichung in der Aufdeckung grober Fehler. Man kann aber erwarten, daß im Restfehler der ausgeglichenen Strecke  $\epsilon'_{17} = \epsilon_{17} - v_{17}$  der ursprüngliche grobe Fehler  $\epsilon_{17}$  sowie auch sein Einfluß auf die übrigen ausgeglichenen Strecken durch die Erfüllung der sieben Bedingungen wesentlich reduziert wurde.

Die vorgelegte Methode gibt also die Möglichkeit der Benutzung einer neuen unabhängigen Bedingung für die Ausgleichung von räumlichen Trilaterationsnetzen und dadurch auch die Möglichkeit zur Beseitigung von systematischen oder groben Fehlern.

#### Literatur

- [1] Blazek, R., Hurka, J., Ingeduld, M., Holecek, A.: Technologisches Verfahren für die trigonometrische Bestimmung der Höhenunterschiede in flachen Terrains (tschechisch), SUGK, Bratislava 1985.
- [2] Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. 3. Band, S. 1054-67, Leipzig 1914-31.
- [3] Hradílek, L.: Die Hochgebirgsgeodäsie (tschechisch). Academia, Praha 1984. [4] Hradílek, L., Loulova, A., Blazek, R., Simek, J.: Der Aufbau der geodätischen Grundlagen in hohen Gebirgen (tschechisch). Geod. a kart. obzor 34, 1988 c.l.
- [5] Ingeduld, M.: Applikation der dreidimensionalen Geodäsie für Zwecksnetze. Schlußbericht (tschechisch). Závěrečná zpráva VU c. F 3101-120, Stavební fakulta CVUT, Praha 1980.
- [6] Kabelac, J.: Höhenausgleichung des Hochgebirgsnetzes "Rysy 1988" (tschechisch). Geod. a kart. obzor, in Druck.
- [7] Lambert, J.H.: Beiträge zum Gebrauch der Mathematik. 2, Berlin, 1767.
- [8] Mackova, E.: Höhenausgleichung des Raumnetzes Rysy (slowakisch). Diplomarbeit, SVST, Bratislava 1990.
- [9] Naas, J., Schmid, H.L.: Mathematisches Wörterbuch. Band I und II, Akademie-Verlag GMBK, Berlin, Stuttgart 1967.

#### *Anschrift des Autors:*

Kabelac, J. Doz.Ing., Lehrstuhl für Höhere Geodäsie, TU Prag, Thakurova 7, CR-16629 Praha 6.